УДК 519.6

О. Н. Литвин, д-р физ.-мат. наук,
О. П. Нечуйвитер, канд. физ.-мат. наук
Украинская инженерно-педагогическая академия
(Украина, 61003, Харьков, ул. Университетская 16,
тел. (057) 7710545, 0501894738,
e-mail: academ@kharkov.ua, olesia_nechuiviter@mail.ru)

Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления 3D интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации

Доказана оптимальность по порядку точности кубатурных формул приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием операторов кусочно-полиномиальной сплайн-интерфлетации на классе дифференцируемых функций.

Доведено оптимальність за порядком точності кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням операторів кусково-поліноміальної сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій.

Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций трех переменных, кубатурные формулы, интерфлетация функций.

При решении задач цифровой обработки многомерных сигналов, математического моделирования непрерывных производственных процессов, компьютерной томографии, картографии поверхности по данным ее радиолокации, неразрушаемого контроля на таможнях, защиты информации (повышение производительности систем двуключевой криптографии и компьютерной стеганографии) и других широко используют преобразование Фурье, интегралы от быстроосциллирующих функций, быстрые ортогональные преобразования. Поэтому одной из актуальных проблем является построение кубатурных формул вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций на определенных классах при использовании различных информационных операторов о неосциллирующем множителе подынтегральной функции.

В качестве данных могут быть использованы значения функции в узловых точках, следы функции на системе линий или плоскостей, интегралы от приближаемой функции вдоль избранной системы линий или плоскостей, пересекающих исследуемый объект. В связи с этим возникает необходимость обоснования оптимальности по точности и близости к ним кубатурных формул приближенного вычисления, в частности интегралов от быстроосциллирующих функций на определенных классах подынтегральных функций при использовании различных информационных операторов.

Задачу приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций многих переменных с использованием различных информационных операторов позволяет эффективно решать аппарат интерлинации и интерфлетации функций [1]. В работах [2, 3] приведены решения задачи приближенного вычисления 2D коэффициентов Фурье с помощью интерлинации функций в случае, когда начальная информация задана значениями функции в точках, ее следами на системе взаимноперпендикулярных прямых на различных классах функций.

В [4, 5] изложен общий подход к построению операторов финитного трехмерного дискретно-непрерывного и дискретного преобразований Фурье на основе метода Файлона, трилинейных сплайнов (линейных по каждой переменной) и сплайн-интерфлетации на классе дифференцированных функций в случае, когда заданы значения неосциллирующего множителя подынтегральной функции в точках. Построение кубатурной формулы на основе кусочно-постоянной интерфлетации на классе Липшица при данных — следах функции на плоскостях рассмотрено в [6].

Одна из неисследованных задач — построение кубатурных формул приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных на плоскостях ректангуляции (которые разделяют область на параллелепипеды) и обоснование оптимальности по порядку точности построенных кубатурных формул.

Постановка задачи. Для вычисления 3D коэффициентов Фурье вида

$$I_1^3(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\omega x\sin\omega y\sin\omega z dxdydz,$$

$$I_2^3(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos\omega x\cos\omega y\cos\omega z dxdydz,$$

$$I_3^3(\omega,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\,e^{-i\omega x}e^{-i\omega y}e^{-i\omega z}dxdydz$$

построить кубатурные формулы с использованием операторов кусочно-полиномиальной сплайн-интерфлетации на плоскостях ректангуляции на классе функций $L_q^{2,2,2}(\Omega), 1 \le q \le \infty$:

$$L_q^{2,2,2}(\Omega) = \{f^{(s)}(x, y, z) \in C(\Omega), \; s = (s_1, s_2, s_3), \; s_\lambda = 0, 1, 2, \; \lambda = 1, 2, 3,$$

$$s \ne (2, 2, 2), \; \left\| f^{(2, 2, 2)} \right\|_{L_q(\Omega)} \le 1\}.$$

Получить оценки погрешности приближения. Доказать оптимальность по порядку точности кубатурных формул.

Оценка снизу погрешности численного интегрирования на классе дифференцируемых функций. Использование новых информационных операторов предполагает формализацию понятий и применение нового подхода к получению оценок погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных. Дадим определения оптимальных и близких к ним кубатурных формул в случае, когда информация о неосциллирующем множителе подынтегральной функции задана следами на плоскостях.

Для приближенного вычисления интеграла вида $I(f, \omega) = I_1^3(f, \omega)$ рассмотрим множество кубатурных формул ℓ_N, в которых использована информация о функции не более чем на N плоскостях. Пусть $R(f, \omega, \ell_N)$ — погрешность приближенного вычисления $I(f, \omega)$ с помощью кубатурной формулы

$$\ell_N : R(f, \omega, \ell_N) = I(f, \omega) - \ell_N .$$

Погрешностью кубатурной формулы ℓ_N на классе F называют величину

$$R(F, \omega, \ell_N) = \sup_{f(x) \in F} \left| R(f, \omega, \ell_N) \right|.$$

Оптимальной погрешностью численного интегрирования на классе является величина

$$R_N(F, \omega) = \inf_{\ell_N \in L_N} R(F, \omega, \ell_N).$$

Квадратурная формула ℓ_N^*, с помощью которой достигается величина $R_N(F, \omega)$, является оптимальной по точности. Если $R_N(F, \omega, \bar{\ell}_N) \le$ $\le R_N(F, \omega) + \eta$, $\eta > 0$, то $\bar{\ell}_N$ — оптимальная по точности кубатурная формула с точностью до η. Если $\eta = o(R_N(F, \omega))$ или $\eta = O(R_N(F, \omega))$, то $\bar{\ell}_N$ — соответственно асимптотически оптимальная или оптимальная по порядку точности.

Для получения оценок снизу величины $R(F, \omega, \ell_N)$ используют метод «шапочек» [2]. Сравнивая оценку сверху и снизу, делают вывод о типе кубатурной формулы, т.е. является данная кубатурная формула оптимальной по точности, оптимальной по порядку точности или асимптотически оптимальной.

Теорема 1 [7]. Справедлива следующая оценка снизу на классе $L_q^{r,r,r}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$, $r = 1, 2$:

$$R(L_q^{r,r,r}(\Omega), \omega, \Phi(f, \omega)) \ge \frac{(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3} \frac{1}{6^{3r+3}} \frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Теорема 1 используется далее при доказательстве теоремы 3.

Сплайн-интерфлетация на плоскостях ректангуляции. Пусть

$$\Omega = [0, 1]^3, \Omega = \bigcup_i \Pi_i,$$

$$\Pi_i = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \times [y_{i_2}, y_{i_2+1}] \times [z_{i_3}, z_{i_3+1}], i = (i_1, i_2, i_3),$$

$$i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, i_3 = \overline{1, N_3 - 1}.$$

Введем оператор

$$E_i f(x, y, z) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} h_{j_1}(x) f(x_{j_1}, y, z) + \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} h_{j_2}(y) f(x, y_{j_2}, z) +$$

$$+ \sum_{j_3=i_3}^{i_3+1} h_{j_3}(z) f(x, y, z_{j_3}) - \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} h_{j_1}(x) h_{j_2}(y) f(x_{j_1}, y_{j_2}, z) -$$

$$- \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_3=i_3}^{i_3+1} h_{j_1}(x) h_{j_3}(z) f(x_{j_1}, y, z_{j_3}) - \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \sum_{j_3=i_3}^{i_3+1} h_{j_2}(y) h_{j_3}(z) f(x, y_{j_2}, z_{j_3}) +$$

$$+ \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \sum_{j_3=i_3}^{i_3+1} h_{j_1}(x) h_{j_2}(y) h_{j_3}(z) f(x_{j_1}, y_{j_2}, z_{j_3}),$$

$$x, y, z \in \Pi_i \subset \Omega, i = (i_1, i_2, i_3),$$

где $h_{j_1}(x), h_{j_2}(y), h_{j_3}(z)$ — базисные интерполяционные сплайны степеней 0, 1, 2, 3 со свойствами

$$h_{j_1}(x)|_{x=x_\alpha} = \delta_{\alpha, j_1}, h_{j_2}(y)|_{y=y_\beta} = \delta_{\beta, j_2}, h_{j_3}(z)|_{y=y_\gamma} = \delta_{\gamma, j_3}.$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2012. V. 34. № 5

Этот оператор имеет свойства

$$f(x,y,z)\in C^m(\Omega)\to E_i f(x,y,z)\in C^m(\Pi_i),\ m\geq 0,$$

$$E_i f(x,y,z)|_{x=x_\alpha}=f(x,y,z)|_{x=x_\alpha},\ \alpha=\{i_1,i_1+1\},$$

$$E_i f(x,y,z)|_{y=y_\beta}=f(x,y,z)|_{y=y_\beta},\ \beta=\{i_2,i_2+1\},$$

$$E_i f(x,y,z)|_{z=z_\gamma}=f(x,y,z)|_{z=z_\gamma},\ \gamma=\{i_3,i_3+1\}.$$

Тогда оператор

$$E_\Omega f(x,y,z)=E_i f(x,y,z),(x,y,z)\in\Pi_i\subset\Omega,$$

будет удовлетворять условиям

$$E_\Omega f(x,y)\in C(\Omega),$$

$$E_\Omega f(x,y,z)|_{x=x_\alpha}=f(x,y,z)|_{x=x_\alpha},\ E_\Omega f(x,y,z)|_{y=y_\beta}=f(x,y,z)|_{y=y_\beta},$$

$$E_\Omega f(x,y,z)|_{z=z_\gamma}=f(x,y,z)|_{z=z_\gamma},\ 1\leq\alpha\leq N_1,\ 1\leq\beta\leq N_2,\ 1\leq\gamma\leq N_3.$$

Этот оператор называется кусочно-полиномиальным интерфлетационным оператором, или кусочно-полиномиальным интерфлетантом. Он интерфлетирует функцию $f(x,y,z)$ на шести взаимноперпендикулярных плоскостях:

$$\Pi_i=[x_{i_1},x_{i_1+1}]\times[y_{i_2},y_{i_2+1}]\times[z_{i_3},z_{i_3+1}],\ i=(i_1,i_2,i_3),$$

$$i_1=\overline{1,N_1-1},\ i_2=\overline{1,N_2-1},\ i_3=\overline{1,N_3-1}.$$

Функция $E_\Omega f(x,y,z)$ имеет значения в точках $(x,y,z)\in\Pi_i\subset\Omega$, зависящие от следов функции $f(x,y,z)$ только на границе $\partial\Pi_i$.

Теорема 2 [1]. Погрешность кусочно-полиномиальной интерфлетации в каждом из параллелепипедов Π_i удовлетворяет неравенству

$$|f(x,y,z)-E_\Omega f(x,y,z)|\leq|Q_i(x,y,z)|,(x,y,z)\in\Pi_i\subset\Omega,\ i=(i_1,i_2,i_3),$$

где $Q_i(x,y,z)$ — «стандартная» функция,

$$Q_i(x,y,z)=\frac{1}{8}\prod_{j_1=i_1}^{i_1+1}(x-x_{j_1})\prod_{j_2=i_2}^{i_2+1}(y-y_{j_2})\prod_{j_3=i_3}^{i_3+1}(z-z_{j_3}),(x,y,z)\in\Pi_i.$$

Если $f(x,y,z)\in L_q^{2,2,2}(\Omega)$, то

$$|f(x,y,z)-E_\Omega f(x,y,z)|\leq|Q(x,y,z)|,\ (x,y,z)\in\Omega,$$

$$Q(x,y,z)=Q_i(x,y,z),\ (x,y,z)\in\Pi_i.$$

Оценка является наилучшей в каждой точке Ω. Поэтому погрешность приближения функции $f(x,y,z)\in L_q^{2,2,2}(\Omega)$ оператором $E_\Omega f(x,y,z)$ в каждой точке оценивается в зависимости от значения функции $Q(x,y,z)=$ $=Q_i(x,y,z), (x,y,z)\in\Pi_i$.

Кубатурная формула приближенного вычисления интегралов. Пусть $f(x,y,z)\in L_q^{2,2,2}(\Omega)$, $1\le q\le\infty$, и следы $f(x_{i_1},y,z)$, $f(x,y_{i_2},z)$, $f(x,y,z_{i_3})$, $i_1,i_2,i_3=\overline{1,\ell}$, заданы не более, чем на $N=3\ell$ $(N_1=N_2=N_3=\ell)$ плоскостях. Для вычисления интеграла $I(f,\omega)$ предлагается формула

$$\Phi(f,\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 E_\Omega f(x,y,z)\sin\omega x\sin\omega y\sin\omega z\,dxdydz,$$

подставляя в которую выражение для оператора-интерлинанта, получаем

$$\Phi(f,\omega)=\sum_{i_1=1}^{\ell-1}\sum_{i_2=1}^{\ell-1}\sum_{i_3=1}^{\ell-1}\Bigg[\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\int_0^1 h_{j_1}(x)\sin\omega x\,dx\int_0^1\int_0^1 f(x_{j_1},y,z)\sin\omega y\sin\omega z\,dydz+$$

$$+\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\int_0^1 h_{j_2}(y)\sin\omega y\,dy\int_0^1\int_0^1 f(x,y_{j_2},z)\sin\omega x\sin\omega z\,dxdz+$$

$$+\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\int_0^1 h_{j_3}(z)\sin\omega z\,dz\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z_{j_3})\sin\omega x\sin\omega y\,dxdy-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\int_0^1 h_{j_1}(x)\sin\omega x\,dx\int_0^1 h_{j_2}(y)\sin\omega y\,dy\int_0^1 f(x_{j_1},y_{j_2},z)\sin\omega z\,dz-$$

$$-\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\int_0^1 h_{j_1}(x)\sin\omega x\,dx\int_0^1 h_{j_3}(z)\sin\omega z\,dz\int_0^1 f(x_{j_1},y,z_{j_3})\sin\omega y\,dy-$$

$$-\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1}\int_0^1 h_{j_2}(x)\sin\omega y\,dy\int_0^1 h_{j_3}(z)\sin\omega z\,dz\int_0^1 f(x,y_{j_2},z_{j_3})\sin\omega x\,dx+$$

$$+\sum_{j_1=i_1}^{i_1+1}\sum_{j_2=i_2}^{i_2+1}\sum_{j_3=i_3}^{i_3+1} f(x_{j_1},y_{j_2},z_{j_3})\int_0^1 h_{j_1}(x)\sin\omega x\,dx\int_0^1 h_{j_2}(x)\sin\omega y\,dy\int_0^1 h_{j_3}(z)\sin\omega z\,dz.$$

Будем считать, что все интегралы в кубатурной формуле $\Phi(f,\omega)$ заданы или точно вычислены.

Теорема 3. Кубатурная формула $\Phi(f,\omega)$ для вычисления интеграла $I(f,\omega)$ является оптимальной по порядку точности при $\ell\ge|\omega|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем оценку снизу и сверху величины $R(F, \omega, \ell_N) = R(L_q^{2,2,2}(\Omega), \omega, \Phi(f, \omega))$ и оценку сверху для $|I(f, \omega) - \Phi(f, \omega)|$:

$$|I(f, \omega) - \Phi(f, \omega)| =$$

$$= \left| \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y, y) - E_\Omega f(x, y, y)) \sin \omega x \sin \omega y \sin \omega z dxdydz \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i_1=1}^{\ell-1} \sum_{i_2=1}^{\ell-1} \sum_{i_3=1}^{\ell-1} \int_{x_{i_1}}^{x_{i_1+1}} \int_{y_{i_2}}^{y_{i_2+1}} \int_{z_{i_3}}^{z_{i_3+1}} |f(x, y, z) - E_\Omega f(x, y, z)| \, dxdydz \leq$$

$$\leq \frac{1}{8} \sum_{j_1=1}^{\ell-1} \sum_{j_2=1}^{\ell-1} \sum_{j_3=1}^{\ell-1} \int_{x_{i_1}}^{x_{i_1+1}} \left| \prod_{j_1=i_1}^{i_1+1} (x - x_{j_1}) \right| \int_{y_{i_2}}^{y_{i_2+1}} \left| \prod_{j_2=i_2}^{i_2+1} (y - y_{j_2}) \right| \int_{z_{i_3}}^{z_{i_3+1}} \left| \prod_{j_3=i_3}^{i_3+1} (z - z_{j_3}) \right| dxdydz =$$

$$= \frac{1}{8 \cdot 6^3} \sum_{j_1=1}^{\ell-1} \sum_{j_2=1}^{\ell-1} \sum_{j_3=1}^{\ell-1} \Delta^3 \Delta^3 \Delta^3 = \frac{1}{1728} \Delta^6 = \frac{1}{1728 \ell^6}, \;\; \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

Оценка $|I(f, \omega) - \Phi(f, \omega)|$ справедлива для всех функций из класса $L_q^{2,2,2}(\Omega)$, поэтому

$$R(L_q^{2,2,2}(\Omega), \omega, \Phi(f, \omega)) \leq \frac{1}{1728 \ell^6}.$$

Согласно теореме 1 при $r = 2$ находим следующую оценку снизу:

$$R(L_q^{2,2,2}(\Omega), \omega, \Phi(f, \omega)) \geq \frac{1}{[5!]^3 6^9} \frac{1}{\ell^6}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\frac{1}{[5!]^3 6^9 \ell^6} \leq R(L_q^{2,2,2}(\Omega), \omega, \Phi(f, \omega)) \leq \frac{1}{12^3 \ell^6},$$

которое является доказательством того, что кубатурная формула $\Phi(f, \omega)$ оптимальна по порядку точности при $\ell \geq |\omega|$.

Численный эксперимент. Рассмотрим функцию

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2^6} \cos(2x + 2y + 2z).$$

Найдем приближенные значения интегралов по формуле $\Phi(f, \omega)$ в случае,

ω	ℓ	ε_1	ε	ε_2
2π	5	$1{,}8\cdot10^{-17}$	$1{,}04\cdot10^{-11}$	$3{,}7\cdot10^{-8}$
	10	$5{,}7\cdot10^{-19}$	$2{,}4\cdot10^{-13}$	$5{,}7\cdot10^{-10}$
4π	10	$5{,}7\cdot10^{-19}$	$1{,}54\cdot10^{-14}$	$5{,}7\cdot10^{-10}$
	17	$4{,}0\cdot10^{-20}$	$9{,}2\cdot10^{-16}$	$2{,}3\cdot10^{-11}$
6π	10	$5{,}7\cdot10^{-19}$	$1{,}55\cdot10^{-15}$	$5{,}7\cdot10^{-10}$
	20	$1{,}7\cdot10^{-20}$	$8{,}8\cdot10^{-17}$	$9{,}0\cdot10^{-12}$

когда $h_{j_1}(x), h_{j_2}(y), h_{j_3}(z)$ — базисные интерполяционные сплайны степени 0, а координаты $x_{j_1}, y_{j_2}, z_{j_3}$ выбираются, как середины соответствующих ребер параллелепипеда

$$\Pi_i = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \times [y_{i_2}, y_{i_2+1}] \times [z_{i_3}, z_{i_3+1}],$$
$$i = (i_1, i_2, i_3),\ \ i_v = \overline{1, \ell-1},\ \ v = 1, 2, 3.$$

Приведем точные значения интегралов:

$$I_1^3(f, 2\pi) = -5{,}83798430329658\cdot10^{-5},$$
$$I_1^3(f, 4\pi) = -5{,}72023734380512\cdot10^{-6}\ ,$$
$$I_1^3(f, 6\pi) = -1{,}62354228903616\cdot10^{-6}.$$

Следовательно, $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$, где ε — модуль погрешности вычисления интеграла $I_1^3(f, \omega)$ кубатурной формулой $\Phi(f, \omega)$,

$$\varepsilon = \left| I_1^3(f, \omega) - \Phi(f, \omega) \right|;\ \ \varepsilon_1 = \frac{1}{[5!]^3 6^9 \ell^6};\ \ \varepsilon_2 = \frac{1}{12^3 \ell^6}.$$

Данные, преведенные в таблице, подтверждают теоретические результаты.

Выводы

Таким образом, доказана оптимальность по порядку точности предложенных кубатурных формул для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием операторов кусочно-полиномиальной сплайн-интерфлетации на плоскостях ректангуляции для класса функций $L_q^{2,2,2}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$. Получена оценка погрешности приближения. Численный эксперимент подтвердил теоретические результаты.

Следующим этапом исследования является построение оптимальных по порядку точности кубатурных формул вычисления 3D коэффициентов

Фурье с использованием операторов кусочно-полиномиальной сплайн-интерфлетации на плоскостях ректангуляции для класса функций $L_q^{2(n+1),2(n+1),2(n+1)}(\Omega),\ 1 \le q \le \infty$.

Cubature formulas of the calculation of 3D highly oscillatory integrals are investigated by using operators of piece-polynomial spline-interflatation. These formulas are optimal by exactness. The estimations of error of approaching of the cubature formulas are presented on the class of differentiable functions.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. — Харків : Основа, 2002. — 544 с.
2. *Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М. та ін.* Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 1. Алгоритми. — Київ : Наук. думка, 2011. — 447 с.
3. *Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proc. of the IASTED International Conf. on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010). June 15 — 18, 2010. — Novosibirsk. — 2010. — P. 90—96.
4. *Литвин О. М., Удовиченко В. М.* Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є // Радіоелектроніка і інформатика. — 2004. — № 4 (29). — С. 130—133.
5. *Литвин О. М., Удовиченко В. М.* Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій // Вест. Национального технического университета «ХПИ». — Харьков. — 2005. — **38**. — С. 90—130.
6. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* 3D коефіцієнти Фур'є та оператори кусково-сталої сплайн-інтерфлетації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільськ: Кам'янець- Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2011. — Вип. 3. — С. 155 — 161.
7. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Про оцінку знизу для оптимальної похибки чисельного інтегрування на класі диференційованих функцій двох та трьох змінних // Поступ в науку: Зб. наук. праць Бучацького ін-ту менеджменту і аудиту. — Бучач. — 2010. — № 6. — С. 130—133.

Поступила 10.04.12;
после доработки 06.06.12

ЛИТВИН Олег Николаевич, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой высшей и прикладной математики, профессор Украинской инженерно-педагогической академии (г. Харьков). В 1964 г. окончил Бердянский государственный педагогический ин-т. Область научных исследований — вычислительная математика, оптимизация, цифровая обработка многомерных сигналов, математическая теория компьютерной томографии.

НЕЧУЙВИТЕР Олеся Петровна, канд. физ.-мат. наук, докторант Украинской инженерно-педагогической академии. В 1994 г. окончила Харьковский госуниверситет. Область научных исследований — вычислительная математика, оптимизация, цифровая обработка многомерных сигналов.