УДК 536.24

В. И. Гаврыш, канд. физ.-мат. наук
Национальный университет «Львовская политехника»,
(Украина, 79013, Львов, ул. С. Бандеры, 12,
тел. (032) 2582578, e-mail: ikni.pz@gmail.com)

Моделирование температурных режимов в термочувствительных микроэлектронных устройствах со сквозными инородными включениями

Рассмотрена нелинейная граничная осесимметрическая задача теплопроводности для термочувствительного слоя с инородным сквозным цилиндрическим тепловыделяющим включением. С помощью введенной функции проведена частичная линеаризация исходной задачи. С использованием предложенной кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничной поверхности инородного включения задача полностью линеаризована. Построено ее аналитическое решение для определения введенной функции с помощью интегрального преобразования Хенкеля. Приведены расчетные формулы для вычисления температуры и выполнен численный анализ.

Розглянуто нелінійну крайову осесиметричну задачу теплопровідності для термочутливого шару з чужорідним наскрізним циліндричним включенням, що виділяє тепло. За допомогою введеної функції здійснено часткову лінеаризацію вихідної задачі. З використанням запропонованої кусково-лінійної апроксимації температури на межовій поверхні чужорідного включення задачу цілком лінеаризовано. Побудовано її аналітичний розв'язок для знаходження введеної функції за допомогою інтегрального перетворення Хенкеля. Наведено розрахункові формули для обчислення температури та виконано числовий аналіз.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, стационарная осесимметрическая задача, изотропный термочувствительный слой, сквозное инородное включение, идеальный тепловой контакт.

Одним из факторов, вызывающих деформации и напряжения в упругих телах, является неравномерный нагрев. Как правило, элементы тела при повышении температуры расширяются. Если при этом ничто не препятствует расширению, то тело деформируется и никаких напряжений не возникает. Однако если температура в теле возрастает неравномерно, а тело является неоднородным, то расширение не может происходить свободно. В этом случае в теле возникают температурные напряжения. Если не учитывать влияния напряжений и деформаций, обусловленных силовыми факторами, на распределение температуры, что оказывается справедливым для большинства практических задач, то первым шагом при исследовании температурных напряжений является определение температурного поля. Это составляет главную задачу аналитической теории теплопроводности.

Особое значение для производства микроэлектронных устройств имеют композиционные материалы, разработка которых является одной из основных проблем современного материаловедения. Создание новых композиционных материалов с улучшенными физико-механическими свойствами стимулирует разработку новых технологий в различных отраслях народного хозяйства. Среди композиционных материалов важное место занимают структуры с инородными включениями, широко применяемые в конструкциях микроэлектронных устройств, в частности в интегральных сенсорах для мониторинга температуры и влажности, светодиодах, селективных оптических фильтрах.

Поскольку рассматриваемые структуры имеют широкий диапазон температур, их улучшенные эксплуатационные параметры обусловливают необходимость создания нелинейных моделей процесса теплопроводности, так как расчеты температурных полей, выполненных на основе линейных математических моделей, не всегда приводят к удовлетворительным результатам. В связи с этим возникла необходимость построения новых нелинейных математических моделей процесса теплопроводности для термочувствительных тел (теплофизические характеристики материалов которых зависят от температуры) с инородными включениями и разработки эффективных методов решения возникающих при этом нелинейных граничных задач теплопроводности.

В работах [1, 2] приведены некоторые методы решения нелинейных граничных задач теплопроводности для однородных тел, а в [3] рассмотрены нелинейные процессы теплопроводности для решения задачи о напряженном состоянии в неоднородных телах с физической нелинейностью при использовании метода граничных элементов. С помощью вариационных методов построена нелинейная математическая модель нестационарной теплопроводности в двумерной среде с тонким включением. Задача линеаризована методом Ньютона—Рафсона [4]. В работе [5] получено численно-аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полого шара, теплофизические характеристики материала которого изменяются с изменением температуры. В [6] приведено приближенное аналитическое решение нелинейной задачи теплопроводности с использованием метода теплового баланса.

Приближенное решение нестационарной нелинейной задачи теплопроводности в толстостенном теле сложной формы со скосными срезами построено методами конечных элементов и Ньютона—Рафсона [7]. С использованием функции Грина нелинейное одномерное нестационарное

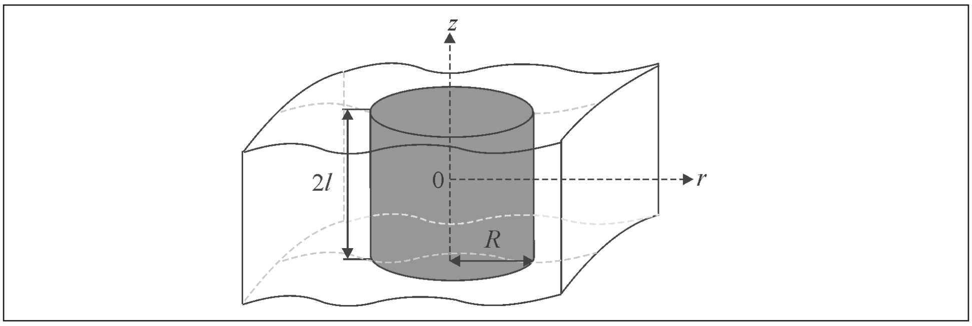

Рис. 1. Изотропный термочувствительный слой с инородным сквозным цилиндрическим тепловыделяющим включением

уравнение теплопроводности сведено к нелинейному интегральному уравнению Вольтеры второго рода, которое решается численными методами [8]. Работы [9—14] посвящены развитию методов решения стационарных линейных и нелинейных задач теплопроводности с теплоотдачей для конструкций двумерной кусочно-однородной структуры. В работах [15, 16] приведены общие уравнения теплопроводности для кусочно-однородных тел.

Построим нелинейную математическую модель стационарного процесса теплопроводности для отдельных узлов микроэлектронных устройств, имеющих термочувствительный изотропный слой со сквозным инородным тепловыделяющим цилиндрическим включением. Проведем линеаризацию рассматриваемой модели и сформулируем методику построения аналитического решения соответствующей нелинейной граничной задачи теплопроводности.

Формулировка задачи. Рассмотрим изотропный (относительно теплофизических характеристик) термочувствительный слой, содержащий сквозное инородное цилиндрическое включение радиуса R, отнесенный к цилиндрической системе координат $Or\varphi z$. В области включения $\Omega_0 = \{(r, \varphi, z): r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, |z| \le l\}$ действуют равномерно распределенные внутренние источники тепла мощностью $q_0 = \text{const}$. На граничной поверхности включения $K_R = \{(R, \varphi, z): 0 \le \varphi \le 2\pi, |z| \le l\}$ осуществляется идеальный тепловой контакт, а на граничных поверхностях слоя $\Gamma_{\pm} = \{(r, \varphi, \pm l): 0 \le r \le \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ заданы граничные условия второго рода (рис. 1).

Математическая модель задачи. Распределение осесимметрического стационарного температурного поля $t(r, z)$ в рассматриваемой системе находим в результате решения нелинейного уравнения теплопроводности [15, 16]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(t, r)\frac{\partial t}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(t, r)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = -q_0 S_{-}(R - r) \qquad (1)$$

с граничними условиями

$$t|_{r\to\infty}=0,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r\to\infty}=0,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{|z|=l}=0\,. \tag{2}$$

Здесь $\lambda(t,r)$ — коэффициент теплопроводности неоднородного термочувствительного слоя, $\lambda(t,r)=\lambda_1(t)+[\lambda_0(t)-\lambda_1(t)]S_-(R-r)$, где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_0(t)$ — коэффициенты теплопроводности материалов слоя и включения; $S_-(\zeta)$ — асимметрическая единичная функция [17],

$$S_-(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta\ge 0,\\ 0, & \zeta<0.\end{cases}$$

Введем функцию

$$\vartheta=\int\limits_0^{t(r,\,z)}\lambda_1(\zeta)\,d\zeta+S_-(R-r)\int\limits_{t(R,\,z)}^{t(r,\,z)}[\lambda_0(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]\,d\zeta. \tag{3}$$

Продифференцировав ее по переменным r и z, получим

$$\lambda(t,r)\frac{\partial t}{\partial r}=\frac{\partial\vartheta}{\partial r},\quad \lambda(t,r)\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\left.\left\{[\lambda_0(t)-\lambda_1(t)]\frac{\partial t}{\partial z}\right\}\right|_{r=R}S_-(R-r). \tag{4}$$

С учетом выражений (4) исходное уравнение (1) примет следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right]+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left.\left\{[\lambda_0(t)-\lambda_1(t)]\frac{\partial t}{\partial z}\right\}\right|_{r=R}S_-(R-r)=-q_0S_-(R-r). \tag{5}$$

Граничные условия с использованием соотношения (3) запишем в виде

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{|z|=l}=0,\quad \vartheta|_{r\to\infty}=0,\quad \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right|_{r\to\infty}=0\,. \tag{6}$$

Таким образом, с помощью функции (3) нелинейная математическая модель (1), (2) процесса теплопроводности приведена к частично линеаризованному уравнению с разрывными коэффициентами (5) и полностью линеаризованным граничным условиям (6).

Аппроксимируем функцию $t(R,z)$ в виде

$$t(R,z)=t_1+\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,S_-(z-z_i)\,, \tag{7}$$

где $z_i\in]-l,l[$; $z_1\le z_2\le\ldots\le z_{n-1}$; $t_i\,(i=\overline{1,n})$ — неизвестные аппроксимирующие значения температуры. Подставив выражение (7) в соотношение (5), получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно введенной функции ϑ:

$$\Delta\vartheta = -\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)[\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})]\delta'_-(z - z_i) + q_0 \right\} S_-(R - r) . \qquad (8)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат,

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ;$$

$\delta_-(\zeta)$ — асимметрическая дельта-функция Дирака [17], $\delta_-(\zeta) = \dfrac{dS_-(\zeta)}{d\zeta}$.

Решение граничной задачи теплопроводности. Применив интегральное преобразование Хенкеля по координате r к уравнению (8) и граничным условиям (6), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами,

$$\frac{d^2\overline{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2\overline{\vartheta} = -\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)[\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})]\delta'_-(z - z_i) + q_0 \right\} \frac{R J_1(R\xi)}{\xi} , \qquad (9)$$

и граничным условием

$$\left. \frac{d\overline{\vartheta}}{dz} \right|_{|z|=l} = 0, \qquad (10)$$

где $\overline{\vartheta} = \int\limits_0^\infty r J_0(r\xi)\vartheta dr$ — трансформанта функции ϑ; ξ — параметр интегрального преобразования Хенкеля; $J_v(\zeta)$ — функция Бесселя первого рода порядка v.

Общее решение уравнения (9) находим методом вариации постоянных в следующем виде:

$$\overline{\vartheta} = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} -$$
$$- \frac{R}{\xi} J_1(R\xi) \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)[\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})]\, ch\xi(z - z_i)\, S_-(z - z_i) - \frac{q_0}{\xi^2} \right\} ,$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования. Использовав граничное условие (10), получим частное решение задачи (9), (10):

$$\overline{\vartheta} = \frac{R}{\xi} J_1(R\xi) \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)[\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})] \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{ch\xi(z + l)}{sh 2\xi l} sh\xi(l - z_i) - ch\xi(z - z_i)\, S_-(z - z_i) \right] + \frac{q_0}{\xi^2} \right\}. \qquad (11)$$

Применив обратное интегральное преобразование Хенкеля к соотношению (11), найдем выражение для функции ϑ:

$$\vartheta = R\int_0^\infty J_0(r\xi)\,J_1(R\xi)\left\{\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)[\lambda_0(t_{i+1})-\lambda_1(t_{i+1})]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{ch\xi\,(z+l)}{sh2\xi l}\,sh\xi\,(l-z_i)-ch\xi\,(z-z_i)\,S_-(z-z_i)\right]+\frac{q_0}{\xi^2}\right\}d\xi\,. \qquad (12)$$

Подставив конкретные зависимости коэффициента теплопроводности от температуры для материалов слоя и включения в соотношения (3), (12), после некоторых преобразований получим систему нелинейных уравнений для определения неизвестных аппроксимирующих значений температуры t_i $(i=\overline{1,n})$. Искомое температурное поле для рассматриваемой системы определяем с помощью полученного нелинейного уравнения после подстановки в (3), (12) конкретных выражений зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры для материалов слоя и включения.

Пример и анализ численных результатов. Рассмотрим зависимость коэффициента теплопроводности от температуры [18, 19],

$$\lambda(t)=\lambda^0(1-kt)\,, \qquad (13)$$

используемую для решения многих практических задач. Здесь λ^0 и k — опорный и температурный коэффициенты теплопроводности. Из выражений (3), (12) получим формулы для определения температуры t в области включения Ω_0,

$$t=\frac{1-\sqrt{1-k_0\left(\dfrac{2\vartheta}{\lambda_0^0}+\vartheta_1\right)}}{k_0}\,, \qquad (14)$$

и в области слоя вне включения $\Omega_1=\{(r,\varphi,z): r>R, 0\le\varphi\le 2\pi, |z|\le l\}$,

$$t=\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{2k_1\vartheta}{\lambda_1^0}}}{k_1}\,, \qquad (15)$$

где

$$\vartheta_1=\left\{t\left[2-k_0t-\frac{\lambda_1^0}{\lambda_0^0}(2-k_1t)\right]\right\}\Bigg|_{r=R}; \quad t\big|_{r=R}=\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{2k_1}{\lambda_1^0}\vartheta\Big|_{r=R}}}{k_1}\,.$$

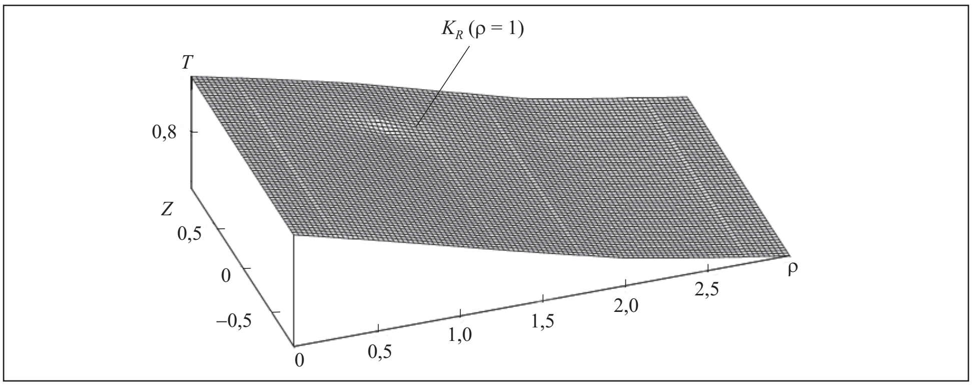

Рис. 2. График зависимости безразмерной температуры T от безразмерных координат ρ и Z

Формулы (13), (14) полностью описывают распределение температурного поля в термочувствительном слое с инородным сквозным тепловыделяющим включением цилиндрической формы.

Численный анализ безразмерной температуры $T = k_1 t$ в области включения Ω_0 выполнен по формуле

$$T = \frac{k_1}{k_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{k_0}{k_1}(2KiK_\lambda^{-1}\vartheta^* + \vartheta_1^*)}\right), \tag{16}$$

а в области Ω_1 вне включения — по формуле

$$T = 1 - \sqrt{1 - 2Ki\vartheta^*}. \tag{17}$$

Здесь $Ki = q_0 R^2 (k_1 / \lambda_1^0)$ — критерий Кирпичева; $K_\lambda = \lambda_0^0 / \lambda_1^0$ — критерий, характеризующий относительную теплопроводность включения и слоя;

$$\vartheta_1^* = k_1 \vartheta_1 = \left\{ T\left[2(1 - K_\lambda^{-1}) + \left(K_\lambda^{-1} - \frac{k_0}{k_1} \right) T \right] \right\}\Bigg|_{\rho=1};$$

$$\vartheta^* = \frac{\vartheta}{q_0 R^2} = \int_0^\infty J_0(\rho\xi') J_1(\xi') \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} Ki^{-1}(T_{i+1} - T_i) \left[K_\lambda \left(1 - \frac{k_0}{k_1} T_{i+1} \right) - 1 + T_{i+1} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{ch\xi'(Z+L)}{sh2\xi' L} sh\xi'(L - Z_i) - ch\xi'(Z - Z_i) S_-(Z - Z_i)) + \frac{1}{\xi'^2} \right] \right\} d\xi',$$

где $\xi' = R\xi$; $Ki = 0{,}27$; $k_0 = -3{,}96 \cdot 10^{-4}$; $k_1 = -4 \cdot 10^{-5}$.

График зависимости температуры T от безразмерных радиальной $\rho = r / R$ и аксиальной $Z = z / R$ координат представлен на рис. 2, из которого видно, что максимальных значений температура T достигает в области действия равномерно распределенных по объему цилиндрического сквозного инородного включения внутренних источников тепла, а на граничной поверхности K_R $(\rho = 1)$ включения выполняются условия идеального теплового контакта (отсутствует скачок температуры), что соответствует рассматриваемой математической модели.

Выводы

С помощью введенной функции ϑ (3) частично линеаризовано исходное нелинейное уравнение теплопроводности (1) и полностью линеаризованы граничные условия (2). Предложенная кусочно-линейная аппроксимация температуры выражением (7) на граничной поверхности K_R инородного включения позволила полностью линеаризовать уравнение (5), после чего стало возможным, применив интегральное преобразование Хенкеля к полученной граничной линейной задаче относительно функции ϑ, построить ее аналитическое решение.

The nonlinear boundary axially symmetric problem of heat conduction for the heat-sensitive layer with through foreign cylindrical inclusion that generates heat, has been considered. With the help of the introduced function the partial linearization of the original problem has been carried out. Using the proposed piecewise-linear approximation of temperature on the boundary surface of the foreign inclusion the problem has been completely linearized. The analytical solution of this problem for finding the introduced function using Hankel integral transformation has been formed. The formulas for calculating the desired temperature have been shown and numerical analysis performed.

1. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М. : Наука, 1975. — 229 с.
2. *Беляев Н. В., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности. Ч. II. — М. : Высш. шк., 1982. — 304 с.
3. *Григоренко Я. М., Грицько Е. Г., Журавчак Л. М.* Решение задач о напряженном состоянии неоднородных тел с учетом физической нелинейности на основе метода граничных элементов // Прикл. механика. — 1995. — **31**, № 11. — С. 10 — 17.
4. *Савула Я. Г., Дяконюк Л. М.* Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. — 2000. — Вип. 3. — С. 125—130.
5. *Попович В. С., Іванків К. С.* Нелінійна задача теплопровідності для кулі з теплообміном // Там же. — 2002. — № 5. — С. 136—144.
6. *Kudinov V. A., Averin B. V., Stefanyuk E. V., Nazarenko S. A.* Analysis of Nonlinear Heat Conduction Based on Determining the Front of Temperature Perturbation // High Temperature . — 2006. — **44**, № 4. — P. 574—583.

7. *Неспляк Д. М., Муха І. С.* Дослідження процесів нелінійної теплопровідності у товстостінних складених тілах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007.— **50**, №2. — С. 176—182.
8. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журнал. — 2008. — **81**, № 6. — С. 1058—1062.
9. *Барвінський А. Ф., Гавриш В. І.* Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла // Проблемы машиностроения. — 2009. — **12**, № 1. — С. 47—53.
10. *Гавриш В. І., Федасюк Д. В.* Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням // Промышленная теплотехника. — 2010. — **32**, № 5. — С. 18—25.
11. *Гавриш В. І., Федасюк Д. В., Косач А. І.* Гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним циліндричним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2010. — **46**, № 5. — С. 115—120.
12. *Gavrysh V. I., Fedasyuk D. V.* Thermal Simulation of Heterogeneous Structural Components in Microelectronic Devices // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. — 2010. — **13**, № 4. — P. 439—443.
13. *Гаврыш В. И., Косач А. И.* Моделирование температурних режимов в элементах микроэлектронных устройств // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. — 2011. — № 1—2 (90). — С. 27—30.
14. *Гаврыш В. И., Косач А. И.* Моделирование температурных режимов в электронных устройствах кусочно-однородной структуры // Электрон. моделирование. — 2011. — **33**, № 4. — С. 99—113.
15. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
16. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев : Наук. думка, 1992. — 280 с.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М. : Наука, 1977. — 720 с.
18. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 376 с.
19. *Берман Р.* Теплопроводность твердых тел. — М. : Мир, 1979 . — 288 с.

Поступила 18.01.12;
после доработки 06.03.12

ГАВРЫШ Василий Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, докторант Национального университета «Львовская политехника». В 1982 г. окончил Львовский госуниверситет. Область научных исследований — моделирование процессов теплопроводности в телах кусочно-однородной структуры и разработка методов решения линейных и нелинейных граничных задач теплопроводности.