ТОЧНОСТЬ, НАДЕЖНОСТЬ, ДИАГНОСТИКА

УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. (057) 7073737, e-mail: amakarichev@mail.ru)

Надежность комплексов сложных восстанавливаемых систем с временным резервом

Найдено асимптотическое распределение времени безотказной работы комплексов сложных восстанавливаемых систем с временным резервом, марковским потоком отказов элементов и индивидуальной функцией распределения времени обслуживания элементов сложных систем, число которых увеличивается обратно пропорционально интенсивности их отказов так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания ограничена сверху величиной, меньшей единицы, с дисциплиной обслуживания требований в порядке их возникновения.

Знайдено асимптотичний розподіл часу справності комплексів складних відновлювальних систем з резервом часу, марківським потоком відмовлень елементів та індивідуальною функцією розподілу часу, обслуговування елементів складних систем, число яких зростає зворотньо пропорційно інтенсивності їхніх відмовлень так, що сумарне навантаження на систему обслуговування елементів у порядку надходження від них потреб обмежене зверху величиною, меншою за одиницю.

Ключевые слова: комплексы сложных восстанавливаемых систем с временным резервом.

Рассмотрим комплекс N, в котором работают N однотипных сложных восстанавливаемых систем, состоящих из n элементов. Каждый элемент с течением времени может отказать. В момент его отказа в одной из сложных систем возникает требование на обслуживание, которое немедленно поступает в ремонтный орган (РО), представляющий собой пару $P=(C, d)$, где C — структура, d — дисциплина обслуживания. Ремонтный орган осуществляет восстановление элемента (ремонт или замену новым, идентичным исходному). Восстановленный элемент занимает свое место в сложной системе, в которой произошел отказ, а требование на обслуживание немедленно покидает РО.

Процесс обслуживания неисправных элементов комплекса N в момент времени t j-й сложной системы опишем следующими формулами:

$$x(t)=(x^1(t), x^2(t), ..., x^N(t)), \quad x^j(t)=(x_1^j(t), ..., x_n^j(t)),$$

где $x_i^{j-}(t)+x_i^{j+}(t)=x_i^j$ — длина требования, т.е. время его обслуживания со скоростью, равной единице; $x_i^{j-}(t)$ и $x_i^{j+}(t)$ — выработанная и остаточная длины требований на обслуживание i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1, 2, ..., n$, $j=1, 2, ..., N$; $x_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы исправен; $x_i^j(t)=(x_i^{j-}(t), x_i^{j+}(t))$, если этот элемент неисправен.

Состояние комплекса в момент времени t описывает совокупность $v(t)=(e^1(t), e^2(t), ..., e^N(t))$ из N двоичных векторов, каждый из которых определяет состояние соответствующей сложной системы комплекса:

$$e^j(t)=(e_1^j(t), e_2^j(t), ..., e_n^j(t)), \quad j=1, 2, ..., N.$$

Здесь $e_i^j(t)=0$, если в момент времени t i-й элемент j-й сложной системы комплекса находится в исправном состоянии; $e_i^j(t)=1$, если в момент времени t он находится в неисправном состоянии, $i=1, 2, ..., n$, $j=1, 2, ..., N$.

Предположим, что поток отказов элементов, возникающий в каждой сложной системе, является марковским, т.е. удовлетворяет двум условиям.

1. Если в произвольный момент времени t j-я сложная система находится в состоянии e^j, то вероятность отказа на промежутке времени $(t, t+h]$ исправного i-го элемента j-й сложной системы комплекса при $h\to 0$ составляет $\lambda_i(e^j)\,N^{-1}h+o(h)$.

2. В каком бы из состояний $e^j(t)$ ни находилась j-я сложная система комплекса в произвольный момент времени t, вероятность отказа двух и более элементов этой системы на промежутке времени $(t, t+h]$ равна $o(h)$ при $h\to 0$.

Если состояния двух различных k-й и l-й сложных систем совпадают, т.е. $e^k=e^l$, то интенсивности отказов соответствующих элементов в этих системах одинаковы: для любого i при всех $1\le k<l\le N$ $\lambda_i(e^k)\,N^{-1}=\lambda_i(e^l)\,N^{-1}$.

Пусть $\lambda N^{-1}=\max\limits_{e^j}\lambda(e^j)\,N^{-1}$, где $\lambda(e^j)\,N^{-1}$ — суммарная интенсивность (интенсивность отказа хотя бы одного из исправных элементов j-й сложной системы комплекса, находящейся в состоянии e^j),

$$\lambda(e^j)\,N^{-1}=\sum_{i:e_i^j=0}\lambda_i(e^j)\,N^{-1}, \quad j=1, 2, ..., N.$$

Длины требований (различных элементов или различных отказов одного и того же элемента) есть независимые положительные случайные величины.

Обозначим $G_i(x)$ функцию распределения длины требования по обслуживанию i-го элемента j-й сложной системы комплекса, $i=1, 2, ..., n$, $j=1,2,...,N$. Ее n-й момент обозначим $m_n^{(i)}=\int\limits_{x>0}x^n\,dG_i(x)$.

Пусть $G_0(x)$ — функция распределения длины первого возникшего в j-й сложной системе требования на периоде регенерации,

$$G_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(0)}{\lambda(0)} G_i(x),$$

$m_n^{(0)}$ — ее n-й момент, $m_n^{(0)} = \int\limits_{x>0} x^n \, dG_0(x)$, ρ_0 — начальная нагрузка на РО требований на обслуживание элементов сложных систем комплекса N,

$$\rho_0 = \lambda\,(0)\, m_1^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(0)\, m_1^{(0)}.$$

Обозначим функцию распределения случайной величины, мажорирующей по вероятности все длины требований из j-й сложной системы, $G(x) = \min\limits_{i=1,\,...,\,n} G_i(x)$, а ее n-й момент — $m_n = \int\limits_{x>0} x^n \, dG(x)$ и $\rho = \lambda m_1$, $j = 1, 2, ..., N$.

Отказы элементов некоторой сложной системы на периоде регенерации комплекса могут привести всю сложную систему к отказу. Множество $E^j = \{e^j\}$ возможных состояний j-й сложной системы делится на два непустые непересекающиеся подмножества исправных E_+^j и неисправных E_-^j состояний j-й сложной системы комплекса, $j = 1, 2, ..., N$. Предположим также, что $E_+^1 = E_+^2 = ... = E_+^N$.

Пусть $\left\| e^j \right\| = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^j$ — число неисправных элементов в j-й сложной системе и $\min\limits_{e \in E_-} \left\| e^j \right\| = s > 1$, $j = 1, 2, ..., N$. Если число неисправных элементов в комплексе не превосходит $s - 1$, то эта система исправна. Отказ комплекса наступает, если в течение случайного времени ξ в комплексе окажутся неисправными k сложных систем. Множество $E = \{v\}$ всевозможных состояний комплекса состоит из двух непустых непересекающихся подмножеств исправных E_+ и возможных неисправных E_- состояний комплекса: $v(t) \in E_+$, если в момент времени t все сложные системы исправны, и $v(t) \in E_-$, если хотя бы одна сложная система комплекса неисправна.

Пусть $H(u) = P(\xi \le u)$ и τ — время до первого отказа комплекса при условии, что в момент времени $t = 0$ все элементы всех сложных систем комплекса исправны (индекс N для простоты обозначений здесь и в дальнейшем опускаем),

$$\tau = \inf\{t : v(x) \in E_-,\ x \in [t, t+\xi] \mid v(0) = (0, ..., 0) = 0\} + \xi.$$

Отказавшие элементы обслуживаются в РО в порядке поступления (дисциплина d_1).

Последовательность проходимых случайным процессом $v(t)$ состояний комплекса от начала периода регенерации до момента его первого отказа на этом периоде образует путь $\pi=\{v_1, v_2, ..., v_r\}$, $v_l \in E_+$ при $l<r$ и $v_r \in E_-$.

Путь π назовем l_1, l_2, ..., l_k-слабомонотонным минимальным, если первый отказ комплекса на периоде регенерации наступил в результате отказа l_1, l_2, ..., l_k-й сложных систем и в момент отказа в каждой из этих k сложных систем были неисправны ровно s элементов и больше отказов элементов до этого момента в этих сложных системах не было. Множество таких путей обозначим $\Pi_{\text{с}}^{l_1 l_2 ... l_k}$.

Путь π назовем k-слабомонотонным минимальным, если для некоторых $l_1, l_2, ..., l_k$ этот путь является $l_1, l_2, ..., l_k$-слабомонотонным минимальным. Класс k-слабомонотонных минимальных путей обозначим $\Pi_{\text{с}}(k)$.

Пусть π есть 1, 2, ..., k-слабомонотонный минимальный путь. Рассмотрим как изменяется состояние i-й сложной системы на этом пути, $i=1, 2, ..., k$.

Пусть $0, e_1^i, e_2^i, ..., e_s^i$ — последовательность состояний i-й системы до момента ее отказа. Эта последовательность образует монотонный минимальный путь π_i, по которому i-я сложная система из состояния $\{0\}$ приходит к отказу и $\lambda(\pi_i)=\lambda_{i_1}(0)\lambda_{i_2}(e_1^i)...\lambda_{i_s}(e_{s-1}^i)>0$, $i=1, ..., k$, где $i_1, i_2, ..., i_s$ — номера последовательно отказавших элементов i-й сложной системы на пути π_i. Множество монотонных минимальных путей, на которых i-я сложная система может отказать, обозначим Π_0^i.

Пусть $B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}, \xi)=P\{\varsigma>x_1, v^{j_1}(x_1)>x_{sk}-x_1+\xi\}$ — условная вероятность того, что период регенерации не закончится к моменту x_1 и отказавший в момент x_1 элемент j_1 не будет восстановлен до момента времени $x_{sk}+\xi$ при условии, что этот период регенерации начался в момент $x=0$ и в моменты $x_1, x_2, ..., x_{sk}$ $(0<x_1<x_2<...<x_{sk})$ последовательно отказали элементы $j_1, j_2, ..., j_{sk}$ из первых k сложных систем и больше отказов элементов из первых k сложных систем на отрезке времени $[0, x_{sk}]$ не было. Здесь $v^{j_1}(x_1)$ — время пребывания в РО элемента j_1, отказавшего в момент времени x_1 от начала периода регенерации, при дисциплине обслуживания со скоростью единица требований в порядке поступления. Эта вероятность не зависит от номеров элементов, отказавших после момента времени x_1.

Обозначим $q_{\text{с}}^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k)$ вероятность того, что отказ комплекса на периоде регенерации произойдет по таким 1, 2, ..., k-слабомонотонным минимальным путям, что отказ i-й сложной системы произойдет по монотонному минимальному пути π_i, $i=1,2,...,k$. Перестановка $j_1, j_2, ..., j_{sk}$ определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем. Пусть e' получается из вектора e выделением первых k компонент, т.е. e' определяет состояние первых k сложных систем. Набор $j_1, j_2, ..., j_{sk}$ определяет последовательность состояний $0', e'_1, e'_2, ..., e'_{sk}$, которые проходит подкомплекс из первых k сложных систем до отказа всего комплекса по $i=1, 2, ..., k$-слабомонотонному минимальному пути. Пусть $\lambda(e')N^{-1}$ — суммарная интенсивность отказов элементов из первых k сложных систем, находящихся в состоянии e',

$$\lambda(e')N^{-1}=\sum_{r=1}^{k}\lambda(e^r)N^{-1},$$

и $\Delta=\{(x_1, ..., x_{sk}):0<x_1<x_2<...<x_{sk}\}$. Пусть

$$J_N(j_1,...,j_{sk})=E\int\limits_{\Delta}\int \exp(-aN^{-1})B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1,x_2,...,x_{sk},\xi)dx_1 ... dx_{sk},$$

где $a=\lambda(0')x_1+\lambda(e'_1)(x_2-x_1)+...+\lambda(e'_{sk-1})(x_{sk}-x_{sk-1})$.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$q_{\text{с}}^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(\pi_1,\pi_2,...,\pi_k)=\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}J_N(j_1,...,j_{sk}).$$

Доказательство. Согласно введенным обозначениям по формуле полной вероятности

$$q_{\text{с}}^{j_1 ... j_{sk}}(\pi_1,...,\pi_k)=$$

$$=E\int\limits_{\Delta}...\int\lambda_{j_1}(0')N^{-1}\exp[-\lambda(0')N^{-1}x_1]\lambda_{j_2}(e'_1)N^{-1}\exp[-\lambda(e'_1)N^{-1}(x_2-x_1)]...$$

$$...\lambda_{j_{sk}}(e'_{sk-1})N^{-1}\exp[-\lambda(e'_{sk-1})N^{-1}(x_{sk}-x_{sk-1})]\times$$

$$\times B^{j_1 ... j_{sk}}(x_1,...,x_{sk},\xi)\,dx_1dx_2 ... dx_{sk}=\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}J_N(j_1,...,j_{sk}),$$

что и требовалось. Лемма 1 доказана.

Пусть $B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1,x_2,...,x_{sk})=P\{\varsigma>x_1, \nu^{j_1}(x_1)>x_{sk}-x_1\}$ — условная вероятность того, что к моменту времени x_1 не закончится период регенерации, отказавший в момент времени x_1 элемент j_1 не завершит свое обслуживание к моменту времени x_{sk} при условии, что период регенерации начался в момент времени $x=0$ и в моменты $x_1, x_2, ..., x_{sk}$ $(0< x_1 < x_2 < ...$ $...< x_{sk})$ последовательно отказали элементы $j_1, j_2, ..., j_{sk}$ из первых k сложных систем.

Пусть $B_\lambda(x_1, x_{sk}) = P\{\varsigma_\lambda > x_1, v_\lambda(x_1) > x_{sk} - x_1\}$ — условная вероятность того, что в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ период регенерации не закончится до момента времени x_1 и возникшее в момент времени x_1 требование не завершит свое обслуживание в РО к моменту времени x_{sk} при условии, что этот период регенерации начался в момент времени $x=0$ и в момент времени x_1 возникло требование в РО комплекса. Здесь $(v(x_1)$ — время пребывания в РО возникшего требования в момент времени x_1 от начала периода регенерации.

Лемма 2. Верно неравенство

$$B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}, \xi) \le B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, имеет место импликация

$$\{\varsigma > x_1, v^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi\} \subset \{\varsigma > x_1, v^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1\},$$

из которой следует первое из двух неравенств в утверждении леммы в силу положительности случайной величины ξ.

Пусть $\lambda_- = \lambda(1 - kN^{-1})$ и $\varsigma_{\lambda_-}(\omega)$ длина периода регенерации в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda_-,G}$; $s_{\lambda_-}[x_1](\omega)$ — суммарная остаточная длина дообслуживания всех требований в РО комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda_-,G}$ в момент времени x_1. Тогда из теоремы 1 [1] и следствия 1 [1] следуют импликации

$$\{\varsigma(\omega) > x_1, s^{j_1}[x_1, d_1](\omega) > x_{sk} - x_1\} \subset \{\varsigma_{\lambda_-}(\omega) > x_1, s_{\lambda_-}[x_l](\omega) > x_{sk} - x_1\} \subset$$

$$\subset \{\varsigma_\lambda(\omega) > x_1, s_\lambda[x_1](\omega) > x_{sk} - x_1\}. \quad (1)$$

При дисциплине d_1 справедливы равенства

$$s^{j_1}[x_1, d_1] = v^{j_1}(x_1),\ s_\lambda[x_1] = v_\lambda(x_1). \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$P\{\varsigma > x_1, v^{j_1}(x_1) > x_{sk} - x_1\} \le P\{\varsigma_\lambda > x_1, v_\lambda(x_1) > x_{sk} - x_1\}.$$

Отсюда согласно принятым обозначениям $B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}) \le B_\lambda(x_1, x_{sk})$, откуда в силу транзитивности отношения порядка действительных чисел следует

$$B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}, \xi) \le B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1, x_2, ..., x_{sk}) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}).$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим T_λ математическое ожидание длины периода регенерации комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$,

$$T_\lambda = \frac{1}{\lambda(0)} + \frac{m_1}{(1-\rho)}.$$

Стационарное время пребывания требования в РО этого комплекса при дисциплине обслуживания d_1 обозначим v_λ.

Лемма 3. Пусть $\rho<1$ и $m_{sk}<\infty$. Тогда

$$\int\limits_{0<x_1<x_2<\ldots<x_{sk}} \ldots \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{sk} = \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом кратном интеграле выполним замену переменных: $t_1 = x_{ks} - x_1$, $t_2 = x_{ks-1} - x_1$, ..., $t_{ks-1} = x_2 - x_1$, $t = x_1$. После этой замены запишем искомый интеграл:

$$\int\limits_{t_1>t_2>\ldots>t_{sk-1}>0} \ldots \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt dt_1 \ldots dt_{sk-1} =$$

$$= \int\limits_{t_1>\ldots>t_{sk-1}>0} \ldots \int dt_1 \ldots dt_{sk-1} \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt.$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [2, 3] следует:

$$\int\limits_{t>0} P\{\varsigma_\lambda > t, v_\lambda(t) > t_1\}\, dt = P\{v_\lambda > t_1\} T_\lambda .$$

С учетом двух последних равенств и принятых обозначений искомый интеграл имеет вид

$$\int\limits_{t_1>t_2>\ldots>t_{sk-1}} \ldots \int P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 \ldots dt_{sk-1} T_\lambda =$$

$$= \int\limits_{t_1>0} \frac{[t_1]^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_\lambda > t_1\}\, dt_1 T_\lambda = \frac{E[v_\lambda]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_\lambda < \infty,$$

так как существует конечный момент $m_{sk}<\infty$ и $\rho<1$. Лемма 3 доказана.

Обозначим $\Delta(z) = \{(x_1, \ldots, x_{sk}) : 0 < x_1 < \ldots < x_{sk} < z\}$ и

$$|\Delta(z)| = \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int dx_1 \ldots dx_{sk} = \frac{z^{sk}}{(sk)!} .$$

Лемма 4. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$\left| J_N(j_1,...,j_{sk}) - E\int_{\Delta}...\int B^{j_1\, j_2 ... j_{sk}}(x_1,x_2,...,x_{sk},\xi)\,dx_1 dx_2\,...\,dx_{sk} \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon>0$ и зафиксируем. Из леммы 3 следует, что для выбранного $\varepsilon>0$ существует $z=z(\varepsilon)$ такое, что для любого $z\ge z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta\setminus\Delta(z)}...\int B_{\lambda}(x_1,x_{sk})\,dx_1 dx_2\,...\,dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Из неравенства $1-\exp(-aN^{-1})<1$ и леммы 2 следуют неравенства

$$[1-\exp(-aN^{-1})]\,B^{j_1 j_2 ... j_{sk}}(x_1,x_2,...,x_{sk},\xi)<$$

$$<B^{j_1\, j_2 ... j_{sk}}(x_1,x_2,...,x_{sk})\le B_{\lambda}(x_1,x_{sk}). \qquad (4)$$

Из (3), (4) и монотонности интеграла следует неравенство

$$\int_{\Delta\setminus\Delta(z)}...\int [1-\exp(-aN^{-1})]\,B^{j_1 ... j_{sk}}(x_1,...,x_{sk},\xi)\,dx_1\,...\,dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

По определению $a\le\lambda x_{sk}<\lambda z$. Для выбранного $z\ge z(\varepsilon)$ существует такое $N=N(z(\varepsilon))$, что для любого $N>N(z(\varepsilon))$

$$0\le 1-\exp(-aN^{-1})<\exp(-\lambda zN^{-1})<\frac{\varepsilon}{2|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и из неравенства $0\le B^{j_1 ... j_{sk}}(x_1,...,x_{sk})\le 1$ следует, что для любого $N>N(z(\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\int_{\Delta(z)}...\int [1-\exp(-aN^{-1})]\,B^{j_1 ... j_{sk}}(x_1,...,x_{sk},\xi)\,dx_1\,...\,dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что для всех $N>N(z(\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\int_{\Delta}...\int [1-\exp(-aN^{-1})]\,B^{j_1 ... j_{sk}}(x_1,...,x_{sk},\xi)\,dx_1\,...\,dx_{sk}<\varepsilon.$$

Лемма 4 доказана.

Пусть $\lambda_-=\lambda(1-k/N)$, $\lambda(0)_-=\lambda(0)(1-k/N)$, $B_0^{j_1 -}(x_1,x_{sk},\xi)=P\{\varsigma_0^->x_1, v_0^{j-}(x_1)>x_{sk}-x_1+\xi\}$ и $B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)=P\{\varsigma_0>x_1, v_0^{j}(x_1)>x_{sk}-x_1+\xi\}$ — соответственно условные вероятности того, что, начавшись в момент времени $x=0$, период регенерации в комплексах $N_{\lambda(0)_-,G_0}$ и $N_{\lambda(0),G_0}$ не закончится к моменту времени x_1 и возникшее в момент времени x_1 в РО требование, тип которого совпадает с номером элемента j_1, обозначаемого через j, не завершит свое обслуживание в РО до момента времени $x_{sk}+\xi$ при условии, что период регенерации начался в момент времени $x=0$ и в момент времени x_1 в РО возникло требование с номером j элемента j_1 $(0<x_1<x_{sk})$; $v_0^{j-}(x_1)$ и $v_0^{j}(x_1)$ — времена пребывания требования j-го типа, поступившего в момент времени x_1 в РО комплексов соответственно $N_{\lambda(0)_-,G_0}$ и $N_{\lambda(0),G_0}$. Обозначим $\Pi_\lambda(t)$ число требований пуассоновского потока с параметром λ, возникших на промежутке времени $(t_1, t]$ в комплексе $N^0_{1,\lambda,G}$.

Лемма 5. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$\left| E\int_\Delta \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(x_1,\dots,x_{sk},\xi)\,dx_1 \dots dx_{sk} - E\int_\Delta \dots \int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1 \dots dx_{sk} \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon>0$. Из леммы 3 следует, что существует такое положительное число $z=z(\varepsilon)$, при котором для любого $z\ge z(\varepsilon)$

$$\int_{\Delta\setminus\Delta(z)} \dots \int B_\lambda(x_1,x_{sk})\,dx_1 dx_2 \dots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{7}$$

Из леммы 2 вытекают неравенства

$$B^{j_1 \dots j_{sk}}(x_1,\dots,x_{sk},\xi) \le B_\lambda(x_1,x_{sk}),\ \ B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi) \le B_\lambda(x_1,x_{sk}). \tag{8}$$

Из (7), (8) и монотонности интеграла следует:

$$E\int_{\Delta\setminus\Delta(z)} \dots \int B^{j_1 \dots j_{sk}}(x_1,\dots,x_{sk},\xi)\,dx_1 \dots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6},$$

$$E\int_{\Delta\setminus\Delta(z)} \dots \int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1 \dots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{9}$$

Из аксиомы непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l=l(\varepsilon)$, что для любого $l\ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_\lambda(z)>l) < \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и из неравенства $x_1 < x_{sk} < z$ следует:

$$P(\Pi_{\lambda_-}(x_1) > l) < P(\Pi_\lambda(x_1) > l) < P(\Pi_\lambda(z) > l) < \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}.$$

Пусть R_l^- — случайное событие, состоящее в том, что первые l требований пуассоновского потока с параметром λ_- будут из различных систем. Из леммы 2 [1] следует, что для выбранного ε существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для любого $N \geq N(\varepsilon)$

$$P(R_l^-) > 1 - \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}.$$

Пусть $A = \{\Pi_{\lambda_-}(x_1) \leq l\} R_l^-$ и $I(A)$ — индикатор случайного события A. Тогда

$$\begin{aligned} B^{j_1 \ldots j_{sk}}(x_1, \ldots, x_{sk}, \xi) &= P(\varsigma > x_1, v^j(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi) = \\ &= P(\varsigma I(A) > x_1, v^j(x_1) I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi) + \\ &+ P(\varsigma I(\overline{A}) > x_1, v^j(x_1) I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi). \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) &= P(\varsigma_0^- > x_1, v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + \xi) = \\ &= P(\varsigma_0^- I(A) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi) + \\ &+ P(\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi). \end{aligned} \tag{11}$$

Из леммы 4 [1] следует:

$$\begin{aligned} &\{\varsigma(\omega, \alpha) I(A) > x_1, v^j(x_1) I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi\} = \\ &= \{\varsigma_0^-(\omega, \alpha) I(A) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(A) > x_{sk} - x_1 + \xi\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &P(\varsigma I(\overline{A}) > x_1, v^j(x_1) I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi) \leq \\ &= P(\overline{A}) \leq P(\Pi_\lambda(x_1) > l) + P(\overline{R}_l) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$P(\varsigma_0^- I(\overline{A}) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(\overline{A}) > x_{sk} - x_1 + \xi) \leq P(\overline{A}) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|}, \tag{14}$$

из (10)—(14) вытекает

$$\left| B^{j_1 \ldots j_{sk}}(x_1, \ldots, x_{sk}, \xi) - B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi) \right| \leq \frac{2}{3|\Delta(z)|}. \tag{15}$$

Из свойства интеграла и (15) следует:

$$\left| E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}} (x_1, \ldots, x_{sk}, \xi) dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$

$$\le E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int \left| B^{j_1 \ldots j_{sk}} (x_1, \ldots, x_{sk}, \xi) - B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, \xi) \right| dx_1 \ldots dx_{sk} \le$$

$$\le \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int \frac{2\varepsilon}{3 |\Delta(z)|}\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (16)$$

Из (9) и (16) следует, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$

$$\left| E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}} (x_1, \ldots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$

$$\le \left| E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}} (x_1, \ldots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| + \left| E \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| +$$

$$+ \left| E \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B^{j_1 \ldots j_{sk}} (x_1, \ldots, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta(z)} B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$\left| E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1} (x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 3 существует такое $z = z(\varepsilon)$, что для любого $z \ge z(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_\lambda (x_1, x_{sk})\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}. \qquad (17)$$

Поскольку $\lambda(0) \le \lambda$, из леммы 2 следует:

$$B_0^{j_1 -} (x_1, x_{sk}, \xi) \le B_\lambda (x_1, x_{sk}), \ B_0^{j_1} (x_1, x_{sk}, \xi) \le B_\lambda (x_1, x_{sk}). \qquad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что

$$E\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\ldots dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{6},$$

$$E\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\ldots dx_{sk}<\frac{\varepsilon}{6}. \tag{19}$$

Согласно аксиоме непрерывности из теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l=l(\varepsilon)$, что для всех $l\ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}.$$

Отсюда и из неравенства $x_1<x_{sk}<z$ следует:

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(x_1)>l)<P(\Pi_{\lambda(0)}(z)>l)<\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{20}$$

Пусть C_l — случайное событие, состоящее в том, что совпадут моменты возникновения первых l требований двух пуассоновских потоков с параметрами $\lambda(0)$ и $\lambda(0)_-$ (второй поток получается из первого просеиванием). Тогда $P(C_l)=(1-kN^{-1})^l\to 1$ при $N\to\infty$. Отсюда следует, что для выбранного $\varepsilon>0$ существует такое $l=l(\varepsilon)$, при котором для любого $l\ge l(\varepsilon)$

$$P(C_l)>1-\frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}. \tag{21}$$

Пусть $C=\{\Pi_{\lambda(0)}(z)\le l\}\,C_l$ и $I(C)$ — индикатор случайного события C. Тогда

$$\begin{aligned}B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)&=P(\varsigma_0^->x_1,\,v_0^{j-}(x_1)>x_{sk}-x_1+\xi)=\\&=P(\varsigma_0^-I(C)>x_1,\,v_0^{j-}(x_1)\,I(C)>x_{sk}-x_1+\xi)+\\&+P(\varsigma_0^-I(\overline{C})>x_1,\,v_0^{j-}(x_1)\,I(\overline{C})>x_{sk}-x_1+\xi),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)&=P(\varsigma_0>x_1,\,v_0^{j}(x_1)>x_{sk}-x_1+\xi)=\\&=P(\varsigma_0I(C)>x_1,\,v_0^{j}(x_1)\,I(C)>x_{sk}-x_1+\xi)+\\&+P(\varsigma_0I(\overline{C})>x_1,\,v_0^{j}(x_1)\,I(\overline{C})>x_{sk}-x_1+\xi).\end{aligned} \tag{23}$$

Из построения случайного события C следует:

$$\begin{aligned}&\{\varsigma_0I(C)>x_1,\,v_0^{j}(x_1)\,I(C)>x_{sk}-x_1+\xi\}=\\&=\{\varsigma_0^-I(C)>x_1,\,v_0^{j-}(x_1)I(C)>x_{sk}-x_1+\xi\}.\end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку с использованием (20) и(21)

$$P(\varsigma_0 I(\overline{C})>x_1,\, v_0^j(x_1)\, I(\overline{C})>x_{sk}-x_1+\xi)<P(\overline{C})\le$$

$$\le P(\Pi_{\lambda(0)}>l)+P(\overline{C}_l)<\frac{\varepsilon}{3|\,\Delta(z)\,|} \qquad (25)$$

и

$$P(\varsigma_0^- I(\overline{C})>x_1,\, v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{C})>x_{sk}-x_1+\xi)<P(\overline{C})<\frac{\varepsilon}{3|\,\Delta(z)\,|}, \qquad (26)$$

из (22)—(26) следует:

$$\left|B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)-B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\right|<\frac{2}{3|\,\Delta(z)\,|}. \qquad (27)$$

Из свойства интеграла и (27) получаем

$$\left|E\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\,...\,dx_{sk}-E\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\,...\,dx_{sk}\right|\le$$

$$\le E\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int \left|B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)-B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\right|dx_1\,...\,dx_{sk}<$$

$$<\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int \frac{2}{3|\,\Delta(z)\,|}\,dx_1\,...\,dx_{sk}<\frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (28)$$

Из (19) и (28) следует, что для любого $N\ge N(\varepsilon)$

$$\left|E\int\limits_{\Delta}\!...\!\int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\,...\,dx_{sk}-E\int\limits_{\Delta}\!...\!\int B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\,...\,dx_{sk}\right|\le$$

$$\le\left|E\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!\int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1...\,dx_{sk}\right|+\left|E\int\limits_{\Delta\setminus\Delta(z)}\!\!\int B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1...\,dx_{sk}\right|+$$

$$+\left|E\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int B_0^{j_1-}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1...\,dx_{sk}-E\int\limits_{\Delta(z)}\!\!...\!\int B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1...\,dx_{sk}\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Отсюда и из определения предела последовательности следует утверждение леммы 6. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$\left| J_N(j_1, ..., j_{sk}) - E\int_\Delta ... \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk} \right| \to 0 .$$

Доказательство. Для простоты введем обозначения: $J_N = J_N(j_1, ..., j_{sk})$,

$$J_N^{(1)} = E\int_\Delta ... \int B^{j_1 ... j_{sk}}(x_1, ..., x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk},$$

$$J_N^{(2)} = E\int_\Delta ... \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk},\ J_N^{(3)} = E\int_\Delta ... \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi) dx_1 ... dx_{sk}.$$

Из лемм 5—7 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существуют такие натуральные числа $N_1 = N_1(\varepsilon)$, $N_2 = N_2(\varepsilon)$, $N_3 = N_3(\varepsilon)$, что соответственно для любого натурального числа $N > N_1$ $\left|J_N - J_N^{(1)}\right| < \varepsilon/3$, для любого $N > N_2$ $\left|J_N^{(1)} - J_N^{(2)}\right| < \varepsilon/3$, для любого $N > N_3$ $\left|J_N^{(2)} - J_N^{(3)}\right| < \varepsilon/3$. Пусть $N_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда для любого натурального числа $N > N_0$ справедливо неравенство

$$\left|J_N - J_N^{(3)}\right| \le \left|J_N - J_N^{(1)}\right| + \left|J_N^{(1)} - J_N^{(2)}\right| + \left|J_N^{(2)} - J_N^{(3)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Лемма 7 доказана.

Пусть j — номер элемента j_1. Пусть $v_0^j = \eta_j + w^{(0)}$— стационарное время пребывания требования j-го типа в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda(0),G_0}$. Оно состоит из двух независимых случайных слагаемых: длины η_j требования j-го типа с функцией распределения $G_j(x) = P(\eta_j \le x)$ и стационарного времени ожидания обслуживания $w^{(0)}$ в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda(0),G_0}$.

Лемма 8. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда

$$E\int_\Delta ... \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi)\, dx_1 ... dx_{sk} = \frac{\int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P(v_0^j > x)\, dx}{(sk-2)!} T_{\lambda(0)} .$$

Доказательство. Сделаем в рассматриваемом кратном интеграле замену переменных $t = x_1$, $t_1 = x_{sk} - x_1$, $t_2 = x_{sk} - x_2$, ..., $t_{sk-1} = x_{sk} - x_{sk-1}$, после которой интеграл примет вид

$$E \int\limits_{t_1 > t_2 > ... > t_{sk-1} > 0} ... \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi\}\, dt dt_1 ... dt_{sk-1} =$$

$$= E \int\limits_{t_1 > \ldots > t_{sk-1} > 0} \ldots \int dt_1 \ldots dt_{sk-1} \int\limits_{t>0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi\}\, dt.$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [2, 3] следует, что

$$\int\limits_{t>0} P\{\varsigma_0 > t, v_0^j(t) > t_1 + \xi\}\, dt = P\{v_0^j > t_1 + \xi\}\, T_{\lambda(0)}.$$

Согласно двум последним равенствам и принятым обозначениям искомый интеграл имеет вид

$$E \int\limits_{t_1 > t_2 > \ldots > t_{sk-1}} \ldots \int P\{v_0^j > t_1 + \xi\}\, dt_1 \ldots dt_{sk-1} T_{\lambda(0)} =$$

$$= \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{t_1>0} \frac{[t_1]^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0^j > t_1 + u\}\, dt_1 T_{\lambda(0)} =$$

$$= \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} \frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0^j > x\}\, dx T_{\lambda(0)} < \frac{E\,[v_0^j]^{sk-1}}{(sk-1)!} T_{\lambda(0)} < \infty,$$

так как существует конечный момент $m_{sk} < \infty$ и $\rho < 1$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$

$$q_c^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) \sim \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} \frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!} P\{v_0^j > x\}\, dx T_{\lambda(0)},$$

где j — номер элемента j_1, отказавшего первым на периоде регенерации из первых k сложных систем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует равенство

$$q_c^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(j_1, \ldots, j_{sk}), \tag{29}$$

из леммы 7 при $N \to \infty$ следует

$$\left| J_N(j_1, \ldots, j_{sk}) - E \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, \xi) dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0, \tag{30}$$

из леммы 8 —

$$E\int_{\Delta}\ldots\int B^{j_1}(x_1,x_{sk},\xi)\,dx_1\ldots dx_{sk}=\frac{\int\limits_{u>0}dH(u)\int\limits_{x>u}(x-u)^{sk-2}P(v_0^j>x)\,dx}{(sk-2)!}\,T_{\lambda(0)}\,. \quad (31)$$

Из соотношений (29) —(31) при $N\to\infty$ получаем

$$q_{\text{c}}^{j_1\, j_2\ldots j_{sk}}(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k)\sim\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}\int\limits_{u>0}dH(u)\int\limits_{x>u}\frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!}P\{v_0^j>x\}\,dxT_{\lambda(0)}\,.$$

Лемма 9 доказана.

Обозначим $q_{\text{c}}^{1,\,2\ldots k}$ вероятность того, что на периоде регенерации отказ комплекса произойдет по 1, 2, ..., k-слабомонотонному минимальному пути. Для краткости обозначим $v_0(i_1^l)=v_0^j$, где $j=i_1^l$ — номер элемента, отказавшего первым из первых k сложных систем на периоде регенерации, и этот элемент из l-й сложной системы, отказавшей на пути π_l, $l=1, 2, ..., k$.

Лемма 10. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$

$$q_{\text{c}}^{1,\,2\ldots k}\sim\frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}}\sum_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \cdots\cdots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}\sum_{l=1}^{k}\int\limits_{u>0}dH(u)\int\limits_{x>u}(x-u)^{sk-2}P\{v_0(i_1^l)>x\}\,dxT_{\lambda(0)}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим $j_1, j_2,\ldots, j_{sk}$-последовательность отказавших элементов в первых k системах, приведших к отказу комплекса. Пусть

$$\begin{array}{c} i_1^1,\ i_2^1,\ \ldots,\ i_s^1,\\ i_1^2,\ i_2^2,\ \ldots,\ i_s^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ i_1^k,\ i_2^k,\ \ldots,\ i_s^k \end{array} \quad (32)$$

есть последовательность номеров отказавших элементов 1, 2, …, k-й систем, приведших к отказу комплекса. Каждый из этих наборов определяет монотонный минимальный путь π_i, $i=1,2,\ldots,k$, на котором произошел отказ i-й сложной системы. Таким образом, $j_1, j_2,\ldots, j_{sk}$ — такая перестановка в (32), указывающая последовательность произошедших отказов элементов в сложных системах, что для каждого верхнего индекса сохраняется монотонность по нижнему индексу. Следовательно,

$$q_{\text{c}}^{1,2\ldots k}=\sum_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \ldots\ldots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\ \sum_{(j_1\,j_2\ldots\,j_{sk})} q_{\text{c}}^{j_1\,j_2\ldots j_{sk}}(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k), \tag{33}$$

где $q_{\text{c}}^{j_1\,j_2\ldots j_{sk}}(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k)$ — вероятность отказа комплекса по таким 1, 2, ..., k-слабомонотонным путям, что отказ l-й сложной системы произошел по монотонному минимальному пути π_l, $l=1,2,\ldots,k$, а перестановка $j_1, j_2, \ldots$ ..., j_{sk} определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем.

Из леммы 1 и определения условной вероятности $B^{j_1\,j_2\ldots j_{sk}}(x_1,\ldots,x_{sk})$ в силу дисциплины обслуживания требований в порядке поступления следует, что вероятность $q_{\text{c}}^{j_1\,j_2\ldots j_{sk}}(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k)$ не зависит от порядка отказов элементов $j_2,\ldots,j_{sk}$, отказавших вслед за элементом j_1 из первых k сложных систем комплекса, а равенство $J_N(j_1,j_2,\ldots,j_{sk})=J_N(j_1)$ не зависит от номеров элементов $j_2,\ldots,j_{sk}$. Вследствие этого во внутренней сумме (33) для каждого элемента j_1 с номером $j=i_1^l$, $l=1,2,\ldots,k$, будет ровно $\dfrac{(sk-1)!}{(s-1)!(s!)^{k-1}}$ равных слагаемых, каждое из которых при $N\to\infty$ согласно лемме 9 эквивалентно

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}\int_{u>0} dH(u)\int_{x>u}(x-u)^{sk-2}P\{v_0(i_1^l)>x\}\,dxT_{\lambda(0)}.$$

Отсюда при $N\to\infty$ получаем

$$\sum_{(j_1 j_2\ldots j_{sk})} q_{\text{c}}^{j_1\,j_2\ldots j_{sk}}(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_k)\sim$$

$$\sim\frac{(sk-1)!}{(s-1)!(s!)^{k-1}}\,\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}\sum_{l=1}^{k}\int_{u>0} dH(u)\int_{x>u}\frac{(x-u)^{sk-2}}{(sk-2)!}P\{v_0(i_1^l)>x\}\,dxT_{\lambda(0)}. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует, что при $N\to\infty$

$$q_{\text{c}}^{1,2\ldots k}\sim\sum_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \ldots\ldots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\frac{\prod_{i=1}^{k}\lambda(\pi_i)}{N^{sk}}\,\frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}}\sum_{l=1}^{k}\int_{u>0} dH(u)\int_{x>u}(x-u)^{sk-2}P\{v_0(i_1^l)>x\}\,dxT_{\lambda(0)}.$$

Лемма 10 доказана.

Обозначим $Q_{lk} = P(S_{lk})$ вероятность того, что на периоде регенерации в комплексе $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ откажут не менее l элементов из первых k систем (период занятости не закончится к моменту отказа l-го элемента из первых k систем на этом периоде регенерации). Поскольку суммарная остаточная длина дообслуживания всех требований в РО не зависит от дисциплины обслуживания [4] в классе консервативных дисциплин, эта вероятность не зависит от дисциплины обслуживания в классе D_k консервативных дисциплин обслуживания.

Обозначим через K случайное событие, состоящее в том, что первым на периоде регенерации откажет элемент из первых k систем. Пусть $Q_1 = P(S_{lk}|K)$ — условная вероятность того, что на периоде регенерации откажут не менее l элементов из первых k систем при условии, что первым на периоде регенерации отказал элемент одной из первых k систем; $Q_2 = P(S_{lk}|\overline{K})$ — условная вероятность того, что на периоде регенерации откажут не менее l элементов из первых k систем при условии, что первым на периоде регенерации отказал элемент из системы, отличной от первых k систем.

Обозначим через ζ_l длину периода занятости РО комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda,G}$ при условии, что в момент начала этого периода занятости в РО находились ровно l требований с полным временем обслуживания.

Лемма 11. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда в классе консервативных дисциплин обслуживания D_k

$$Q_1 \le \left(\frac{\lambda k\,(l-1)}{N}\right)^{l-1} \frac{E\,[(\zeta_1)^{l-1}]}{(l-1)!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в момент времени τ_1 начался период занятости РО и в моменты времени $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_l$ на периоде регенерации последовательно отказали l элементов из первых k систем. Поскольку просеивание с вероятностью k/N пуассоновского потока с параметром λ приводит к пуассоновскому потоку с параметром $\lambda_\Delta = (\lambda k)/N$, время между соседними отказами элементов из первых k систем имеет показательное распределение с параметром λ_Δ и разность $\tau_l - \tau_1$ представляет сумму $(l-1)$ независимых случайных величин с таким же распределением.

Пусть элементы систем, отличных от первых k систем, имеют абсолютный приоритет в обслуживании перед элементами первых k систем, а сами обслуживаются в порядке поступления. Тогда с каждым отказавшим элементом из первых k систем можно связать случайный отрезок времени от момента начала обслуживания этого элемента до момента окончания его обслуживания. Длины этих отрезков — независимые случайные величины и распределены так же, как и длина периода занятости в РО комплекса $N^0_{1,\lambda(1-kN^{-1}),G}$, которую обозначим ζ_1^-. Пусть $\{\gamma_i\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных как ζ_1^- случайных величин и $\zeta_{l-1}^- = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_{l-1}$. Используя это обозначение, запишем равенство

$$Q_1 = P(S_{lk}|K) \le P(\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_{l-1} > \tau_l - \tau_1) =$$

$$= \int\limits_{t>0} \frac{\lambda_\Delta(\lambda_\Delta t)^{l-2}}{(l-2)!} \exp(-\lambda_\Delta t)\, P(\zeta_{l-1}^- > t)\, dt \le$$

$$\le \int\limits_{t>0} \frac{\lambda_\Delta(\lambda_\Delta t)^{l-2}}{(l-2)!} P(\zeta_{l-1}^- > t)\, dt = \frac{(\lambda_\Delta)^{l-1} E[(\zeta_{l-1}^-)^{l-1}]}{(l-1)!} =$$

$$= \frac{[\lambda_\Delta(l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\zeta_1^-)^{l-1}] \le \left[\frac{\lambda k(l-1)}{N}\right]^{l-1} \frac{E[(\zeta_1)^{l-1}]}{(l-1)!}.$$

Здесь использованы неравенства $\exp(-\lambda_\Delta t) < 1$ и $\zeta_1^-(\omega) \le \zeta_1(\omega)$, последнее из которых — прямое следствие леммы 1 [1] : от увеличения интенсивности входящего потока требований период занятости РО обслуживанием требований со скоростью единица не уменьшится. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_l < \infty$. Тогда в классе консервативных дисциплин обслуживания D_k

$$Q_2 \le \left(\frac{\lambda kl}{N}\right)^l \frac{E[(\zeta_1)^l]}{l!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в момент времени τ_0 начался период занятости РО и в моменты времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l$, $(\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_l)$ последовательно отказали l элементов из первых k систем. Время между соседними отказами элементов из первых k систем имеет показательное распределение с параметром λ_Δ и разность $\tau_l - \tau_0$ равна сумме l независимых случайных величин с таким же распределением.

Пусть элементы систем, отличных от первых k систем, кроме открывшего период занятости первого элемента, имеют абсолютный приоритет в обслуживании перед элементом, открывшим период занятости, и элементами из первых k систем, которые обслуживаются в порядке поступления. Тогда с элементом, открывшим период занятости, и с каждым отказавшим элементом из первых k систем можно связать случайный отрезок времени от момента начала его обслуживания до момента окончания обслуживания соответствующего элемента. Длины этих отрезков независимы и одинаково распределены так же, как и длина периода занятости в РО комплекса $\mathrm{N}^0_{1,\lambda(1-kN^{-1}),G}$, обозначаемая ζ_1^-. Как и прежде, $\{\gamma_i\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных как ζ_1^- случайных величин и $\zeta_{l-1}^- = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_l$. Тогда

$$Q_2 = P(S_{lk}|\overline{K}) \le P(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_l > \tau_l - \tau_0) =$$

$$= \int\limits_{t>0} \frac{\lambda_\Delta (\lambda_\Delta t)^{l-1}}{(l-1)!} \exp(-\lambda_\Delta t)\, P(\zeta_l^- > t)\, dt \le$$

$$\le \int\limits_{t>0} \frac{\lambda_\Delta (\lambda_\Delta t)^{l-1}}{(l-1)!} P(\zeta_l^- > t)\, dt = \frac{(\lambda_\Delta)^l E[(\zeta_l^-)^l]}{l!} =$$

$$= \frac{[\lambda_\Delta l]^{l-1}}{l!} E[(\zeta_1^-)^l] \le \left[\frac{\lambda k l}{N}\right]^l \frac{E[(\zeta_1)^l]}{l!}.$$

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_l < \infty$. Тогда в классе консервативных дисциплин обслуживания D_k справедливо неравенство

$$Q_{lk} \le N^{-l} \left\{ k \frac{[\lambda k (l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\zeta_1)^{l-1}] + \frac{(N-k)}{N} \frac{(\lambda k l)^l}{l!} E[(\zeta_1)^l] \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле полной вероятности

$$Q_{lk} = P(S_{lk}) = P(K)\, P(S_{lk}|K) + P(\overline{K})\, P(S_{lk}|\overline{K}). \tag{35}$$

В силу однотипности сложных систем комплекса вероятность того, что период занятости РО начнется отказом элемента из первых k систем, определяется величиной

$$P(K) = k/N. \tag{36}$$

Отсюда вероятность противоположного события определяется величиной

$$P(\overline{K}) = 1 - k/N. \tag{37}$$

Согласно (35)—(37) и леммам 11, 12

$$Q_{lk} = \frac{k}{N} Q_1 + \left(1 - \frac{k}{N}\right) Q_2 \le$$

$$\le N^{-l} \left\{ k \frac{[\lambda k (l-1)]^{l-1}}{(l-1)!} E[(\zeta_1)^{l-1}] + \frac{(N-k)}{N} \frac{(\lambda k l)^l}{l!} E[(\zeta_1)^l] \right\}.$$

Лемма 13 доказана.

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2012. V. 34. № 4

Обозначим $q_{\text{нс}}^{1,\,2\ldots k}$ вероятность того, что на периоде регенерации первый отказ комплекса произойдет в результате отказа первых k сложных систем на пути, который не является $1, 2, ..., k$-слабомонотонным минимальным. Множество таких путей обозначим $\Pi_{\text{нс}}^{1,\,2\ldots k}$.

Лемма 14. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk+1}<\infty$. Тогда

$$q_{\text{нс}}^{1,2\ldots k} \le N^{-1}\left\{k\,\frac{[\lambda k\,(l-1)]^{l-1}}{(l-1)!}\,E\,[(\zeta_1)^{l-1}]+\frac{(N-k)}{N}\,\frac{(\lambda kl)^l}{l!}\,E\,[(\zeta_1)^l\,]\right\},$$

где $l=sk+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если первый отказ комплекса на периоде регенерации произошел на пути из множества путей $\Pi_{\text{нс}}^{1,\,2\ldots k}$, то на этом периоде регенерации из первых k сложных систем отказали не менее, чем $sk+1$ элементов. Отсюда следует, что $q_{\text{нс}}^{1,\,2\ldots k}\le Q_{sk+1}$. Из этого неравенства и леммы 13 в силу транзитивности отношения порядка следует утверждение леммы 14.

Обозначим $q_{\text{с}}^{l_1\,l_2\,\ldots\,l_k}$ вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произошел по $l_1, l_2, ..., l_k$-слабомонотонному минимальному пути, множество которых обозначим $\Pi_{\text{с}}^{l_1\,l_2\,\ldots\,l_k}$.

Обозначим $q_{\text{нс}}^{l_1\,l_2\,\ldots\,l_k}$ вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произошел в результате отказа $l_1, l_2, ..., l_k$-й сложных систем на пути, который не является $l_1, l_2, ..., l_k$-слабомонотонным минимальным. Множество таких путей обозначим $\Pi_{\text{нс}}^{l_1\,l_2\,\ldots\,l_k}$.

Обозначим через $q_{\text{с}}$ вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произойдет по слабомонотонному минимальному пути из множества $\Pi_{\text{с}}(k)$, а через $q_{\text{нс}}$ — вероятность того, что первый отказ комплекса на периоде регенерации произойдет на пути, который не является слабомонотонным минимальным, из множества $\Pi_{\text{нс}}(k)$. Вероятность отказа комплекса на одном периоде регенерации обозначим через q.

Лемма 15. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$ $q\sim CN^{-(s-1)k}$, где

$$C=\frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}k!}\sum_{\substack{\pi_1\in\Pi_0^1\\ \cdots\cdots\cdots\\ \pi_k\in\Pi_0^k}}\prod_{i=1}^{k}\lambda\,(\pi_i)\sum_{l=1}^{k}\int_{u>0}dH(u)\int_{x>u}(x-u)^{sk-2}P\{v_0(i_1^l)>x\}dxT_{\lambda(0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отказ комплекса на периоде регенерации может произойти либо на пути из множества $\Pi_{\text{с}}(k)$, либо на пути из множества $\Pi_{\text{нс}}(k)$. Отсюда следует, что

$$q=q_{\text{с}}+q_{\text{нс}}. \tag{38}$$

Из определения комплекса N следует, что его вероятностные характеристики не зависят от номеров сложных систем комплекса, если дисциплина обслуживания отказавших элементов не зависит от номеров тех сложных систем, где они отказали. Отсюда следует, что $q_{\text{с}}^{l_1\, l_2 \dots l_k} = q_{\text{с}}^{1,\, 2 \dots k}$, $q_{\text{нс}}^{l_1\, l_2 \dots l_k} = q_{\text{нс}}^{1,\, 2 \dots k}$, и поэтому

$$q_{\text{с}} = C_N^k\, q_{\text{с}}^{1,\, 2\dots k}, \quad q_{\text{нс}} = C_N^k\, q_{\text{нс}}^{1,\, 2\dots k}. \tag{39}$$

Из первого равенства (39) и леммы 10 следует, что при $N \to \infty$

$$q_{\text{с}} \sim CN^{-sk+k}, \tag{40}$$

где

$$C = \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}\, k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\} dx T_{\lambda(0)}.$$

Из второго равенства (39) и леммы 14 следует, что при $N \to \infty$

$$q_{\text{нс}} = O(N^{-sk-1+k}). \tag{41}$$

Из (38), (40), (41) следует утверждение леммы 15. Она доказана.

Теорема 1. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk+1} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ где $P(CN^{-sk+k}\tau > x) \to \exp(-x)$, где

$$C = \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}\, k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx.$$

Доказательство. Из условий леммы 15 и теоремы 5 из работы [1] следует, что при $N \to \infty$

$$r^{(1)} \sim r_0^{(1)} = T_{\lambda(0)}, \; r^{(2)} \sim r_0^{(2)}. \tag{42}$$

Согласно лемме 15 при $N \to \infty$

$$q \sim CN^{-k(s-1)}, \tag{43}$$

где

$$C = \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}\, k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int\limits_{u>0} dH(u) \int\limits_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx T_{\lambda(0)}.$$

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2012. V. 34. № 4

Из теоремы 2 [5] следует, что при $\alpha_0 = \dfrac{r^{(2)}}{[r^{(1)}]^2} q \to 0$

$$P\left\{\frac{q\tau}{r^{(1)}} > x\right\} \to \exp(-x).$$

Отсюда и из (42), (43) следует, что при $N \to \infty$ $P(CN^{-sk+k}\tau > x) \to \exp(-x)$, где

$$C = \frac{(sk-1)}{(s-1)!(s!)^{k-1}k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum_{l=1}^{k} \int_{u>0} dH(u) \int_{x>u} (x-u)^{sk-2} P\{v_0(i_1^l) > x\}\, dx.$$

Теорема 1 доказана.

The author has found the asymptotic time distribution of no-failure operation of complexes of complicated renewable systems with time reserve, Markov failure flow of components and individual function of time distribution of maintenance of complicated systems components which quantity increases in inverse proportion to intensity of their failures in such a way that the total load on the maintenance system is bounded from above by the value less than one, with the discipline of demands maintenance in the order of emergence.

1. *Макаричев А. В.* Асимптотические оценки периода регенерации комплексов сложных восстанавливаемых систем при различных дисциплинах обслуживания.— Электрон. моделирование. — 2003. — **25**, № 2. — С. 83—97.
2. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М. : Наука, 1967. — 244 с.
3. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М. : Сов. радио, 1967. — 299 с.
4. *Козлов В. В., Соловьев А. Д.* Оптимальное обслуживание восстанавливаемых систем. 1// Техническая кибернетика. — 1978. — № 3. — С. 30—38.
5. *Соловьев А. Д.* Оценка надежности восстанавливаемых систем. — М. : Знание, 1987. — 60 с.

Поступила 16.03.12

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. В 1981 г. окончил Московский государственный университет им. М. Ломоносова. Область научных исследований — теория массового обслуживания, оптимизация характеристик массового обслуживания и надежности, расширяющиеся комплексы сложных восстанавливаемых систем и их быстрое обслуживание, предельные теоремы теории вероятностей, математическая статистика, испытания на надежность и контроль качества промышленной продукции.