УДК 519.711.3:631.382.2:669.174

В. Ф. Евдокимов *, чл.-кор. НАН Украины, $\boxed{\text{А. А. Кучаев}}$ **, д-р техн. наук,
Е. И. Петрушенко*, канд. техн. наук, **В. А. Кучаев** *, аспирант
* Ин-т проблем моделирования в энергетике
им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4249160, e-mail: EPetrushenko<der_7@voliecable.com>,
vitalku07@yandex.ru),
** Физико-технологический ин-т металлов и сплавов НАН Украины
(Украина, 03680, Киев-142, ГСП, бульвар Вернадского, 34/1,
тел. (044) 4240452, e-mail: alexander-kuchaev@svitonline.com)

Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода. II

В результате упрощения векторной системы интегральных уравнений (СИУ) для токов намагниченности (ТН) на поверхности магнитопровода электромагнитного перемешивателя (ЭМП) получена модель трехмерного магнитного поля цилиндрического ЭМП, в основе которой лежит скалярная СИУ. Неизвестными в ней являются проекции векторов плотности ТН, лежащих в касательной плоскости к поверхности магнитопровода.

В результаті спрощення векторної системи інтегральних рівнянь (СІР) для струмів намагніченості (СН) на поверхні магнітопроводу електромагнітного перемішувача (ЕМП) отримано модель тривимірного магнітного поля циліндричного ЕМП, в основі якої лежить скалярна СІР. Невідомими в ній є проекції векторів щільності СН, що лежать в дотичній площині до поверхні магнітопроводу.

Ключевые слова: трехмерное магнитное поле, электромагнитный перемешиватель, магнитопровод, токи намагниченности, векторные интегральные уравнения, скалярная система интегральных уравнений.

Преобразование векторного интегрального уравнения (11) к скалярной СИУ. Запишем векторное уравнение (11) в развернутом виде:

$$\frac{2\pi}{\chi}\,\overline{\sigma}_1(Q_1,t)+\int\limits_{S_1}\frac{[\overline{n}_{Q_1}\overline{G}_{11}(Q_1,M_1)]}{r^3_{Q_1M_1}}\,ds_{M_1}+$$

$$+\int\limits_{S_2}\frac{[\overline{n}_{Q_1}\overline{G}_{12}(Q_1,M_2)]}{r^3_{Q_1M_2}}\,ds_{M_2}+\int\limits_{S_3}\frac{[\overline{n}_{Q_1}\overline{G}_{13}(Q_1,M_3)]}{r^3_{Q_1M_3}}\,ds_{M_3}+$$

$$+\int\limits_{S_4}\frac{[\bar{n}_{Q_1}\bar{G}_{14}(Q_1,M_4)]}{r^3_{Q_1 M_4}}ds_{M_4}=-D_{S_1 0k}\bar{\delta}_{0k},\ Q_1\in S_1. \quad (15)$$

Здесь

$$\bar{G}_{11}(Q_1,M_1)=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{11\rho}(Q_1,M_1)+\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{11\varphi}(Q_1,M_1)+\bar{e}_z G_{11z}(Q_1,M_1); \quad (16)$$

$$\bar{G}_{12}(Q_1,M_2)=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{12\rho}(Q_1,M_2)+\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{12\varphi}(Q_1,M_2)+\bar{e}_z G_{12z}(Q_1,M_2); \quad (17)$$

$$\bar{G}_{13}(Q_1,M_3)=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{13\rho}(Q_1,M_3)+\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{13\varphi}(Q_1,M_3)+\bar{e}_z G_{13z}(Q_1,M_3); \quad (18)$$

$$\bar{G}_{14}(Q_1,M_4)=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{14\rho}(Q_1,M_4)+\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{14\varphi}(Q_1,M_4)+\bar{e}_z G_{14z}(Q_1,M_4); \quad (19)$$

$$\bar{n}_{Q_1}=-\bar{e}_z;$$

$$[\bar{n}_{Q_1}\bar{G}_{11}(Q_1,M_1)]=\begin{vmatrix}\bar{e}_\rho(Q_1) & \bar{e}_\varphi(Q_1) & \bar{e}_z\\ 0 & 0 & -1\\ G_{11\rho}(Q_1,M_1) & G_{11\varphi}(Q_1,M_1) & G_{11z}(Q_1,M_1)\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{11\varphi}(Q_1,M_1)-\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{11\rho}(Q_1,M_1); \quad (20)$$

$$[\bar{n}_{Q_1}\bar{G}_{12}(Q_1,M_2)]=\begin{vmatrix}\bar{e}_\rho(Q_1) & \bar{e}_\varphi(Q_1) & \bar{e}_z\\ 0 & 0 & -1\\ G_{12\rho}(Q_1,M_2) & G_{12\varphi}(Q_1,M_2) & G_{12z}(Q_1,M_2)\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{12\varphi}(Q_1,M_2)-\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{12\rho}(Q_1,M_2); \quad (21)$$

$$[\bar{n}_{Q_1}\bar{G}_{13}(Q_1,M_3)]=\begin{vmatrix}\bar{e}_\rho(Q_1) & \bar{e}_\varphi(Q_1) & \bar{e}_z\\ 0 & 0 & -1\\ G_{13\rho}(Q_1,M_3) & G_{13\varphi}(Q_1,M_3) & G_{13z}(Q_1,M_3)\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{13\varphi}(Q_1,M_3)-\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{13\rho}(Q_1,M_3); \quad (22)$$

$$[\bar{n}_{Q_1}\bar{G}_{14}(Q_1,M_4)]=\begin{vmatrix}\bar{e}_\rho(Q_1) & \bar{e}_\varphi(Q_1) & \bar{e}_z\\ 0 & 0 & -1\\ G_{14\rho}(Q_1,M_4) & G_{14\varphi}(Q_1,M_4) & G_{14z}(Q_1,M_4)\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{e}_\rho(Q_1)\,G_{14\varphi}(Q_1,M_4)-\bar{e}_\varphi(Q_1)\,G_{14\rho}(Q_1,M_4). \quad (23)$$

Подставив (16)—(19) в (15), получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\bar{e}_\rho(Q_1)\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)+\frac{2\pi}{\chi}\bar{e}_\varphi(Q_1)\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)+$$

$$+\int\limits_{S_1}\frac{\bar{e}_\rho(Q_1)G_{11\varphi}(Q_1,M_1)-\bar{e}_\varphi(Q_1)G_{11\rho}(Q_1,M_1)}{r^3_{Q_1M_1}}ds_{M_1}+$$

$$+\int\limits_{S_2}\frac{\bar{e}_\rho(Q_1)G_{12\varphi}(Q_1,M_2)-\bar{e}_\varphi(Q_1)G_{12\rho}(Q_1,M_2)}{r^3_{Q_1M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\int\limits_{S_3}\frac{\bar{e}_\rho(Q_1)G_{13\varphi}(Q_1,M_3)-\bar{e}_\varphi(Q_1)G_{13\rho}(Q_1,M_3)}{r^3_{Q_1M_3}}ds_{M_3}+$$

$$+\int\limits_{S_4}\frac{\bar{e}_\rho(Q_1)G_{14\varphi}(Q_1,M_4)-\bar{e}_\varphi(Q_1)G_{14\rho}(Q_1,M_4)}{r^3_{Q_1M_4}}ds_{M_4}=-D_{S_10k}\bar{\delta}_{0k},\ Q_1\in S_1. \tag{24}$$

Почленно проинтегрируем (24) и вынесем орты за знак интеграла. Тогда запишем

$$\frac{2\pi}{\chi}\bar{e}_\rho(Q_1)\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)+\frac{2\pi}{\chi}\bar{e}_\varphi(Q_1)\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)+$$

$$+\bar{e}_\rho(Q_1)\int\limits_{S_1}\frac{G_{11\varphi}(Q_1,M_1)}{r^3_{Q_1M_1}}ds_{M_1}-\bar{e}_\varphi(Q_1)\int\limits_{S_1}\frac{G_{11\rho}(Q_1,M_1)}{r^3_{Q_1M_1}}ds_{M_1}+$$

$$+\bar{e}_\rho(Q_1)\int\limits_{S_2}\frac{G_{12\varphi}(Q_1,M_2)}{r^3_{Q_1M_2}}ds_{M_2}-\bar{e}_\varphi(Q_1)\int\limits_{S_2}\frac{G_{12\rho}(Q_1,M_2)}{r^3_{Q_1M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\bar{e}_\rho(Q_1)\int\limits_{S_3}\frac{G_{13\varphi}(Q_1,M_3)}{r^3_{Q_1M_3}}ds_{M_3}-\bar{e}_\varphi(Q_1)\int\limits_{S_3}\frac{G_{13\rho}(Q_1,M_3)}{r^3_{Q_1M_3}}ds_{M_3}+$$

$$+\bar{e}_\rho(Q_1)\int\limits_{S_4}\frac{G_{14\varphi}(Q_1,M_4)}{r^3_{Q_1M_4}}ds_{M_4}-\bar{e}_\varphi(Q_1)\int\limits_{S_4}\frac{G_{14\rho}(Q_1,M_4)}{r^3_{Q_1M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-D_{S_10k}\bar{\delta}_{0k}=-\bar{e}_\rho(Q_1)F_{1\rho}(Q_1)-\bar{e}_\varphi(Q_1)F_{1\varphi}(Q_1)-\bar{e}_zF_{1z}(Q_1),\ Q_1\in S_1. \tag{25}$$

Приравняв выражения при $\bar{e}_\rho(Q_1)$ и $\bar{e}_\varphi(Q_1)$ справа и слева, получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)+\int\limits_{S_1}\frac{G_{11\varphi}(Q_1,M_1)}{r^3_{Q_1M_1}}ds_{M_1}+\int\limits_{S_2}\frac{G_{12\varphi}(Q_1,M_2)}{r^3_{Q_1M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\int_{S_3}\frac{G_{13\varphi}(Q_1,M_3)}{r^3_{Q_1M_3}}ds_{M_3}+\int_{S_4}\frac{G_{14\varphi}(Q_1,M_4)}{r^3_{Q_1M_4}}ds_{M_4}=-F_{1\rho}(Q_1),Q_1\in S_1; \quad (26)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)-\int_{S_1}\frac{G_{11\rho}(Q_1,M_1)}{r^3_{Q_1M_1}}ds_{M_1}-\int_{S_2}\frac{G_{12\rho}(Q_1,M_2)}{r^3_{Q_1M_2}}ds_{M_2}-$$

$$-\int_{S_3}\frac{G_{13\rho}(Q_1,M_3)}{r^3_{Q_1M_3}}ds_{M_3}-\int_{S_4}\frac{G_{14\rho}(Q_1,M_4)}{r^3_{Q_1M_4}}ds_{M_4}=-F_{1\varphi}(Q_1),Q_1\in S_1. \quad (27)$$

Для того чтобы найти значения $G_{11\varphi}(Q_1,M_1)$, $G_{12\varphi}(Q_1,M_2)$, $G_{13\varphi}(Q_1,M_3)$, $G_{14\varphi}(Q_1,M_4)$, $G_{11\rho}(Q_1,M_1)$, $G_{12\rho}(Q_1,M_2)$, $G_{13\rho}(Q_1,M_3)$, $G_{14\rho}(Q_1,M_4)$ из (26), (27), раскроем векторные произведения (16)—(19) для $\overline{G}_{11}(Q_1,M_1)$, $\overline{G}_{12}(Q_1,M_2)$, $\overline{G}_{13}(Q_1,M_3)$, $\overline{G}_{14}(Q_1,M_4)$:

$$\overline{G}_{11}(Q_1,M_1)=\overline{e}_\rho(Q_1)G_{11\rho}(Q_1,M_1)+\overline{e}_\varphi(Q_1)G_{11\varphi}(Q_1,M_1)+$$

$$+\overline{e}_zG_{11z}(Q_1,M_1)=[\overline{r}_{Q_1M_1}\overline{\sigma}_1(M_1,t)]. \quad (28)$$

Подставив в (28) формулы из табл. 1

$$\overline{r}_{Q_1M_1}=\overline{e}_\rho(Q_1)r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_1}+\overline{e}_\varphi(Q_1)r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_1}, \quad (29)$$

$$\overline{\sigma}_1(M_1)=\overline{e}_\rho(Q_1)\sigma_{\rho Q_1}(M_1)+\overline{e}_\varphi(Q_1)\sigma_{\varphi Q_1}(M_1), \quad (30)$$

где

$$r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_1}=\rho_{M_1}\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_1})-\rho_{Q_1},\quad r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_1}=\rho_{M_1}\sin(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_1}),$$

$$r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_1}=(z_{M_1}-z_{Q_1})=Z_1-Z_1=0$$

и

$$\sigma_{\rho Q_1}(M_1)=\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\rho M_1}(M_1)-\sin(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_1}(M_1), \quad (31)$$

$$\sigma_{\varphi Q_1}(M_1)=\sin(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\rho M_1}(M_1)+\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_1}(M_1), \quad (32)$$

получим

$$\overline{G}_{11}(Q_1,M_1)=[\overline{r}_{Q_1M_1}\overline{\sigma}_1(M_1,t)]=\begin{vmatrix}\overline{e}_\rho(Q_1) & \overline{e}_\varphi(Q_1) & \overline{e}_z\\ r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_1} & r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_1} & 0\\ \sigma_{\rho Q_1}(M_1) & \sigma_{\varphi Q_1}(M_1) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{e}_z\begin{vmatrix} r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_1} & r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_1}\\ \sigma_{\rho Q_1}(M_1) & \sigma_{\varphi Q_1}(M_1)\end{vmatrix}=\overline{e}_z(r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_1}\sigma_{\varphi Q_1}(M_1)-r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_1}\sigma_{\rho Q_1}(M_1)).$$

Отсюда следует

$$G_{11\rho}(Q_1, M_1) = 0, \tag{33}$$

$$G_{11\varphi}(Q_1, M_1) = 0, \tag{34}$$

$$G_{11z}(Q_1, M_1) = r_{Q_1M_1}^{\rho_{Q_1}} \sigma_{\varphi Q_1}(M_1) - r_{Q_1M_1}^{\varphi_{Q_1}} \sigma_{\rho Q_1}(M_1);$$

$$\overline{G}_{12}(Q_1, M_2) = \overline{e}_\rho(Q_1) G_{12\rho}(Q_1, M_2) + \overline{e}_\varphi(Q_1) G_{12\varphi}(Q_1, M_2) + $$
$$+ \overline{e}_z G_{12z}(Q_1, M_2) = [\overline{r}_{Q_1M_2} \overline{\sigma}_2(M_2, t)]. \tag{35}$$

Подставив в (35) формулы из табл. 1

$$\overline{r}_{Q_1M_2} = \overline{e}_\rho(Q_1) r_{Q_1M_2}^{\rho_{Q_1}} + \overline{e}_\varphi(Q_1) r_{Q_1M_2}^{\varphi_{Q_2}} + \overline{e}_z(Q_1) r_{Q_1M_2}^{z_{Q_1}} \tag{36}$$

и

$$\overline{\sigma}_2(M_2) = \overline{e}_\varphi(M_2) \sigma_{\varphi M_2}(M_2) + \overline{e}_z(M_2) \sigma_z(M_2) =$$
$$= \overline{e}_\rho(Q_1) \sigma_{\rho Q_1}(M_2) + \overline{e}_\varphi(Q_1) \sigma_{\varphi Q_1}(M_2) + \overline{e}_z \sigma_z(M_2), \tag{37}$$

где

$$r_{Q_1M_2}^{\rho_{Q_1}} = \rho_{M_2} \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_1}) - \rho_{Q_1} = R_2 \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_1}) - \rho_{Q_1},$$

$$r_{Q_1M_2}^{\varphi_{Q_1}} = \rho_{M_2} \sin(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_1}) = R_2 \sin(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_1}),$$

$$r_{Q_1M_2}^{z_{Q_1}} = (z_{M_2} - z_{Q_1}) = z_{M_2} - Z_1,$$

$$\sigma_{\rho Q_1}(M_2) = -\sin(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_1}) \sigma_{\varphi M_2}(M_2), \tag{38}$$

$$\sigma_{\varphi Q_1}(M_2) = \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_1}) \sigma_{\varphi M_2}(M_2), \tag{39}$$

получим

$$\overline{G}_{12}(Q_1, M_2) = [\overline{r}_{Q_1M_2} \overline{\sigma}_2(M_2, t)] = \begin{vmatrix} \overline{e}_\rho(Q_1) & \overline{e}_\varphi(Q_1) & \overline{e}_z \\ r_{Q_1M_2}^{\rho_{Q_1}} & r_{Q_1M_2}^{\varphi_{Q_1}} & r_{Q_1M_2}^{z_{Q_1}} \\ \sigma_{\rho Q_1}(M_2) & \sigma_{\varphi Q_1}(M_2) & \sigma_z(M_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{e}_\rho(Q_1)(r_{Q_1M_2}^{\varphi_{Q_1}} \sigma_z(M_2) - r_{Q_1M_2}^{z_{Q_1}} \sigma_{\varphi Q_1}(M_2)) - \overline{e}_\varphi(Q_1)(r_{Q_1M_2}^{\rho_{Q_1}} \sigma_z(M_2) -$$

$$- r_{Q_1M_2}^{z_{Q_1}} \sigma_{\rho Q_1}(M_2)) + \overline{e}_z(r_{Q_1M_2}^{\rho_{Q_1}} \sigma_{\varphi Q_1}(M_2) - r_{Q_1M_2}^{\varphi_{Q_1}} \sigma_{\rho Q_1}(M_2)).$$

Следовательно,

$$G_{12\rho}(Q_1, M_2) = r_{Q_1M_2}^{\varphi_{Q_1}} \sigma_z(M_2) - r_{Q_1M_2}^{z_{Q_1}} \sigma_{\varphi Q_1}(M_2), \tag{40}$$

$$G_{12\varphi}(Q_1, M_2) = -r^{\rho Q_1}_{Q_1 M_2} \sigma_z(M_2) + r^{z Q_1}_{Q_1 M_2} \sigma_{\rho Q_1}(M_2), \tag{41}$$

$$G_{12z}(Q_1, M_2) = r^{\rho Q_1}_{Q_1 M_2} \sigma_{\varphi Q_1}(M_2) - r^{\varphi Q_1}_{Q_1 M_2} \sigma_{\rho Q_1}(M_2);$$

$$\overline{G}_{13}(Q_1, M_3) = \overline{e}_\rho(Q_1) G_{13\rho}(Q_1, M_3) + \overline{e}_\varphi(Q_1) G_{13\varphi}(Q_1, M_3) + \\ + \overline{e}_z G_{13z}(Q_1, M_3) = [\overline{r}_{Q_1 M_3} \overline{\sigma}_3(M_3, t)]. \tag{42}$$

Теперь формулы

$$\overline{r}_{Q_1 M_3} = \overline{e}_\rho(Q_1) r^{\rho Q_1}_{Q_1 M_3} + \overline{e}_\varphi(Q_1) r^{\varphi Q_1}_{Q_1 M_3} + \overline{e}_z(Q_1) r^{z Q_1}_{Q_1 M_3}, \tag{43}$$

$$\overline{\sigma}_3(M_3) = \overline{e}_\rho(M_3) \sigma_{\rho M_3}(M_3) + \overline{e}_\varphi(M_3) \sigma_{\varphi M_3}(M_3) = \\ = \overline{e}_\rho(Q_1) \sigma_{\rho Q_1}(M_3) + \overline{e}_\varphi(Q_1) \sigma_{\varphi Q_1}(M_3), \tag{44}$$

где

$$r^{\rho Q_1}_{Q_1 M_3} = \rho_{M_3} \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_1}) - \rho_{Q_1}, \quad r^{\varphi Q_1}_{Q_1 M_3} = \rho_{M_3} \sin(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_1}),$$

$$r^{z Q_1}_{Q_1 M_3} = (z_{M_3} - z_{Q_1}) = Z_3 - Z_1,$$

$$\sigma_{\rho Q_1}(M_3) = \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_1}) \sigma_{\rho M_3}(M_3) - \sin(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_1}) \sigma_{\varphi M_3}(M_3), \tag{45}$$

$$\sigma_{\varphi Q_1}(M_3) = \sin(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_1}) \sigma_{\rho M_3}(M_3) + \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_1}) \sigma_{\varphi M_3}(M_3), \tag{46}$$

подставим в (42) и получим

$$\overline{G}_{13}(Q_1, M_3) = [\overline{r}_{Q_1 M_3} \overline{\sigma}_3(M_3, t)] = \begin{vmatrix} \overline{e}_\rho(Q_1) & \overline{e}_\varphi(Q_1) & \overline{e}_z \\ r^{\rho Q_1}_{Q_1 M_3} & r^{\varphi Q_1}_{Q_1 M_3} & r^{z Q_1}_{Q_1 M_3} \\ \sigma_{\rho Q_1}(M_3) & \sigma_{\varphi Q_1}(M_3) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{e}_\rho(Q_1)(-r^{z Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\varphi Q_1}(M_3)) - \overline{e}_\varphi(Q_1)(-r^{z Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\rho Q_1}(M_3)) +$$

$$+ \overline{e}_z (r^{\rho Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\varphi Q_1}(M_3) - r^{\varphi Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\rho Q_1}(M_3)).$$

Отсюда следует

$$G_{13\rho}(Q_1, M_3) = -r^{z Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\varphi Q_1}(M_3), \tag{47}$$

$$G_{13\varphi}(Q_1, M_2) = r^{z Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\rho Q_1}(M_3), \tag{48}$$

$$G_{13z}(Q_1, M_3) = (r^{\rho Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\varphi Q_1}(M_3) - r^{\varphi Q_1}_{Q_1 M_3} \sigma_{\rho Q_1}(M_3));$$

$$\overline{G}_{14}(Q_1, M_4) = \overline{e}_\rho(Q_1) G_{14\rho}(Q_1, M_4) + \overline{e}_\varphi(Q_1) G_{14\varphi}(Q_1, M_4) + \\ + \overline{e}_z G_{14z}(Q_1, M_4) = [\overline{r}_{Q_1 M_4} \overline{\sigma}_4(M_4, t)]. \tag{49}$$

Теперь формулы

$$\bar{r}_{Q_1M_4} = \bar{e}_\rho(Q_1) r_{Q_1M_4}^{\rho Q_1} + \bar{e}_\varphi(Q_1) r_{Q_1M_4}^{\varphi Q_1} + \bar{e}_z(Q_1) r_{Q_1M_4}^{z Q_1} \tag{50}$$

и

$$\bar{\sigma}(M_4) = \bar{e}_\varphi(M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4) + \bar{e}_z \sigma_z(M_4) =$$
$$= \bar{e}_\rho(Q_1)\sigma_{\rho Q_1}(M_4) + \bar{e}_\varphi(Q_1)\sigma_{\varphi Q_1}(M_4) + \bar{e}_z \sigma_z(M_4), \tag{51}$$

где

$$r_{Q_1M_4}^{\rho Q_1} = \rho_{M_4}\cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_1}) - \rho_{Q_1} = R_4\cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_1}) - \rho_{Q_1},$$

$$r_{Q_1M_4}^{\varphi Q_1} = \rho_{M_4}\sin(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_1}) = R_4\sin(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_1}),$$

$$r_{Q_1M_4}^{z Q_1} = (z_{M_4} - z_{Q_1}) = (z_{M_4} - Z_1),$$

$$\sigma_{\rho Q_1}(M_4) = -\sin(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_4}(M_4), \tag{52}$$

$$\sigma_{\varphi Q_1}(M_4) = \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_4}(M_4), \tag{53}$$

подставим в (49) и получим

$$\overline{G}_{14}(Q_1, M_4) = [\bar{r}_{Q_1M_4}\bar{\sigma}_4(M_4, t)] = \begin{vmatrix} \bar{e}_\rho(Q_1) & \bar{e}_\varphi(Q_1) & \bar{e}_z \\ r_{Q_1M_4}^{\rho Q_1} & r_{Q_1M_4}^{\varphi Q_1} & r_{Q_1M_4}^{z Q_1} \\ \sigma_{\rho Q_1}(M_4) & \sigma_{\varphi Q_1}(M_4) & \sigma_z(M_4) \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_\rho(Q_1)(r_{Q_1M_4}^{\varphi Q_1}\sigma_z(M_4) - r_{Q_1M_4}^{z Q_1}\sigma_{\varphi Q_1}(M_4)) - \bar{e}_\varphi(Q_1)\ (r_{Q_1M_4}^{\rho Q_1}\sigma_z(M_4) -$$
$$- r_{Q_1M_4}^{z Q_1}\sigma_{\rho Q_1}(M_4)) + \bar{e}_z(r_{Q_1M_4}^{\rho Q_1}\sigma_{\varphi Q_1}(M_4) - r_{Q_1M_4}^{\varphi Q_1}\sigma_{\rho Q_4}(M_4)).$$

Таким образом,

$$G_{14\rho}(Q_1, M_4) = r_{Q_1M_4}^{\varphi Q_1}\sigma_z(M_4) - r_{Q_1M_4}^{z Q_1}\sigma_{\varphi Q_1}(M_4), \tag{54}$$

$$G_{14\varphi}(Q_1, M_4) = -r_{Q_1M_4}^{\rho Q_1}\sigma_z(M_4) + r_{Q_1M_4}^{z Q_1}\sigma_{\rho Q_1}(M_4), \tag{55}$$

$$G_{14z}(Q_1, M_4) = r_{Q_1M_4}^{\rho Q_1}\sigma_{\varphi Q_1}(M_4) - r_{Q_1M_4}^{\varphi Q_1}\sigma_{\rho Q_1}(M_4).$$

Подставив в уравнения (26), (27) выражения (33), (34), (40), (41), (47), (48), (54), (55), получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1, t) + \int\limits_{S_1}\frac{0}{r_{Q_1\,M_1}^3}ds_{M_1} + \int\limits_{S_2}\frac{-r_{Q_1M_2}^{\rho Q_1}\sigma_z(M_2) + r_{Q_1M_2}^{z Q_1}\sigma_{\rho Q_1}(M_2)}{r_{Q_1\,M_2}^3}ds_{M_2} +$$

$$+\int_{S_3}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_3}\sigma_{\rho Q_1}(M_3)}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}+\int_{S_4}\frac{-r^{\rho Q_1}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)+r^{zQ_1}_{Q_1M_4}\sigma_{\rho Q_1}(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\rho}(Q_1),\ Q_1\in S_1, \tag{56}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)-\int_{S_1}\frac{0}{r^3_{Q_1\,M_1}}ds_{M_1}-\int_{S_2}\frac{r^{\varphi Q_1}_{Q_1M_2}\sigma_z(M_2)-r^{zQ_1}_{Q_1M_2}\sigma_{\varphi Q_1}(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}-$$

$$-\int_{S_3}\frac{-r^{zQ_1}_{Q_1M_3}\sigma_{\varphi Q_1}(M_3)}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}-\int_{S_4}\frac{r^{\varphi Q_1}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)-r^{zQ_1}_{Q_1M_4}\sigma_{\varphi Q_1}(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\varphi}(Q_1),\ Q_1\in S_1. \tag{57}$$

Интегралы в (56) и (57) представим в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)-\int_{S_2}\frac{r^{\rho Q_1}_{Q_1M_2}\sigma_z(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+\int_{S_2}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_2}\sigma_{\rho Q_1}(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\int_{S_3}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_3}\sigma_{\rho Q_1}(M_3)}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}-\int_{S_4}\frac{r^{\rho Q_1}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}+\int_{S_4}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_4}\sigma_{\rho Q_1}(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\rho}(Q_1),\ Q_1\in S_1, \tag{58}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)-\int_{S_2}\frac{r^{\varphi Q_1}_{Q_1M_2}\sigma_z(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+\int_{S_2}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_2}\sigma_{\varphi Q_1}(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\int_{S_3}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_3}\sigma_{\varphi Q_1}(M_3)}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}-\int_{S_4}\frac{r^{\varphi Q_1}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}+\int_{S_4}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_4}\sigma_{\varphi Q_1}(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\varphi}(Q_1),\quad Q_1\in S_1. \tag{59}$$

Подставив выражения (31), (32), (38), (39), (45), (46), (52), (53) в уравнения (58), (59), получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)-\int_{S_2}\frac{r^{\rho Q_1}_{Q_1M_2}\sigma_z(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}-\int_{S_2}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_2}\sin(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_2}(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\int_{S_3}\frac{r^{zQ_1}_{Q_1M_3}(\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\rho M_3}(M_3)-\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_3}(M_3))}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}-$$

$$-\int\limits_{S_4}\frac{r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}-\int\limits_{S_4}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_4}\sin(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_4}(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\rho}(Q_1),\;\; Q_1\in S_1, \tag{60}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)-\int\limits_{S_2}\frac{r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_2}\sigma_z(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+\int\limits_{S_2}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_2}\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_2}(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\int\limits_{S_3}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_3}(\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\rho M_3}(M_3)+\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_3}(M_3))}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}-$$

$$-\int\limits_{S_4}\frac{r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}+\int\limits_{S_4}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_4}\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_4}(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\varphi}(Q_1),\;\; Q_1\in S_1. \tag{61}$$

Уравнения (60) и (61) запишем в виде

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)-\int\limits_{S_2}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_2}\sin(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_2}(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}-$$

$$-\int\limits_{S_2}\frac{r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_2}\sigma_z(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}+\int\limits_{S_3}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\rho M_3}(M_3)}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}-$$

$$-\int\limits_{S_3}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_3}\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_3}(M_3)}{r^3_{Q_1\,M_3}}ds_{M_3}-$$

$$-\int\limits_{S_4}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_4}\sin(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_4}(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}-\int\limits_{S_4}\frac{r^{\rho_{Q_1}}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)}{r^3_{Q_1\,M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\rho}(Q_1), Q_1\in S_1. \tag{62}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)+\int\limits_{S_2}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_2}\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_2}(M_2)}{r^3_{Q_1\,M_2}}ds_{M_2}-$$

$$-\int\limits_{S_2}\frac{r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_2}\sigma_z(M_2)}{r^3_{Q_1M_2}}ds_{M_2}+\int\limits_{S_3}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_3}\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\rho M_3}(M_3)}{r^3_{Q_1M_3}}ds_{M_3}+$$

$$+\int\limits_{S_3}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_3}(M_3)}{r^3_{Q_1M_3}}ds_{M_3}+$$

$$+\int\limits_{S_4}\frac{r^{z_{Q_1}}_{Q_1M_4}\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_1})\sigma_{\varphi M_4}(M_4)}{r^3_{Q_1M_4}}ds_{M_4}-\int\limits_{S_4}\frac{r^{\varphi_{Q_1}}_{Q_1M_4}\sigma_z(M_4)}{r^3_{Q_1M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-F_{1\varphi}(Q_1),\ Q_1\in S_1. \qquad (63)$$

С учетом введенных в [1] обозначений ядер интегральных операторов уравнения (62), (63) принимают вид

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)-\int\limits_{S_2}ZS(Q_1,M_2)\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2}-\int\limits_{S_2}CR(Q_1,M_2)\sigma_z(M_2)\,ds_{M_2}+$$

$$+\int\limits_{S_3}ZC(Q_1,M_3)\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3}-\int\limits_{S_3}ZS(Q_1,M_3)\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3}-$$

$$-\int\limits_{S_4}ZS(Q_1,M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,ds_{M_4}-\int\limits_{S_4}CR(Q_1,M_4)\sigma_z(M_4)\,ds_{M_4}=-F_{1\rho}(Q_1),$$

$$Q_1\in S_1. \qquad (64)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)+\int\limits_{S_2}ZC(Q_1,M_2)\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2}-\int\limits_{S_2}SR(Q_1,M_2)\sigma_z(M_2)\,ds_{M_2}+$$

$$+\int\limits_{S_3}ZS(Q_1,M_3)\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3}+\int\limits_{S_3}ZC(Q_1,M_3)\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3}+$$

$$+\int\limits_{S_4}ZC(Q_1,M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,ds_{M_4}-\int\limits_{S_4}SR(Q_1,M_4)\sigma_z(M_4)\,ds_{M_4}=-F_{1\varphi}(Q_1),$$

$$Q_1\in S_1. \qquad (65)$$

Запишем уравнения (64), (65) в операторном виде:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1,t)-ZS_{12}\sigma_{\varphi M_2}-CR_{12}\,\sigma_{zM_2}+ZC_{13}\sigma_{\rho M_3}-ZS_{13}\sigma_{\varphi M_3}-$$

$$-ZS_{14}\sigma_{\varphi M_4}-CR_{14}\,\sigma_{zM_4}=-F_{1\rho}(Q_1),\quad Q_1\in S_1, \qquad (66)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1,t)+ZC_{12}\sigma_{\varphi M_2}-SR_{12}\,\sigma_{zM_2}+ZS_{13}\sigma_{\rho M_2}+ZC_{13}\sigma_{\varphi M_3}+$$

$$+ZC_{14}\sigma_{\varphi M_4}-SR_{14}\sigma_{zM_4}=-F_{1\varphi}(Q_1),\,Q_1\in S_1. \qquad (67)$$

Смысл введенных в (66), (67) операторов следующий:

$$\int_{S_2} ZS(Q_1,M_2)\,\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2}=ZS_{12}\sigma_{\varphi M_2},$$

$$\int_{S_2} CR(Q_1,M_2)\,\sigma_z(M_2)\,ds_{M_2}=CR_{12}\sigma_{zM_2},$$

$$\int_{S_3} ZC(Q_1,M_3)\,\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3}=ZC_{13}\sigma_{\rho M_3},$$

$$\int_{S_3} ZS(Q_1,M_3)\,\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3}=ZS_{13}\sigma_{\varphi M_3},$$

$$\int_{S_4} ZS(Q_1,M_4)\,\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,ds_{M_4}=ZS_{14}\sigma_{\varphi M_4},$$

$$\int_{S_4} CR(Q_1,M_4)\,\sigma_z(M_4)\,ds_{M_4}=CR_{14}\,\sigma_{zM_4},$$

$$\int_{S_2} ZC(Q_1,M_2)\,\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2}=ZC_{12}\sigma_{\varphi M_2},$$

$$\int_{S_2} SR(Q_1,M_2)\,\sigma_z(M_2)\,ds_{M_2}=SR_{12}\sigma_{zM_2},$$

$$\int_{S_3} ZS(Q_1,M_3)\,\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3}=ZS_{13}\sigma_{\rho M_3},$$

$$\int_{S_3} ZC(Q_1,M_3)\,\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3}=ZC_{13}\sigma_{\varphi M_3},$$

$$\int_{S_4} ZC(Q_1,M_4)\,\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,ds_{M_4}=ZC_{14}\sigma_{\varphi M_4},$$

$$\int_{S_4} SR(Q_1,M_4)\,\sigma_z(M_4)\,ds_{M_4}=SR_{14}\,\sigma_{zM_4}.$$

Преобразование векторного интегрального уравнения (12) к скалярной СИУ. Представим векторное уравнение (12) в развернутом виде:

$$\frac{2\pi}{\chi}\,\sigma_2(Q_2,t)+\int\limits_{S_1}\frac{[\overline{n}_{Q_2}\overline{G}_{21}(Q_2,M_1)]}{r^3_{Q_2M_1}}\,ds_{M_1}+$$

$$+\int\limits_{S_2}\frac{[\overline{n}_{Q_2}\overline{G}_{22}(Q_2,M_2)]}{r^3_{Q_2M_2}}\,ds_{M_2}+\int\limits_{S_3}\frac{[\overline{n}_{Q_2}\overline{G}_{23}(Q_2,M_3)]}{r^3_{Q_2M_3}}\,ds_{M_3}+$$

$$+\int\limits_{S_4}\frac{[\overline{n}_{Q_2}\overline{G}_{24}(Q_2,M_4)]}{r^3_{Q_2M_4}}\,ds_{M_4}=-D_{S_20k}\overline{\delta}_{0k},\quad Q_2\in S_2. \tag{68}$$

Здесь

$$\overline{G}_{21}(Q_2,M_1)=\overline{e}_\rho(Q_2)G_{21\rho}(Q_2,M_1)+\overline{e}_\varphi(Q_2)G_{21\varphi}(Q_2,M_1)+\overline{e}_zG_{21z}(Q_2,M_1),$$

$$\overline{G}_{22}(Q_2,M_2)=\overline{e}_\rho(Q_2)G_{22\rho}(Q_2,M_2)+\overline{e}_\varphi(Q_2)G_{22\varphi}(Q_2,M_2)+\overline{e}_zG_{22z}(Q_2,M_2),$$

$$\overline{G}_{23}(Q_2,M_3)=\overline{e}_\rho(Q_2)G_{23\rho}(Q_2,M_3)+\overline{e}_\varphi(Q_2)G_{23\varphi}(Q_2,M_3)+\overline{e}_zG_{23z}(Q_2,M_3),$$

$$\overline{G}_{24}(Q_2,M_4)=\overline{e}_\rho(Q_2)G_{24\rho}(Q_2,M_4)+\overline{e}_\varphi(Q_2)G_{24\varphi}(Q_2,M_4)+\overline{e}_zG_{24z}(Q_2,M_4),$$

$$\overline{n}_{Q_2}=-\overline{e}_\rho(Q_2);$$

$$[\overline{n}_{Q_2}\overline{G}_{21}(Q_2,M_1)]=\begin{vmatrix}\overline{e}_\rho(Q_2) & \overline{e}_\varphi(Q_2) & \overline{e}_z\\ -1 & 0 & 0\\ G_{21\rho}(Q_2,M_1) & G_{21\varphi}(Q_2,M_1) & G_{21z}(Q_2,M_1)\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{e}_\varphi(Q_2)\,G_{21z}(Q_2,M_1)-\overline{e}_zG_{21\varphi}(Q_2,M_1), \tag{69}$$

$$[\overline{n}_{Q_2}\overline{G}_{22}(Q_2,M_2)]=\begin{vmatrix}\overline{e}_\rho(Q_2) & \overline{e}_\varphi(Q_2) & \overline{e}_z\\ -1 & 0 & 0\\ G_{22\rho}(Q_2,M_2) & G_{22\varphi}(Q_2,M_2) & G_{22z}(Q_2,M_2)\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{e}_\varphi(Q_2)\,G_{22z}(Q_2,M_2)-\overline{e}_zG_{22\varphi}(Q_2,M_2), \tag{70}$$

$$[\overline{n}_{Q_2}\overline{G}_{23}(Q_2,M_3)]=\begin{vmatrix}\overline{e}_\rho(Q_2) & \overline{e}_\varphi(Q_2) & \overline{e}_z\\ -1 & 0 & 0\\ G_{23\rho}(Q_2,M_3) & G_{23\varphi}(Q_2,M_3) & G_{23z}(Q_2,M_3)\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{e}_\varphi(Q_2)\,G_{23z}(Q_2,M_3)-\overline{e}_zG_{23\varphi}(Q_2,M_3), \tag{71}$$

$$[\bar{n}_{Q_2}\bar{G}_{24}(Q_2,M_4)]=\begin{vmatrix}\bar{e}_\rho(Q_2) & \bar{e}_\varphi(Q_2) & \bar{e}_z\\ -1 & 0 & 0\\ G_{24\rho}(Q_2,M_4) & G_{24\varphi}(Q_2,M_4) & G_{24z}(Q_2,M_4)\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{e}_\varphi(Q_2)\,G_{24z}(Q_2,M_4)-\bar{e}_z G_{24\varphi}(Q_2,M_4). \qquad (72)$$

Подставив (69)—(72) в (68), получим

$$\frac{2\pi}{\chi}(\bar{e}_\varphi(Q_2)\,\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)+\bar{e}_z(Q_2)\,\sigma_z(Q_2))+$$

$$+\bar{e}_\varphi(Q_2)\int_{S_1}\frac{G_{21z}(Q_2,M_1)}{r^3_{Q_2 M_1}}ds_{M_1}-\bar{e}_z\int_{S_1}\frac{G_{21\varphi}(Q_2,M_1)}{r^3_{Q_2 M_1}}ds_{M_1}+$$

$$+\bar{e}_\varphi(Q_2)\int_{S_2}\frac{G_{22z}(Q_2,M_2)}{r^3_{Q_2 M_2}}ds_{M_2}-\bar{e}_z\int_{S_2}\frac{G_{22\varphi}(Q_2,M_2)}{r^3_{Q_2 M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\bar{e}_\varphi(Q_2)\int_{S_3}\frac{G_{23z}(Q_2,M_3)}{r^3_{Q_2 M_3}}ds_{M_3}-\bar{e}_z\int_{S_3}\frac{G_{23\varphi}(Q_2,M_3)}{r^3_{Q_2 M_3}}ds_{M_3}+$$

$$+\bar{e}_\rho(Q_2)\int_{S_4}\frac{\bar{e}_\varphi(Q_2)\,G_{24z}(Q_2,M_4)}{r^3_{Q_2 M_4}}ds_{M_4}-\bar{e}_z\int_{S_4}\frac{G_{24\varphi}(Q_2,M_4)}{r^3_{Q_2 M_4}}ds_{M_4}=$$

$$=-D_{S_2 0k}\bar{\delta}_{0k}=-\bar{e}_\varphi(Q_2)F_{2\varphi}(Q_2)-\bar{e}_z F_{2z}(Q_2),\ Q_2\in S_2.$$

Приравняв выражения при $\bar{e}_\varphi(Q_2)$ и $\bar{e}_z$ справа и слева, получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)+\int_{S_1}\frac{G_{21z}(Q_2,M_1)}{r^3_{Q_2 M_1}}ds_{M_1}+\int_{S_2}\frac{G_{22z}(Q_2,M_2)}{r^3_{Q_2 M_2}}ds_{M_2}+$$

$$+\int_{S_3}\frac{G_{23z}(Q_2,M_3)}{r^3_{Q_2 M_3}}ds_{M_3}+\int_{S_4}\frac{G_{24z}(Q_2,M_4)}{r^3_{Q_2 M_4}}ds_{M_4}=-F_{2\varphi}(Q_2),\ Q_2\in S_2, \quad (73)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2)-\int_{S_1}\frac{G_{21\varphi}(Q_2,M_1)}{r^3_{Q_2 M_1}}ds_{M_1}-\int_{S_2}\frac{G_{22\varphi}(Q_2,M_2)}{r^3_{Q_2 M_2}}ds_{M_2}-$$

$$-\int_{S_3}\frac{G_{23\varphi}(Q_2,M_3)}{r^3_{Q_2 M_3}}ds_{M_3}-\int_{S_4}\frac{G_{24\varphi}(Q_2,M_4)}{r^3_{Q_2 M_4}}ds_{M_4}=-F_{2z}(Q_2),\ Q_2\in S_2. \quad (74)$$

Определим входящие в (73), (74) элементы $G_{21\varphi}(Q_2,M_1)$, $G_{22\varphi}(Q_2,M_2)$, $G_{23\varphi}(Q_2,M_3)$, $G_{24\varphi}(Q_2,M_4)$, $G_{21z}(Q_2,M_1)$, $G_{22z}(Q_2,M_2)$, $G_{23z}(Q_2,M_3)$,

$G_{24z}(Q_2, M_4)$. Для этого раскроем векторные произведения для $\overline{G}_{21}(Q_2, M_1)$, $\overline{G}_{22}(Q_2, M_2)$, $\overline{G}_{23}(Q_2, M_3)$, $\overline{G}_{24}(Q_2, M_4)$:

$$\overline{G}_{21}(Q_2, M_1) = \overline{e}_\rho(Q_2)\, G_{21\rho}(Q_2, M_1) + \overline{e}_\varphi(Q_2)\, G_{21\varphi}(Q_2, M_1) +$$
$$+ \overline{e}_z G_{21z}(Q_2, M_1) = [\overline{r}_{Q_2 M_1} \overline{\sigma}_1(M_1)]. \tag{75}$$

Подставив в (75) формулы

$$\overline{r}_{Q_2 M_1} = \overline{e}_\rho(Q_2)\, r_{Q_2 M_1}^{\rho_{Q_2}} + \overline{e}_\varphi(Q_2)\, r_{Q_2 M_1}^{\varphi_{Q_2}} + \overline{e}_z(Q_2)\, r_{Q_2 M_1}^{z_{Q_2}},$$

$$\overline{\sigma}_1(M_1) = \overline{e}_\rho(Q_2)\, \sigma_{\rho Q_2}(M_1) + \overline{e}_\varphi(Q_2)\, \sigma_{\varphi Q_2}(M_1),$$

где

$$r_{Q_2 M_1}^{\rho_{Q_2}} = \rho_{M_1} \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) - R_2,\ r_{Q_2 M_1}^{\varphi_{Q_2}} = \rho_{M_1} \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}),$$

$$r_{Q_2 M_1}^{z_{Q_2}} = (z_{M_1} - z_{Q_2}) = Z_1 - z_{Q_2},$$

$$\sigma_{\rho Q_2}(M_1) = \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2})\, \sigma_{\rho M_1}(M_1) - \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2})\, \sigma_{\varphi M_1}(M_1), \tag{76}$$

$$\sigma_{\varphi Q_2}(M_1) = \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2})\, \sigma_{\rho M_1}(M_1) + \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2})\, \sigma_{\varphi M_1}(M_1), \tag{77}$$

запишем

$$\overline{G}_{21}(Q_2, M_1) = \overline{e}_\rho(Q_2)\, G_{21\rho}(Q_2, M_1) + \overline{e}_\varphi(Q_2)\, G_{21\varphi}(Q_2, M_1) + \overline{e}_z G_{21z}(Q_2, M_1) =$$

$$= [\overline{r}_{Q_2 M_1} \overline{\sigma}_1(M_1)] = \begin{vmatrix} \overline{e}_\rho(Q_2) & \overline{e}_\varphi(Q_2) & \overline{e}_z \\ r_{Q_2 M_1}^{\rho_{Q_2}} & r_{Q_2 M_1}^{\varphi_{Q_2}} & r_{Q_2 M_1}^{z_{Q_2}} \\ \sigma_{\rho Q_2}(M_1) & \sigma_{\varphi Q_2}(M_1) & 0 \end{vmatrix} = -\overline{e}_\rho(Q_2) r_{Q_2 M_1}^{z_{Q_2}} \sigma_{\varphi Q_2}(M_1) +$$

$$+ \overline{e}_\varphi(Q_2) r_{Q_2 M_1}^{z_{Q_2}} \sigma_{\rho Q_2}(M_1) + \overline{e}_z (r_{Q_2 M_1}^{\rho_{Q_2}} \sigma_{\varphi Q_2}(M_1) - r_{Q_2 M_1}^{\varphi_{Q_2}} \sigma_{\rho Q_2}(M_1)).$$

Таким образом, получаем

$$G_{21\rho}(Q_2, M_1) = -r_{Q_2 M_1}^{z_{Q_2}} \sigma_{\varphi Q_2}(M_1),\ G_{21\varphi}(Q_2, M_1) = r_{Q_2 M_1}^{z_{Q_2}} \sigma_{\rho Q_2}(M_1), \tag{78}$$

$$G_{21z}(Q_2, M_1) = r_{Q_2 M_1}^{\rho_{Q_2}} \sigma_{\varphi Q_2}(M_1) - r_{Q_2 M_1}^{\varphi_{Q_2}} \sigma_{\rho Q_2}(M_1); \tag{79}$$

$$\overline{G}_{22}(Q_2, M_2) = \overline{e}_\rho(Q_2)\, G_{22\rho}(Q_2, M_2) + \overline{e}_\varphi(Q_2)\, G_{22\varphi}(Q_2, M_2) +$$
$$+ \overline{e}_z G_{22z}(Q_2, M_2) = [\overline{r}_{Q_2 M_2} \overline{\sigma}_2(M_2)]. \tag{80}$$

Подставив в векторное произведение (80) формулы

$$\overline{r}_{Q_2 M_2} = \overline{e}_\rho(Q_2)\, r_{Q_2 M_2}^{\rho_{Q_2}} + \overline{e}_\varphi(Q_2)\, r_{Q_2 M_2}^{\varphi_{Q_2}} + \overline{e}_z r_{Q_2 M_2}^{z_{Q_2}},$$

$$\overline{\sigma}(M_2)=\overline{e}_\varphi(M_2)\sigma_{\varphi M_2}(M_2)+\overline{e}_z(M_2)\sigma_z(M_2)=$$
$$=\overline{e}_\rho(Q_2)\sigma_{\rho Q_2}(M_2)+\overline{e}_\varphi(Q_2)\sigma_{\varphi Q_2}(M_2)+\overline{e}_z\sigma_z(M_2),$$

где

$$r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2}=\rho_{M_2}\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})-R_2=R_2\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})-R_2,$$
$$r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2}=\rho_{M_2}\sin(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=R_2\sin(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2}),$$
$$r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_2}=(z_{M_2}-z_{Q_2}),$$

$$\sigma_{\rho Q_2}(M_2)=-\sin(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})\sigma_{\varphi M_2}(M_2), \tag{81}$$

$$\sigma_{\varphi Q_2}(M_2)=\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})\sigma_{\varphi M_2}(M_2), \tag{82}$$

получим

$$\overline{G}_{22}(Q_2,M_2)=[\overline{r}_{Q_2M_2}\overline{\sigma}_2(M_2)]=\begin{vmatrix}\overline{e}_\rho(Q_2) & \overline{e}_\varphi(Q_2) & \overline{e}_z\\ r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2} & r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2} & r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_2}\\ \sigma_{\rho Q_2}(M_2) & \sigma_{\varphi Q_2}(M_2) & \sigma_z(M_2)\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{e}_\rho(Q_2)(r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_z(M_2)-r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\varphi Q_2}(M_2))-\overline{e}_\varphi(Q_2)(r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_z(M_2)-$$
$$-r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\rho Q_2}(M_2))+\overline{e}_z(r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\varphi Q_2}(M_2)-r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\rho Q_2}(M_2)).$$

Следовательно,

$$G_{22\rho}(Q_2,M_2)=r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_z(M_2)-r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\varphi Q_2}(M_2),$$

$$G_{22\varphi}(Q_2,M_2)=-r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_z(M_2)+r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\rho Q_2}(M_2), \tag{83}$$

$$G_{22z}(Q_2,M_2)=r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\varphi Q_2}(M_2)-r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sigma_{\rho Q_2}(M_2); \tag{84}$$

$$\overline{G}_{23}(Q_2,M_3)=\overline{e}_\rho(Q_2)G_{23\rho}(Q_2,M_3)+\overline{e}_\varphi(Q_2)G_{23\varphi}(Q_2,M_3)+$$
$$+\overline{e}_zG_{23z}(Q_2,M_3)=[\overline{r}_{Q_2M_3}\overline{\sigma}_3(M_3)]. \tag{85}$$

Подставив в векторное произведение (85) выражения

$$\overline{r}_{Q_2M_3}=\overline{e}_\rho(Q_2)r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_3}+\overline{e}_\varphi(Q_2)r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_3}+\overline{e}_zr^{z_{Q_2}}_{Q_2M_3},$$

$$\overline{\sigma}(M_3)=\overline{e}_\rho(M_3)\sigma_{\rho M_3}(M_3)+\overline{e}_\varphi(M_3)\sigma_{\varphi M_3}(M_3)=$$
$$=\overline{e}_\rho(Q_2)\sigma_{\rho Q_2}(M_3)+\overline{e}_\varphi(Q_2)\sigma_{\varphi Q_2}(M_3),$$

где

$$r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_3}=\rho_{M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-\rho_{Q_2}=\rho_{M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-R_2,$$

$$r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_3}=\rho_{M_3}\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2}),\quad r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_3}=(z_{M_3}-z_{Q_2})=Z_3-z_{Q_2},$$

$$\sigma_{\rho Q_2}(M_3)=\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sigma_{\rho M_3}(M_3)-\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sigma_{\varphi M_3}(M_3), \quad (86)$$

$$\sigma_{\varphi Q_2}(M_3)=\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sigma_{\rho M_3}(M_3)+\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sigma_{\varphi M_3}(M_3), \quad (87)$$

получим

$$\overline{G}_{23}(Q_2,M_3)=[\overline{r}_{Q_2M_3}\overline{\sigma}_3(M_3)]=\begin{vmatrix}\overline{e}_\rho(Q_2) & \overline{e}_\varphi(Q_2) & \overline{e}_z\\ r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_3} & r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_3} & r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_3}\\ \sigma_{\rho Q_2}(M_3) & \sigma_{\varphi Q_2}(M_3) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-\overline{e}_\rho(Q_2)\,r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\varphi Q_2}(M_3)+\overline{e}_\varphi(Q_2)\,r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\rho Q_2}(M_3)+$$

$$+\overline{e}_z(r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\varphi Q_2}(M_3)-r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\rho Q_2}(M_3)).$$

Тогда

$$G_{23\rho}(Q_2,M_3)=-r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\varphi Q_2}(M_3),$$

$$G_{23\varphi}(Q_2,M_3)=r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\rho Q_2}(M_3), \quad (88)$$

$$G_{23z}(Q_2,M_3)=r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\varphi Q_2}(M_3)-r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sigma_{\rho Q_2}(M_3); \quad (89)$$

$$\overline{G}_{24}(Q_2,M_4)=\overline{e}_\rho(Q_2)\,G_{24\rho}(Q_2,M_4)+\overline{e}_\varphi(Q_2)\,G_{24\varphi}(Q_2,M_4)+$$

$$+\overline{e}_zG_{24z}(Q_2,M_4)=[\overline{r}_{Q_2M_4}\overline{\sigma}_4(M_4)]. \quad (90)$$

Подставив в векторное произведение (90) выражения

$$\overline{r}_{Q_2M_4}=\overline{e}_\rho(Q_2)\,r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_4}+\overline{e}_\varphi(Q_2)\,r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_4}+\overline{e}_z r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_4},$$

$$\overline{\sigma}(M_4)=\overline{e}_\rho(M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4)+\overline{e}_z\sigma_z(M_4)=$$

$$=\overline{e}_\rho(Q_2)\sigma_{\rho Q_2}(M_4)+\overline{e}_\varphi(Q_2)\sigma_{\varphi Q_2}(M_4)+\overline{e}_z\sigma_z(M_4),$$

где

$$r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_4}=\rho_{M_4}\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})-\rho_{Q_2}=R_4\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})-R_2,$$

$$r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_4}=\rho_{M_4}\sin(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=R_4\sin(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2}),\ r^{z_{Q_2}}_{Q_2M_4}=(z_{M_4}-z_{Q_2}),$$

$$\sigma_{\rho Q_2}(M_4) = -\sin(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_2})\sigma_{\varphi M_4}(M_4), \tag{91}$$

$$\sigma_{\varphi Q_2}(M_4) = \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_2})\sigma_{\varphi M_4}(M_4), \tag{92}$$

получим

$$\overline{G}_{24}(Q_2, M_4) = [\overline{r}_{Q_2 M_4}\overline{\sigma}_4(M_4)] = \begin{vmatrix} \overline{e}_\rho(Q_2) & \overline{e}_\varphi(Q_2) & \overline{e}_z \\ r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_4} & r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_4} & r^{z_{Q_2}}_{Q_2 M_4} \\ \sigma_{\rho Q_2}(M_4) & \sigma_{\varphi Q_2}(M_4) & \sigma_z(M_4) \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{e}_\rho(Q_2)(r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_z(M_4) - r^{z_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\varphi Q_2}(M_4)) - \overline{e}_\varphi(Q_2)(r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_z(M_4) -$$

$$- r^{z_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\rho Q_2}(M_4)) + \overline{e}_z(r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\varphi Q_2}(M_4) - r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\rho Q_2}(M_4)).$$

Тогда

$$G_{24\rho}(Q_2, M_4) = r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_z(M_4) - r^{z_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\varphi Q_2}(M_4),$$

$$G_{24\varphi}(Q_2, M_4) = r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_z(M_4) - r^{z_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\rho Q_2}(M_4), \tag{93}$$

$$G_{24z}(Q_2, M_4) = (r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\varphi Q_2}(M_4) - r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\rho Q_2}(M_4)). \tag{94}$$

Подставим в уравнения (73), (74) полученные выражения (78), (79), (83), (84), (88), (89), (93), (94):

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2) + \int\limits_{S_1} \frac{r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_1}\sigma_{\varphi_{Q_2}}(M_1) - r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_1}\sigma_{\rho Q_2}(M_1)}{r^3_{Q_2\, M_1}} ds_{M_1} +$$

$$+ \int\limits_{S_2} \frac{r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_2}\sigma_{\varphi_{Q_2}}(M_2) - r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_2}\sigma_{\rho Q_2}(M_2)}{r^3_{Q_2\, M_2}} ds_{M_2} +$$

$$+ \int\limits_{S_3} \frac{r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_3}\sigma_{\varphi_{Q_2}}(M_3) - r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_3}\sigma_{\rho Q_2}(M_3)}{r^3_{Q_2\, M3}} ds_{M_3} +$$

$$+ \int\limits_{S_4} \frac{r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\varphi_{Q_2}}(M_4) - r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2 M_4}\sigma_{\rho Q_2}(M_4)}{r^3_{Q_2\, M_4}} ds_{M_4} = -F_{2\varphi}(Q_2),\ Q_2 \in S_2, \tag{95}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2) - \int\limits_{S_1} \frac{r^{z_{Q_2}}_{Q_2 M_1}\sigma_{\rho_{Q_2}}(M_1)}{r^3_{Q_2\, M_1}} ds_{M_1} - \int\limits_{S_2} \frac{-r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2 M_2}\sigma_z(M_2) + r^{z_{Q_2}}_{Q_2 M_2}\sigma_{\rho Q_2}(M_2)}{r^3_{Q_2\, M_2}} ds_{M_2} -$$

$$-\int_{S_3}\frac{r_{Q_2M_3}^{z_{Q_2}}\sigma_{\rho Q_2}(M_3)}{r_{Q_2\,M3}^3}ds_{M_3}-\int_{S_4}\frac{r_{Q_2M_4}^{\rho_{Q_2}}\sigma_z(M_4)-r_{Q_2M_4}^{z_{Q_2}}\sigma_{\rho Q_2}(M_4)}{r_{Q_2\,M_4}^3}ds_{M_4}=-F_{2z}(Q_2),$$

$$Q_2\in S_2. \qquad (96)$$

Интегралы (95) и (96) представим в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)+\int_{S_1}\frac{r_{Q_2M_1}^{\rho_{Q_2}}\sigma_{\varphi_{Q_2}}(M_1)}{r_{Q_2\,M_1}^3}ds_{M_1}-\int_{S_1}\frac{r_{Q_2M_1}^{\varphi_{Q_2}}\sigma_{\rho\,Q_2}(M_1)}{r_{Q_2\,M_1}^3}ds_{M_1}+$$

$$+\int_{S_2}\frac{r_{Q_2M_2}^{\rho_{Q_2}}\sigma_{\varphi_{Q_2}}(M_2)}{r_{Q_2\,M_2}^3}ds_{M_2}-\int_{S_2}\frac{r_{Q_2M_2}^{\varphi_{Q_2}}\sigma_{\rho Q_2}(M_2)}{r_{Q_2\,M_2}^3}ds_{M_2}+$$

$$+\int_{S_3}\frac{r_{Q_2M_3}^{\rho_{Q_2}}\sigma_{\varphi Q_2}(M_3)}{r_{Q_2\,M_3}^3}ds_{M_3}-\int_{S_3}\frac{r_{Q_2M_3}^{\varphi_{Q_2}}\sigma_{\rho Q_2}(M_3)}{r_{Q_2\,M_3}^3}ds_{M_3}+$$

$$+\int_{S_4}\frac{r_{Q_2M_4}^{\rho_{Q_2}}\sigma_{\varphi Q_2}(M_4)}{r_{Q_2\,M_4}^3}ds_{M_4}-\int_{S_4}\frac{r_{Q_2M_4}^{\varphi_{Q_2}}\sigma_{\rho Q_2}(M_4)}{r_{Q_2\,M_4}^3}ds_{M_4}=-F_{2\varphi}(Q_2),\,Q_2\in S_2, \qquad (97)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2)-\int_{S_1}\frac{r_{Q_2M_1}^{z_{Q_2}}\sigma_{\rho_{Q_2}}(M_1)}{r_{Q_2\,M_1}^3}ds_{M_1}+\int_{S_2}\frac{r_{Q_2M_2}^{\rho_{Q_2}}\sigma_z(M_2)}{r_{Q_2\,M_2}^3}ds_{M_2}-$$

$$-\int_{S_2}\frac{r_{Q_2M_2}^{z_{Q_2}}\sigma_{\rho Q_2}(M_2)}{r_{Q_2\,M_2}^3}ds_{M_2}-\int_{S_3}\frac{r_{Q_2M_3}^{z_{Q_2}}\sigma_{\rho_{Q_2}}(M_3)}{r_{Q_2\,M_3}^3}ds_{M_3}-\int_{S_4}\frac{r_{Q_2M_4}^{\rho_{Q_2}}\sigma_z(M_4)}{r_{Q_2\,M_4}^3}ds_{M_4}+$$

$$+\int_{S_4}\frac{r_{Q_2M_4}^{z_{Q_2}}\sigma_{\rho Q_2}(M_4)}{r_{Q_2\,M_4}^3}ds_{M_4}=-F_{2z}(Q_2),\;Q_2\in S_2. \qquad (98)$$

Подставив выражения (76), (77), (81), (82), (86), (87), (91), (92) в уравнение (97), получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)+\int_{S_1}\frac{r_{Q_2M_1}^{\rho_{Q_2}}\sin(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})-r_{Q_2M_1}^{\varphi_{Q_2}}\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})}{r_{Q_2\,M_1}^3}\sigma_{\rho M_1}(M_1)ds_{M_1}+$$

$$+\int_{S_1}\frac{r_{Q_2M_1}^{\rho_{Q_2}}\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})+r_{Q_2M_1}^{\varphi_{Q_2}}\sin(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})}{r_{Q_2\,M_1}^3}\sigma_{\varphi M_1}(M_1)ds_{M_1}+$$

$$+\int_{S_2} \frac{r_{Q_2M_1}^{\rho Q_2} \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_2}) + r_{Q_2M_2}^{\varphi Q_2} \sin(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_2})}{r_{Q_2 M_2}^3} \sigma_{\varphi M_2}(M_2)\, ds_{M_2} +$$

$$+\int_{S_3} \frac{r_{Q_2M_3}^{\rho Q_2} \sin(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_2}) - r_{Q_2M_3}^{\varphi Q_2} \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_2})}{r_{Q_2 M_3}^3} \sigma_{\rho M_3}(M_3)\, ds_{M_3} +$$

$$+\int_{S_3} \frac{r_{Q_2M_3}^{\rho Q_2} \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_2}) + r_{Q_2M_3}^{\varphi Q_2} \sin(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_2})}{r_{Q_2 M_3}^3} \sigma_{\varphi M_3}(M_3)\, ds_{M_3} +$$

$$+\int_{S_4} \frac{r_{Q_2M_4}^{\rho Q_2} \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_2}) + r_{Q_2M_4}^{\varphi Q_2} \sin(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_2})}{r_{Q_2 M_4}^3} \sigma_{\varphi M_4}(M_4)\, ds_{M_4} =$$

$$= -F_{2\varphi}(Q_2), \quad Q_2 \in S_2. \tag{99}$$

Преобразуем числители подынтегральных выражений в уравнении (99):

$$r_{Q_2M_1}^{\rho Q_2} \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) - r_{Q_2M_1}^{\varphi Q_2} \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) =$$

$$= \rho_{M_1} \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) - R_2 \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) -$$

$$- \rho_{M_1} \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) = - R_2 \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}). \tag{100}$$

Используя обозначение, введенное в [1],

$$RS(Q, M) = \frac{\rho_Q \sin(\varphi_M - \varphi_Q)}{r_{Q\,M}^3},$$

запишем (100) в следующем виде:

$$r_{Q_2M_1}^{\rho Q_2} \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) - r_{Q_2M_1}^{\varphi Q_2} \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) =$$

$$= \rho_{M_1} \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) - R_2 \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) -$$

$$- \rho_{M_1} \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) =$$

$$= -R_2 \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) = - RS(Q_2, M_1)\, r_{Q_2M_1}^3; \tag{101}$$

$$r_{Q_2M_1}^{\rho Q_2} \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) + r_{Q_2M_1}^{\varphi Q_2} \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) =$$

$$= \rho_{M_1} \cos^2(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) - R_2 \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) + \rho_{M_1} \sin^2(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) =$$

$$=\rho_{M_1}(\cos^2(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})+\sin^2(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_1}-R_2\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2}). \qquad (102)$$

Используя обозначение

$$RC(Q,M)=\frac{\rho_Q\cos(\varphi_M-\varphi_Q)-\rho_M}{r^3_{Q\,M}},$$

запишем (102) в виде

$$r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_1}\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})+r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_1}\sin(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})=\rho_{M_1}\cos^2(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})-$$

$$-R_2\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})+\rho_{M_1}\sin^2(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})=\rho_{M_1}(\cos^2(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})+$$

$$+\sin^2(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_1}-R_2\cos(\varphi_{M_1}-\varphi_{Q_2})=-RC(Q_2,M_1)\,r^3_{Q_2M_1}; \qquad (103)$$

$$r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2}\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})+r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sin(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_2}\cos^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})-R_2\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})+\rho_{M_1}\sin^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_2}(\cos^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})+\sin^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_2}-R_2\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2}). \qquad (104)$$

Затем (104) преобразуется аналогично (102):

$$r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_2}\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})+r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_2}\sin(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_2}\cos^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})-R_2\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})+\rho_{M_1}\sin^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_2}(\cos^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})+\sin^2(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_2}-R_2\cos(\varphi_{M_2}-\varphi_{Q_2})=-RC(Q_2,M_2)\,r^3_{Q_2M_2}; \qquad (105)$$

$$r^{\rho_{Q_2}}_{Q_2M_3}\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-r^{\varphi_{Q_2}}_{Q_2M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-R_2\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-$$

$$-\rho_{M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=-R_2\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2}). \qquad (106)$$

Далее выражение (106) преобразуется аналогично (100):

$$r_{Q_2M_3}^{\rho_{Q_2}}\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-r_{Q_2M_3}^{\varphi_{Q_2}}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-R_2\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-$$

$$-\rho_{M_3}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=-R_2\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=-RS(Q_2,M_3)\,r_{Q_2M_3}^3; \tag{107}$$

$$r_{Q_2M_3}^{\rho_{Q_2}}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})+r_{Q_2M_3}^{\varphi_{Q_2}}\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=\rho_{M_1}\cos^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-$$

$$-R_2\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})+\rho_{M_1}\sin^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_1}(\cos^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})+\sin^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_1}-R_2\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2}). \tag{108}$$

Выражение (108) преобразуется аналогично (102):

$$r_{Q_2M_3}^{\rho_{Q_2}}\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})+r_{Q_2M_3}^{\varphi_{Q_2}}\sin(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=\rho_{M_1}\cos^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})-$$

$$-R_2\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})+\rho_{M_1}\sin^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_1}(\cos^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})+\sin^2(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_1}-R_2\cos(\varphi_{M_3}-\varphi_{Q_2})=-RC(Q_2,M_3)\,r_{Q_2M_3}^3; \tag{109}$$

$$r_{Q_2M_4}^{\rho_{Q_2}}\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})+r_{Q_2M_4}^{\varphi_{Q_2}}\sin(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=\rho_{M_4}\cos^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})-$$

$$-R_2\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})+\rho_{M_4}\sin^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_4}(\cos^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})+\sin^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_4}-R_2\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2}). \tag{110}$$

Выражение (110) также преобразуется аналогично (102):

$$r_{Q_2M_4}^{\rho_{Q_2}}\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})+r_{Q_2M_4}^{\varphi_{Q_2}}\sin(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=\rho_{M_4}\cos^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})-$$

$$-R_2\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})+\rho_{M_4}\sin^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_4}(\cos^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})+\sin^2(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2}))-R_2\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=$$

$$=\rho_{M_4}-R_2\cos(\varphi_{M_4}-\varphi_{Q_2})=-RC(Q_2,M_4)\,r_{Q_2M_4}^3. \tag{111}$$

Подставив выражения (101), (103), (105), (107), (109), (111) в уравнение (99), получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)-\int\limits_{S_1}RS(Q_2,M_1)\sigma_{\rho M_1}(M_1)\,ds_{M_1}-\int\limits_{S_1}RC(Q_2,M_1)\sigma_{\varphi M_1}(M_1)\,ds_{M_1}-$$
$$-\int\limits_{S_2}RC\,(Q_2,M_2)\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2}-\int\limits_{S_3}RS\,(Q_2,M_3)\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3}-$$
$$-\int\limits_{S_3}RC(Q_2,M_3)\sigma_{\varphi M_3}(M_3)ds_{M_3}-\int\limits_{S_4}RC(Q_2,M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4)ds_{M_4}=-F_{2\varphi}(Q_2),$$
$$Q_2\in S_2. \tag{112}$$

Запишем уравнение (112) в операторной форме:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)-RS_{21}\sigma_{\rho M_1}-RC_{21}\sigma_{\varphi M_1}-RC_{22}\sigma_{\varphi M_2}-RS_{23}\sigma_{\rho M_3}-$$
$$-RC_{23}\sigma_{\varphi M_3}-RC_{24}\sigma_{\varphi M_4}=-F_{2\varphi}(Q_2),\,Q_2\in S_2.$$

Аналогично преобразуя уравнение (98), получаем

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2)-ZC_{21}\sigma_{\rho_M}+ZS_{21}\sigma_{\varphi_M}+ZS_{22}\sigma_{\varphi_M}+CR_{22}\sigma_z-ZC_{23}\sigma_{\rho_M}+$$
$$+ZS_{23}\sigma_{\varphi_M}+ZS_{24}\sigma_{\varphi_M}+CR_{24}\sigma_z=-F_{2z}(Q_2),\;\;Q_2\in S_2.$$

Преобразование векторных интегральных уравнений (13), (14) к скалярной СИУ. Преобразуем векторные уравнения (13), (14) подобно тому, как были преобразованы уравнения (11), (12). В результате получим

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho_Q}(Q_3)-ZC_{31}\sigma_{\rho M}+ZS_{31}\sigma_{\varphi M}+CR_{32}\sigma_z+ZS_{32}\sigma_{\varphi M}+CR_{34}\sigma_z+$$
$$+ZS_{34}\sigma_{\varphi M}=-F_{3\rho}(Q_3),\;\;Q_3\in S_3,$$
$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi_Q}(Q_3)-ZS_{31}\sigma_{\rho M}-ZC_{31}\sigma_{\varphi M}+SR_{32}\sigma_z-ZC_{32}\sigma_{\varphi M}+SR_{34}\sigma_z-$$
$$-ZC_{34}\sigma_{\varphi M}=-F_{3\varphi}(Q_3),\;\;Q_3\in S_3,$$
$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi_Q}(Q_4)+RS_{41}\sigma_{\rho M}+RC_{41}\sigma_{\varphi M}+RC_{42}\sigma_{\varphi M}+RS_{43}\sigma_{\rho M}+$$
$$+RC_{43}\sigma_{\varphi M}+RC_{44}\sigma_{\varphi M}=-F_{3\varphi}(Q_4),\;\;Q_4\in S_4,$$
$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_4)+ZC_{41}\sigma_{\rho M}-ZS_{41}\sigma_{\varphi M}-ZS_{42}\sigma_{\varphi M}-RC_{42}\sigma_z+ZC_{43}\sigma_{\rho M}-$$
$$-ZS_{43}\sigma_{\varphi M}-ZS_{44}\sigma_{\varphi M}-RC_{44}\sigma_z=-F_{3z}(Q_4),\;Q_4\in S_4.$$

Таким образом, результирующая скалярная СИУ, полученная после преобразования векторной СИУ (11)—(14), имеет вид

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1)-ZS_{12}\sigma_{\varphi M_2}-CR_{12}\sigma_{zM_2}+ZC_{13}\sigma_{\rho M_3}-ZS_{13}\sigma_{\varphi M_3}-$$

$$-ZS_{14}\sigma_{\varphi M_4}-CR_{14}\sigma_{zM_4}=-F_{1\rho}(Q_1),\, Q_1\in S_1,$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1)+ZC_{12}\sigma_{\varphi M_2}-SR_{12}\sigma_{zM_2}+ZS_{13}\sigma_{\rho M_3}+ZC_{13}\sigma_{\varphi M_3}+$$

$$+ZC_{14}\sigma_{\varphi M_4}-SR_{14}\sigma_{zM_4}=-F_{1\varphi}(Q_1),\; Q_1\in S_1,$$

$$-RS_{21}\sigma_{\rho M_1}-RC_{21}\sigma_{\varphi M_1}+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)-RC_{22}\sigma_{\varphi M_2}-RS_{23}\sigma_{\rho M_3}-$$

$$-RC_{23}\sigma_{\varphi M_3}-RC_{24}\sigma_{\varphi M_4}=-F_{2\varphi}(Q_2),\; Q_2\in S_2,$$

$$-ZC_{21}\sigma_{\rho_{M_1}}+ZS_{21}\sigma_{\varphi_{M_1}}+ZS_{22}\sigma_{\varphi_{M_2}}+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2)+CR_{22}\sigma_{z_{M_2}}-ZC_{23}\sigma_{\rho_{M_3}}+$$

$$+ZS_{23}\sigma_{\varphi_{M_3}}+ZS_{24}\sigma_{\varphi_{M_4}}+CR_{24}\sigma_{z_{M_4}}=-F_{2z}(Q_2),\; Q_2\in S_2,$$

$$-ZC_{31}\sigma_{\rho_{M_1}}+ZS_{31}\sigma_{\varphi_{M_1}}+ZS_{32}\sigma_{\varphi_{M_2}}+CR_{32}\sigma_{z_{M_2}}+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho_{Q_3}}(Q_3)+ZS_{34}\sigma_{\rho_{M_4}}+$$

$$+CR_{34}\sigma_{z_{M_4}}=-F_{3\rho}(Q_3),\; Q_3\in S_3,$$

$$-ZS_{31}\sigma_{\rho_{M_1}}-ZC_{31}\sigma_{\varphi_{M_1}}-ZC_{32}\sigma_{\varphi_{M_2}}+SR_{32}\sigma_{z_{M_2}}+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi_{Q_3}}(Q_3)-ZC_{34}\sigma_{\varphi_{M_4}}+$$

$$+SR_{34}\sigma_{z_{M_4}}=-F_{3\varphi}(Q_3),\; Q_3\in S_3,$$

$$RS_{41}\sigma_{\rho_{M_1}}+RC_{41}\sigma_{\varphi_{M_1}}+RC_{42}\sigma_{\varphi_{M_2}}+RS_{43}\sigma_{\rho_{M_3}}+$$

$$+RC_{43}\sigma_{\varphi_{M_3}}+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi_{Q_4}}(Q_4)+RC_{44}\sigma_{\varphi_{M_4}}=-F_{4\varphi}(Q_4),\, Q_4\in S_4,$$

$$ZC_{41}\sigma_{\rho_{M_1}}-ZS_{41}\sigma_{\varphi_{M_1}}-ZS_{42}\sigma_{\varphi_{M_2}}-CR_{42}\sigma_{z_{M_2}}+ZC_{43}\sigma_{\rho_{M_3}}-$$

$$-ZS_{43}\sigma_{\varphi_{M_3}}-ZS_{44}\sigma_{\varphi_{M_4}}+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{z_{Q_4}}(Q_4)-CR_{44}\sigma_{z_{M_4}}=-F_{4z}(Q_4),\; Q_4\in S_4.$$

Более наглядно полученная СИУ представлена в табл. 3.

Таблица 3

$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_1}(Q_1)$		$-ZS_{12}\sigma_{\varphi M_2}$	$-CR_{12}\ \sigma_{zM_2}$	$+ZC_{13}\sigma_{\rho M_3}$	$-ZS_{13}\sigma_{\varphi M_3}$	$-ZS_{14}\sigma_{\varphi M_4}$	$-CR_{14}\sigma_{zM_4}$	$=-F_{1\rho}(Q_1),\ Q_1\in S_1$
	$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_1}(Q_1)$	$+ZC_{12}\sigma_{\varphi M_2}$	$-SR_{12}\ \sigma_{zM_2}$	$+ZS_{13}\sigma_{\rho M_3}$	$+ZC_{13}\sigma_{\varphi M_3}$	$+ZC_{14}\sigma_{\varphi M_4}$	$-SR_{14}\sigma_{zM_4}$	$=-F_{1\varphi}(Q_1),\ Q_1\in S_1$
$-RS_{21}\sigma_{\rho M_1}$	$-RC_{21}\ \sigma_{\varphi M_1}$	$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2)$ $-RC_{22}\sigma_{\varphi M_2}$		$-RS_{23}\sigma_{\rho M_3}$	$-RC_{23}\sigma_{\varphi M_3}$	$-RC_{24}\sigma_{\varphi M_4}$		$=-F_{2\varphi}(Q_2),\ Q_2\in S_2$
$-ZC_{21}\sigma_{\rho M_1}$	$+ZS_{21}\ \sigma_{\varphi M_1}$	$+ZS_{22}\sigma_{\varphi M_2}$	$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2)$ $+CR_{22}\sigma_{zM_2}$	$-ZC_{23}\sigma_{\rho M_3}$	$+ZS_{23}\sigma_{\varphi M_3}$	$+ZS_{24}\sigma_{\varphi M_4}$	$+CR_{24}\sigma_{zM_4}$	$=-F_{2z}(Q_2),\ Q_2\in S_2$
$-ZC_{31}\sigma_{\rho M_1}$	$+ZS_{31}\ \sigma_{\varphi M_1}$	$+ZS_{32}\sigma_{\varphi M_2}$	$+CR_{32}\sigma_{zM_2}$	$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_3}(Q_3)$		$+ZS_{34}\sigma_{\varphi M_4}$	$+CR_{34}\sigma_{zM_4}$	$=-F_{3\rho}(Q_3),\ Q_3\in S_3$
$-ZS_{31}\sigma_{\rho M_1}$	$-ZC_{31}\ \sigma_{\rho M_1}$	$-ZC_{32}\sigma_{\varphi M_2}$	$+SR_{32}\sigma_{zM_2}$		$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_3}(Q_3)$	$-ZC_{34}\sigma_{\varphi M_4}$	$+SR_{34}\sigma_{zM_4}$	$=-F_{3\varphi}(Q_3),\ Q_3\in S_3$
$+RS_{41}\sigma_{\rho M_1}$	$+RC_{41}\ \sigma_{\varphi M_1}$	$+RC_{42}\sigma_{\varphi M_2}$		$+RS_{43}\sigma_{\rho M_3}$	$+RC_{43}\sigma_{\varphi M_3}$	$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_4}(Q_4)$ $+RC_{44}\sigma_{\varphi M_4}$		$=-F_{4\varphi}(Q_4),\ Q_4\in S_4$
$+ZC_{41}\sigma_{\rho M_1}$	$-ZS_{41}\ \sigma_{\varphi M_1}$	$-ZS_{42}\sigma_{\varphi M_2}$	$-CR_{42}\sigma_{zM_2}$	$+ZC_{43}\sigma_{\rho M_3}$	$-ZS_{43}\sigma_{\varphi M_3}$	$-ZS_{44}\sigma_{\varphi M_4}$	$+\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{zQ_4}(Q_4)$ $-CR_{44}\sigma_{zM_4}$	$=-F_{4z}(Q_4),\ Q_4\in S_4$

Выводы

В результате преобразования векторной СИУ для плотности ТН на канонических участках поверхности магнитопровода цилиндрического ЭМП получена эквивалентная скалярная СИУ относительно проекций векторов ТН на оси цилиндрической системы, лежащих в плоскости касательной к поверхности магнитопровода. Эта система уравнений составляет основу модели трехмерного магнитного поля цилиндрического ЭМП. Ее необходимо использовать при моделировании вихревых токов и электродинамических усилий в жидкой фазе непрерывнолитой заготовки.

A model of three-dimensional magnetic field of the cylindrical electomagnetic stirrer (EMS) based on the scalar system of integral equations (SIE) was obtained as a result of simplification of the vector SIE for magnetization current (MC) on the magnetic circuit surface of the EMS. This system unknowns are projections of density vectors MC which lie in the plane tangential to the magnetic circuit surface.

1. *Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А.* Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода.I // Электрон. моделирование. — 2012. —**34**, № 1. — С. 48—51.

Поступила 28.09.11

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.

КУЧАЕВ Александр Андреевич , д-р техн. наук, вед. науч. сотр. отдела МГД Физико-технологического ин-та металлов и сплавов НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом математического моделирования электромагнитных полей Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский госуниверситет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

КУЧАЕВ Виталий Александрович, аспирант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 2002 г. окончил Национальный технический университет Украины «КПИ». Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.