



УДК 519.711.3:631.382.2:669.174

В. Ф. Евдокимов *, чл.-кор. НАН Украины,

А. А. Кучаев **, д-р техн. наук,

Е. И. Петрушенко *, канд. техн. наук,

В. А. Кучаев *, аспирант

* Ин-т проблем моделирования
в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 424-91-60, e-mail: ypetrushenko@mail.ru, vitalku07@yandex.ru),

** Физико-технологический ин-т металлов и сплавов НАН Украины
(Украина, 03680, Киев-142, ГСП, бульвар Вернадского, 34/1,
тел. (044) 424-04-52, e-mail: alexander-kuchaev@svtonline.com)

Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода. I

В результате упрощения векторной системы интегральных уравнений (СИУ) для токов намагниченности (ТН) на поверхности магнитопровода электромагнитного перемешивателя (ЭМП) получена модель трехмерного магнитного поля цилиндрического ЭМП, в основе которой лежит скалярная СИУ. Неизвестными в ней являются проекции векторов плотности ТН, лежащих в касательной плоскости к поверхности магнитопровода. Задача сформулирована в виде векторной СИУ для ТН на поверхности магнитопровода и приведены формулы, используемые при преобразовании векторной СИУ в скалярную.

В результаті спрощення векторної системи інтегральних рівнянь (СІР) для струмів намагніченості (СН) на поверхні магнітопроводу електромагнітного перемішувача (ЕМП) отримано модель тривимірного магнітного поля циліндричного ЕМП, в основі якої лежить скалярна СІР. Невідомими в ній є проєкції векторів щільності СН, що лежать в дотичній площині до поверхні магнітопроводу. Задачу сформульовано у вигляді векторної СІР для СН на поверхні магнітопроводу та наведено формули, які використано при перетворенні векторної СІР у скалярну.

Ключевые слова: трехмерное магнитное поле, электромагнитный перемешиватель, магнитопровод, токи намагниченности, векторные интегральные уравнения, скалярная система интегральных уравнений.

Для оценки эффективности электромагнитного перемешивания жидкой фазы непрерывнолитой заготовки (НЛЗ) необходимо знать распределение в ней электродинамических усилий (ЭДУ), которые вычисляются по распределению магнитного поля и вихревых токов (ВТ). В работах [1—5]

данная задача рассмотрена в двумерном приближении, для чего использована интегральная модель, представляющая собой скалярную систему интегральных уравнений (СИУ) для токов намагниченности (ТН) на границе сечения магнитопровода электромагнитного перемешивателя (ЭМП) и ВТ в сечении заготовки и кристаллизатора. Однако в связи с существенной трехмерностью электромагнитных полей, находящихся внутри ЭМП и массивных проводников, требуется перейти к трехмерной интегральной модели, представляющей собой векторную СИУ, в состав которой входят векторные интегральные уравнения для ТН на поверхности магнитопровода ЭМП, для ВТ в кристаллизаторе и для ВТ в заготовке. Это, с одной стороны, повышает точность моделирования, а с другой, — существенно усложняет расчет ЭДУ, так как в этом случае все неизвестные СИУ — векторные.

Необходимо также учитывать следующее обстоятельство. Опыт решения скалярных СИУ для двумерных задач показал расхождения метода последовательного решения уравнений. Есть все основания ожидать, что при решении трехмерных задач этот метод также будет расходящимся, что требует применения блочных методов. Однако в этом случае размерность блоков будет на порядок больше, чем в случае двумерных задач. При этом возникает задача уменьшения размерности блоков. В работах [6, 7] учтены параметры электромагнитных процессов при перемешивании и существенно упрощены векторные СИУ для ВТ в заготовке.

Предлагается упростить векторные интегральные уравнения для ТН на поверхности магнитопровода ЭМП, а именно учесть тот факт, что вектор плотности ТН лежит в касательной плоскости к поверхности магнитопровода. Для упрощения преобразований ограничимся цилиндрическим ЭМП с неявными полюсами и будем применять цилиндрическую систему координат.

Система кристаллизатор машины НЛЗ — неявнополюсный ЭМП. Принцип действия системы кристаллизатор — ЭМП такой же, как и у асинхронного двигателя. Ось z декартовой системы координат xuz совмещена с осью системы. Статор системы кристаллизатор — ЭМП, создающий вращающееся магнитное поле (ВМП), состоит из магнитопровода в форме тора прямоугольного сечения (рис. 1) и трехфазной обмотки (рис. 2), содержащей три фазные обмотки одинаковой формы и размеров, соединенные звездой. Каждая из обмоток состоит из двух седлообразных катушек с числом витков $1/2W$. Активные плоскости обмоток пересекаются по оси z и образуют угол 120° .

Будем считать заданными токи в витках обмотки. Предположим, что фазные токи образуют симметричную трехфазную систему. Следовательно

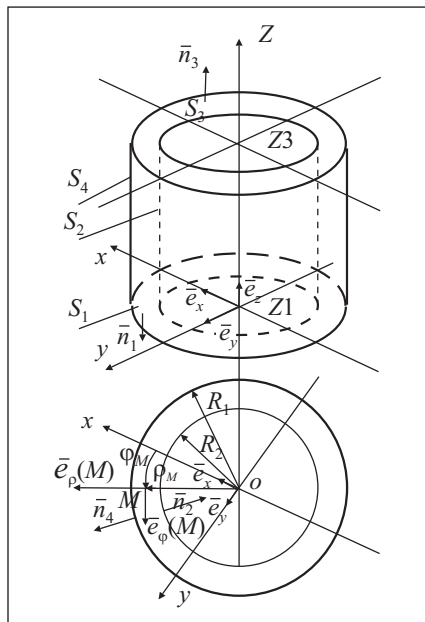


Рис. 1. Магнитопровод ЭМП

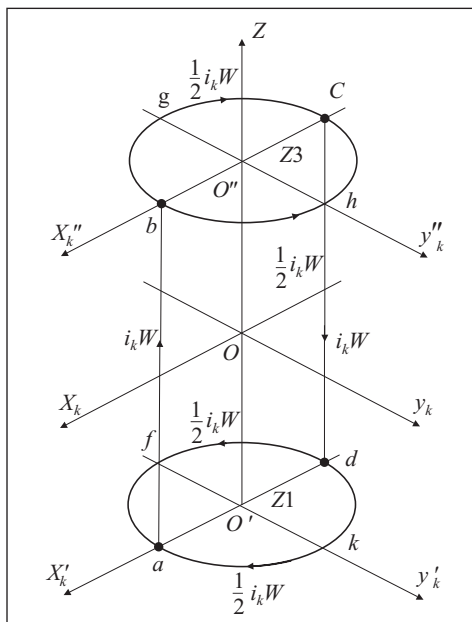


Рис. 2. Обмотка k-й фазы ЭМП

но, при принятых положительных направлениях токи в витках обмоток первой, второй и третьей фаз можно представить в виде

$$i_1(t) = I_m \sin \omega t, \quad i_2(t) = I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad i_3(t) = I_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right),$$

где $\omega = 2\pi f$; f — частота токов; I_m — амплитуда фазных токов.

Векторное интегральное уравнение для ТН на поверхности магнитопровода. Обозначим V^-, V_0, V^+ объемы соответственно магнитопровода, обмотки и пространства, окружающего магнитопровод и обмотки. Объем V_0 обмоток равен сумме объемов фазных обмоток: $V_0 = \sum_{k=1}^3 V_{0k}$,

где V_{0k} — объем обмотки k -й фазы, $k = 1, 2, 3$.

Обозначим S поверхность магнитопровода, μ^-, μ^0, μ^+ — магнитные проницаемости материалов соответственно в объемах V^-, V_0, V^+ ; $\mu^-(Q) = \text{const}, \mu^0 = \mu^+ = 1$.

Векторное интегральное уравнение для мгновенного значения вектора плотности ТН $\bar{\sigma}(Q, t)$ на поверхности S магнитопровода в операторной форме имеет вид [6]

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}(Q, t) + D_{ss} \bar{\sigma} = -D_{s0} \bar{\delta}_0, \quad Q \in S. \quad (1)$$

Здесь

$$D_{ss}\bar{\sigma} = \oint_S \frac{[\bar{n}_Q[\bar{r}_{QM}\bar{\sigma}(M,t)]]}{r_{QM}^3} ds_M, \quad Q \in S, \quad (2)$$

$$D_{s0}\bar{\delta}_0 = \int_{V_0} \frac{[\bar{n}_Q[\bar{r}_{QM}\bar{\delta}_0(M,t)]]}{r_{QM}^3} dv_M, \quad Q \in S, \quad (3)$$

$\bar{\delta}_0(Q,t)$ — мгновенное значение вектора плотности тока в точке Q объема V_0 обмотки ЭМП; \bar{n}_Q — нормаль к поверхности S в точке Q , положительное направление которой принято из ферромагнетика в воздух; \bar{r}_{QM} — радиус-вектор, направленный из точки Q в точку M и равный расстоянию

между этими точками; $\chi = \frac{\mu^- - 1}{\mu^- + 1}$.

Геометрическая характеристика поверхности магнитопровода и фазной обмотки. Магнитопровод (см. рис. 2) представляет собой тор прямоугольного сечения, поверхность S которого состоит из четырех канонических участков: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, где S_1 и S_3 — кольца, а S_2 и S_4 — боковые поверхности цилиндра. Интервалы изменения цилиндрических координат ρ_Q, φ_Q, z_Q точки Q и нормали \bar{n}_Q через орты цилиндрической системы координат в точке Q в пределах каждого из участков $S_i, i=1...4$, следующие:

$$\begin{aligned} Q_1 \in S_1 : R_2 \leq \rho_{Q_1} \leq R_4, 0 \leq \varphi_{Q_1} \leq 2\pi, z_{Q_1} = Z_1, \bar{n}_{Q_1} = \bar{n}_1 = -\bar{e}_z; \\ Q_2 \in S_2 : \rho_{Q_2} = R_2, 0 \leq \varphi_{Q_2} \leq 2\pi, Z_1 \leq z_{Q_2} = Z_3, \bar{n}_{Q_2} = \bar{n}_2 = -\bar{e}_\rho(Q_2); \\ Q_3 \in S_3 : R_2 \leq \rho_{Q_3} \leq R_4, 0 \leq \varphi_{Q_3} \leq 2\pi, z_{Q_3} = Z_3, \bar{n}_{Q_3} = \bar{n}_3 = \bar{e}_z; \\ Q_4 \in S_4 : \rho_{Q_4} = R_4, 0 \leq \varphi_{Q_4} \leq 2\pi, Z_1 \leq z_{Q_4} \leq Z_3, \bar{n}_{Q_4} = \bar{n}_4 = \bar{e}_\rho(Q_4). \end{aligned}$$

Для упрощения задачи будем предполагать, что сечения проводов, фазных обмоток настолько малы, что с достаточной степенью точности можно считать совпадающими осевые линии витков с осевой линией обмотки. Осевая линия L_{0k} обмотки k -й фазы состоит из шести участков (рис. 3):

$$L_{0k} = L_{0k}^1 \cup L_{0k}^2 \cup L_{0k}^3 \cup L_{0k}^4 \cup L_{0k}^5 \cup L_{0k}^6,$$

где $L_{0k}^1 = L_{0k}^{dka}, L_{0k}^2 = L_{0k}^{dfa}, L_{0k}^3 = L_{0k}^{ab}, L_{0k}^4 = L_{0k}^{cd}, L_{0k}^5 = L_{0k}^{bhc}, L_{0k}^6 = L_{0k}^{bgc}$. Орт касательной на каждом из участков $L_{0k}^i, i=1...6$, осевой линии L_{0k} обозначим

$$\begin{aligned} \bar{l}_{0k}^1(M) = \bar{l}_{0k}^{dka}(M), \bar{l}_{0k}^2(M) = \bar{l}_{0k}^{dfa}(M), \bar{l}_{0k}^3(M) = \bar{l}_{0k}^{ab}(M), \\ \bar{l}_{0k}^4(M) = \bar{l}_{0k}^{cd}(M), \bar{l}_{0k}^5(M) = \bar{l}_{0k}^{bhc}(M), \bar{l}_{0k}^6(M) = \bar{l}_{0k}^{bgc}(M). \end{aligned}$$

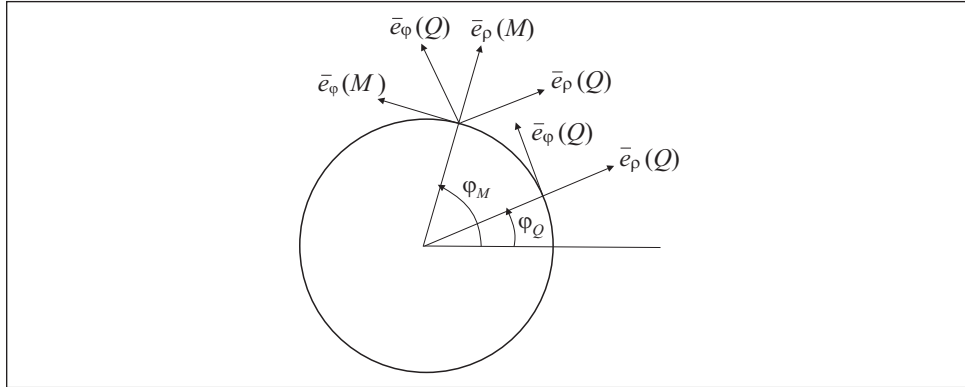


Рис. 3. Схема выражения ортов $\bar{e}_\rho(M)$, $\bar{e}_\phi(M)$ через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\phi(Q)$

Запишем интервалы изменения цилиндрических координат ρ_M, φ_M, z_M точки M и выражение касательной \bar{l}_{0k} в точке M через орты цилиндрической системы координат в точке M на каждом участке $L_{0k}^i, i=1 \dots 6$, осевой линии L_{0k} :

$$M^1 \in L_{0k}^1 : \rho_{M^1} = R_2 - \varepsilon_R, 0 \leq \varphi_{M^1} \leq \pi, z_{M^1} = Z_1 - \varepsilon_Z, \bar{l}_{0k}^1(M^1) = \bar{e}_\phi(M^1),$$

$$M^2 \in L_{0k}^2 : \rho_{M^2} = R_2 - \varepsilon_R, \pi \leq \varphi_{M^2} \leq 2\pi, z_{M^2} = Z_1 - \varepsilon_Z, \bar{l}_{0k}^2(M^2) = \bar{e}_\phi(M^2),$$

$$M^3 \in L_{0k}^3 : \rho_{M^3} = R_2 - \varepsilon_R, \varphi_{M^3} = 0,$$

$$Z_1 - \varepsilon_Z \leq z_{M^3} \leq Z_3 + \varepsilon_Z, \bar{l}_{0k}^3(M^3) = \bar{e}_z(M^3),$$

$$M^4 \in L_{0k}^4 : \rho_{M^4} = R_2 - \varepsilon_R, \varphi_{M^4} = \pi,$$

$$Z_1 - \varepsilon_Z \leq z_{M^4} \leq Z_3 + \varepsilon_Z, \bar{l}_{0k}^4(M^4) = \bar{e}_z(M^4),$$

$$M^5 \in L_{0k}^5 : \rho_{M^5} = R_2 - \varepsilon_R, 0 \leq \varphi_{M^5} \leq \pi, z_{M^5} = Z_3 + \varepsilon_Z, \bar{l}_{0k}^5(M^5) = \bar{e}_\phi(M^5),$$

$$M^6 \in L_{0k}^6 : \rho_{M^6} = R_2 - \varepsilon_R, \pi \leq \varphi_{M^6} \leq 2\pi, z_{M^6} = Z_3 + \varepsilon_Z, \bar{l}_{0k}^6(M^6) = \bar{e}_\phi(M^6),$$

где ε_R — малое число, при котором обмотка k -й, $k=1, 2, 3$, фазы помещается в окне магнитопровода и лежит на его поверхности S_2 ; ε_Z — малое число, при котором нижняя и верхняя лобовые части обмоток лежат на плоскостях соответственно S_1 и S_3 .

Векторные интегральные уравнения для ТН от токов в k -й обмотке. При сделанных допущениях относительно конструкции фазных обмоток

векторное интегральное уравнение (1) для ТН от токов в k -й обмотке на поверхности магнитопровода можно записать так:

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}(Q, t) + D_{ss} \bar{\sigma} = -D_{s0k} \bar{\delta}_{0k}, Q \in S. \quad (4)$$

Здесь

$$D_{ss} \bar{\sigma} = \oint_S \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{\sigma}(M, t)]]}{r_{QM}^3} ds_M, Q \in S;$$

$$D_{s0k} \bar{\delta}_{0k} = \int_{V_{0k}} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{\delta}_{0k}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dv_M, Q \in S; \quad (5)$$

$\bar{\delta}_{0k}(Q, t)$ — мгновенное значение вектора плотности тока в точке Q объема V_{0k} k -й обмотки ЭМП,

$$D_{s0k} \bar{\delta}_{0k} = \int_{V_{0k}} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{\delta}_{0k}(M, t)]]}{r_{QM}^3} dv_M = \frac{1}{2} W \int_{L_{0k}^1} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{i}_{0k}^1(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M +$$

$$+ \frac{1}{2} W \int_{L_{0k}^2} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{i}_{0k}^2(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M + W \int_{L_{0k}^3} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{i}_{0k}^3(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M +$$

$$+ W \int_{L_{0k}^4} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{i}_{0k}^4(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M + \frac{1}{2} W \int_{L_{0k}^5} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{i}_{0k}^5(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M +$$

$$+ \frac{1}{2} W \int_{L_{0k}^6} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{i}_{0k}^6(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M, Q \in S. \quad (6)$$

В операторной форме выражение (6) имеет вид

$$D_{s0k} \bar{\delta}_{0k} = \frac{1}{2} W \sum_{j=1}^2 D_{sL_{0k}^j} \bar{i}_{0k}^j(M, t) + W \sum_{j=3}^4 D_{sL_{0k}^j} \bar{i}_{0k}^j(M, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} W \sum_{j=5}^6 D_{sL_{0k}^j} \bar{i}_{0k}^j(M, t), Q \in S,$$

где

$$D_{sL_{0k}^j} \bar{i}_{0k}^j = \int_{L_{0k}^j} \frac{[\bar{n}_Q [\bar{r}_{QM} \bar{i}_{0k}^j(M, t)]]}{r_{QM}^3} dl_M, j = 1 \dots 6, Q \in S;$$

$$\bar{i}_{0k}^j(M, t) = \pm \bar{l}_{0k}^j(M) i_{0k}(t) \quad (7)$$

есть мгновенный вектор тока в точке $M \in L_{0k}^j$. В формуле (7) используется знак плюс, если в точке M положительное направление тока $i_{0k}(t)$ совпадает с направлением орта $\bar{l}_{0k}^j(M)$, и знак минус, если направление не совпадает.

Запишем выражения $\bar{i}_{0k}^j(M, t)$, $M \in \bar{l}_{0k}^j(M)$, $j = 1 \dots 6$, в соответствии с выбранной системой координат и положительными направлениями $i_{0k}(t)$ (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} \bar{i}_{0k}^1(M^1, t) &= -\bar{e}_\varphi(M^1) i_{0k}(t); & \bar{i}_{0k}^4(M^4, t) &= -\bar{e}_z i_{0k}(t); \\ \bar{i}_{0k}^2(M^2, t) &= \bar{e}_\varphi(M^2) i_{0k}(t); & \bar{i}_{0k}^5(M^5, t) &= \bar{e}_\varphi(M^5) i_{0k}(t); \\ \bar{i}_{0k}^3(M^3, t) &= \bar{e}_z i_{0k}(t); & \bar{i}_{0k}^6(M^6, t) &= -\bar{e}_\varphi(M^6) i_{0k}(t). \end{aligned}$$

Записав числитель подынтегрального выражения (5) с помощью вектора $\bar{G}(Q, M) = [\bar{r}_{QM} \bar{\sigma}(M, t)]$, получим

$$D_{ss} \bar{\sigma} = \oint_S \frac{[\bar{n}_Q \bar{G}(Q, M)]}{r_{QM}^3} ds_M, \quad Q \in S. \quad (8)$$

Используя (8), запишем (4) в виде

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}(Q, t) + \oint_S \frac{[\bar{n}_Q \bar{G}(Q, M)]}{r_{QM}^3} ds_M = -D_{s0k} \bar{\delta}_{0k}, \quad Q \in S. \quad (9)$$

Представим (9) в виде векторной СИУ на канонических участках поверхности магнитопровода S . Для этого запишем (9) в виде

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}(Q, t) + \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} \frac{[\bar{n}_Q \bar{G}(Q, M_i)]}{r_{QM_i}^3} ds_{M_i} = -D_{s0k} \bar{\delta}_{0k}, \quad Q \in S. \quad (10)$$

Полагая в (10) $Q \in S_1$, получаем первое уравнение векторной СИУ:

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}_1(Q_1, t) + \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} \frac{[\bar{n}_{Q_1} \bar{G}(Q_1, M_i)]}{r_{Q_1 M_i}^3} ds_{M_i} = -D_{S_1 0k} \bar{\delta}_{0k}, \quad Q_1 \in S_1. \quad (11)$$

Последовательно полагая в (10) $Q \in S_2$, $Q \in S_3$, $Q \in S_4$, аналогично получаем

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}_2(Q_2, t) + \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} \frac{[\bar{n}_{Q_2} \bar{G}(Q_2, M_i)]}{r_{Q_2 M_i}^3} ds_{M_i} = -D_{S_2 0k} \bar{\delta}_{0k}, \quad Q_2 \in S_2, \quad (12)$$

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}_3(Q_3, t) + \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} \frac{[\bar{n}_{Q_3} \bar{G}(Q_3, M_i)]}{r_{Q_3 M_i}^3} ds_{M_i} = -D_{S_3 0k} \bar{\delta}_{0k}, Q_3 \in S_3, \quad (13)$$

$$\frac{2\pi}{\chi} \bar{\sigma}_4(Q_4, t) + \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} \frac{[\bar{n}_{Q_4} \bar{G}(Q_4, M_i)]}{r_{Q_4 M_i}^3} ds_{M_i} = -D_{S_4 0k} \bar{\delta}_{0k}, Q_4 \in S_4. \quad (14)$$

Приведем формулы, используемые в процессе преобразования векторной СИУ (11)—(14) к скалярной форме. Нетрудно показать, что вектор \bar{r}_{QM} можно выразить через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\varphi(Q)$, \bar{e}_z :

$$\bar{r}_{QM} = \bar{e}_\rho(Q) r_{QM}^{\rho Q} + \bar{e}_\varphi(Q) r_{QM}^{\varphi Q} + \bar{e}_z(Q) r_{QM}^{zQ}; r_{QM}^{\rho Q} = \rho_M \cos(\varphi_M - \varphi_Q) - \rho_Q;$$

$$r_{QM}^{\varphi Q} = \rho_M \sin(\varphi_M - \varphi_Q); r_{QM}^{zQ} = (z_M - z_Q);$$

$$\bar{r}_{QM}^2 = (r_{QM}^{\rho Q})^2 + (r_{QM}^{\varphi Q})^2 + (r_{QM}^{zQ})^2 =$$

$$= \rho_M^2 + \rho_Q^2 - 2\rho_M \rho_Q \cos(\varphi_M - \varphi_Q) + (z_M - z_Q)^2;$$

$$r_{QM} = \sqrt{\rho_M^2 + \rho_Q^2 - 2\rho_M \rho_Q \cos(\varphi_M - \varphi_Q) + (z_M - z_Q)^2}.$$

Формулы для вычисления скалярного произведения $(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})$ и квадрата модуля \bar{r}_{QM}^2 в зависимости от положения точек M и Q на поверхности S магнитопровода представлены в табл. 1.

Для преобразования векторной СИУ (11)—(14) к скалярной потребуются выражения векторов плотности ТН на участках S_i , $i=1, \dots, 4$, через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\varphi(Q)$, \bar{e}_z . Для этого используем выражения ортов $\bar{e}_\rho(M)$, $\bar{e}_\varphi(M)$ через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\varphi(Q)$ (см. рис. 3):

$$\bar{e}_\rho(M) = \bar{e}_\rho(Q) \cos(\varphi_M - \varphi_Q) + \bar{e}_\varphi(Q) \sin(\varphi_M - \varphi_Q),$$

$$\bar{e}_\varphi(M) = -\bar{e}_\rho(Q) \sin(\varphi_M - \varphi_Q) + \bar{e}_\varphi(Q) \cos(\varphi_M - \varphi_Q).$$

На участке S_1 вектор $\bar{\sigma}(M_1)$, $M_1 \in S_1$, имеет вид $\bar{\sigma}(M_1) = \bar{e}_\rho(M_1) \sigma_{\rho M}(M_1) + \bar{e}_\varphi(M_1) \sigma_{\varphi M}(M_1)$. Подставив в него полученные выражения для $\bar{e}_\rho(M_1)$ и $\bar{e}_\varphi(M_1)$, запишем

$$\bar{\sigma}(M_1) = \bar{e}_\rho(Q) \sigma_{\rho Q}(M_1) + \bar{e}_\varphi(Q) \sigma_{\varphi Q}(M_1),$$

где $\sigma_{\rho Q}(M_1) = \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_Q) \sigma_{\rho M}(M_1) - \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_Q) \sigma_{\varphi M}(M_1)$; $\sigma_{\varphi Q}(M_1) = \sin(\varphi_{M_1} - \varphi_Q) \sigma_{\rho M}(M_1) + \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_Q) \sigma_{\varphi M}(M_1)$.

Таблица 1

Поло- жение точки Q	Положение точки M			
	S_1	S_2	S_3	S_4
	<i>Для скалярного произведения $(\vec{n}_Q \vec{r}_{QM})$</i>			
S_1	$(\vec{n}_{Q_1} \vec{r}_{Q_1M_1}) = 0$	$(\vec{n}_{Q_1} \vec{r}_{Q_1M_2}) = -r_{Q_1M_2}^{z_{Q_1}} =$ $= -(z_{M_2} - Z_1)$	$(\vec{n}_{Q_1} \vec{r}_{Q_1M_3}) = -r_{Q_1M_3}^{z_{Q_1}} =$ $= -(Z_3 - Z_1)$	$(\vec{n}_{Q_1} \vec{r}_{Q_1M_4}) = -r_{Q_1M_4}^{z_{Q_1}} =$ $= -(z_{M_4} - Z_1)$
S_2	$(\vec{n}_{Q_2} \vec{r}_{Q_2M_1}) =$ $= -r_{Q_2M_1}^{\rho_{Q_2}} = -\rho_{M_1} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ R_2$	$(\vec{n}_{Q_2} \vec{r}_{Q_2M_2}) =$ $= -r_{Q_2M_2}^{\rho_{Q_2}} = -\rho_{M_2} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ R_2$	$(\vec{n}_{Q_2} \vec{r}_{Q_2M_3}) =$ $= -r_{Q_2M_3}^{\rho_{Q_2}} = -R_2 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ R_2$	$(\vec{n}_{Q_2} \vec{r}_{Q_2M_4}) =$ $= -r_{Q_2M_4}^{\rho_{Q_2}} = -R_4 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ R_2$
S_3	$(\vec{n}_{Q_3} \vec{r}_{Q_3M_1}) = r_{Q_3M_1}^{z_{Q_3}} =$ $= (Z_3 - Z_1)$	$(\vec{n}_{Q_3} \vec{r}_{Q_3M_2}) = r_{Q_3M_2}^{z_{Q_3}} =$ $= (Z_3 - Z_1)$	$(\vec{n}_{Q_3} \vec{r}_{Q_3M_3}) =$ $= r_{Q_3M_3}^{z_{Q_3}} = 0$	$(\vec{n}_{Q_3} \vec{r}_{Q_3M_4}) = r_{Q_3M_4}^{z_{Q_3}} =$ $= (z_{M_4} - Z_3)$
S_4	$(\vec{n}_{Q_4} \vec{r}_{Q_4M_1}) =$ $= r_{Q_4M_1}^{\rho_{Q_4}} = \rho_{M_1} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_4}) -$ $- R_4$	$(\vec{n}_{Q_4} \vec{r}_{Q_4M_2}) =$ $= -r_{Q_4M_2}^{\rho_{Q_4}} = -R_4 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_4}) +$ $+ R_2$	$(\vec{n}_{Q_4} \vec{r}_{Q_4M_3}) =$ $= r_{Q_4M_3}^{\rho_{Q_4}} = \rho_{M_3} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_4}) -$ $- R_4$	$(\vec{n}_{Q_4} \vec{r}_{Q_4M_4}) =$ $= r_{Q_4M_4}^{\rho_{Q_4}} = R_4 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_4}) -$ $- R_4$
	<i>Для квадрата модуля \vec{r}_{QM}^2</i>			
S_1	$\vec{r}_{Q_1M_1}^2 = \rho_{M_1}^2 + \rho_{Q_1}^2 -$ $- 2\rho_{M_1}\rho_{Q_1} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_1})$	$\vec{r}_{Q_1M_2}^2 = R_2^2 + \rho_{Q_1}^2 -$ $- 2R_2\rho_{Q_1} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_1}) +$ $+ (z_{M_2} - Z_1)^2$	$\vec{r}_{Q_1M_3}^2 = \rho_{M_3}^2 + \rho_{Q_1}^2 -$ $- 2\rho_{M_3}\rho_{Q_1} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_1}) +$ $+ (Z_3 - Z_1)^2$	$\vec{r}_{Q_1M_4}^2 = R_4^2 + \rho_{Q_1}^2 -$ $- 2R_4\rho_{Q_1} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_1}) +$ $+ (z_{M_4} - Z_1)^2$
S_2	$\vec{r}_{Q_2M_1}^2 = \rho_{M_1}^2 + R_2^2 -$ $- 2\rho_{M_1}R_2 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ (Z_1 - z_{Q_2})^2$	$\vec{r}_{Q_2M_2}^2 = 2R_2^2 - 2R_2^2 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ (z_{M_2} - z_{Q_2})^2$	$\vec{r}_{Q_2M_3}^2 = \rho_{M_3}^2 + R_2^2 -$ $- 2\rho_{M_3}R_2 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ (Z_3 - z_{Q_2})^2$	$\vec{r}_{Q_2M_4}^2 = R_4^2 + R_2^2 -$ $- 2R_4R_2 \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_2}) +$ $+ (z_{M_4} - z_{Q_2})^2$
S_3	$\vec{r}_{Q_3M_1}^2 = \rho_{M_1}^2 + \rho_{Q_3}^2 -$ $- 2\rho_{M_1}\rho_{Q_3} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_3}) +$ $+ (Z_1 - z_{Q_3})^2$	$\vec{r}_{Q_3M_2}^2 = R_2^2 + \rho_{Q_3}^2 -$ $- 2R_2\rho_{Q_3} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_3}) +$ $+ (z_{M_2} - z_{Q_3})^2$	$\vec{r}_{Q_3M_3}^2 = \rho_{M_3}^2 + \rho_{Q_3}^2 -$ $- 2\rho_{M_3}\rho_{Q_3} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_3})$	$\vec{r}_{Q_3M_4}^2 = R_4^2 + \rho_{Q_3}^2 -$ $- 2R_4\rho_{Q_3} \times$ $\times \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_3}) +$ $+ (z_{M_4} - Z_3)^2$
S_4	$\vec{r}_{Q_4M_1}^2 = \rho_{M_1}^2 + R_4^2 -$ $- 2\rho_{M_1}R_4 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_1} - \varphi_{Q_4}) +$ $+ (Z_1 - z_{Q_4})^2$	$\vec{r}_{Q_4M_2}^2 = R_2^2 + R_4^2 -$ $- 2R_2R_4 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_{Q_4}) +$ $+ (z_{M_2} - z_{Q_4})^2$	$\vec{r}_{Q_4M_3}^2 = \rho_{M_3}^2 + R_4^2 -$ $- 2\rho_{M_3}R_4 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_{Q_4}) +$ $+ (Z_3 - z_{Q_4})^2$	$\vec{r}_{Q_4M_4}^2 = 2R_4^2 -$ $- 2R_4^2 \times$ $\times \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_{Q_4}) +$ $+ (z_{M_4} - z_{Q_4})^2$

Аналогично преобразуем вектор $\bar{\sigma}(M_i)$ на участках $S_i, i=2, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(M_2) &= \bar{e}_\varphi(M_2)\sigma_{\varphi M}(M_2) + \bar{e}_z(M_2)\sigma_z(M_2) = \\ &= \bar{e}_\rho(Q)\sigma_{\rho Q}(M_2) + \bar{e}_\varphi(Q)\sigma_{\varphi Q}(M_2) + \bar{e}_z\sigma_z(M_2), \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{\rho Q}(M_2) = -\sin(\varphi_{M_2} - \varphi_Q)\sigma_{\varphi M}(M_2),$$

$$\sigma_{\varphi Q}(M_2) = \cos(\varphi_{M_2} - \varphi_Q)\sigma_{\varphi M}(M_2),$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(M_3) &= \bar{e}_\rho(M_3)\sigma_{\rho M}(M_3) + \bar{e}_\varphi(M_3)\sigma_{\varphi M}(M_3) = \\ &= \bar{e}_\rho(Q)\sigma_{\rho Q}(M_3) + \bar{e}_\varphi(Q)\sigma_{\varphi Q}(M_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho Q}(M_3) &= \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_Q)\sigma_{\varphi M}(M_3) - \\ &- \sin(\varphi_{M_3} - \varphi_Q)\sigma_{\varphi M}(M_3), \end{aligned}$$

$$\sigma_{\varphi Q}(M_3) = \sin(\varphi_{M_3} - \varphi_Q)\sigma_{\rho M}(M_3) + \cos(\varphi_{M_3} - \varphi_Q)\sigma_{\varphi M}(M_3);$$

$$\bar{\sigma}(M_4) = \bar{e}_\varphi(M_4)\sigma_{\varphi M}(M_4) + \bar{e}_z\sigma_z(M_4) =$$

$$= \bar{e}_\rho(Q)\sigma_{\rho Q}(M_4) + \bar{e}_\varphi(Q)\sigma_{\varphi Q}(M_4) + \bar{e}_z\sigma_z(M_4),$$

$$\sigma_{\rho Q}(M_4) = -\sin(\varphi_{M_4} - \varphi_Q)\sigma_{\varphi M}(M_4),$$

$$\sigma_{\varphi Q}(M_4) = \cos(\varphi_{M_4} - \varphi_Q)\sigma_{\varphi M}(M_4).$$

Формулы для вычисления скалярного произведения $(\bar{n}_Q, \bar{\sigma}(M))$ в зависимости от положения точек M и Q на поверхности S магнитопровода представлены в табл. 2.

Полученная скалярная система уравнений составляет основу модели трехмерного магнитного поля цилиндрического ЭМП и может быть использована при моделировании ВТ и ЭДУ в жидкой фазе НЛЗ.

Таблица 2

Положение точки Q	Формулы для $(\bar{n}_Q, \bar{\sigma}(M))$			
	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0	$-\sigma_z(M_2)$	0	$-\sigma_z(M_4)$
S_2	$-\sigma_{\rho Q_2}(M_1)$	$-\sigma_{\rho Q_2}(M_2)$	$-\sigma_{\rho Q_2}(M_3)$	$-\sigma_{\rho Q_2}(M_4)$
S_3	0	$\sigma_z(M_2)$	0	$\sigma_z(M_4)$
S_4	$\sigma_{\rho Q_4}(M_1)$	$\sigma_{\rho Q_4}(M_2)$	$\sigma_{\rho Q_4}(M_3)$	$\sigma_{\rho Q_4}(M_4)$

Введем обозначения ядер интегральных операторов:

$$ZC(Q, M) = \frac{(z_M - z_Q) \cos(\varphi_M - \varphi_Q)}{r_{QM}^3}, \quad ZS(Q, M) = \frac{(z_M - z_Q) \sin(\varphi_M - \varphi_Q)}{r_{QM}^3},$$

$$CR(Q, M) = \frac{\rho_M \cos(\varphi_M - \varphi_Q) - \rho_Q}{r_{QM}^3}, \quad SR(Q, M) = \frac{\rho_M \sin(\varphi_M - \varphi_Q)}{r_{QM}^3},$$

$$RS(Q, M) = \frac{\rho_Q \sin(\varphi_M - \varphi_Q)}{r_{QM}^3}, \quad RC(Q, M) = \frac{\rho_Q \cos(\varphi_M - \varphi_Q) - \rho_M}{r_{QM}^3}.$$

Таким образом, задача сформулирована в виде векторной СИУ для ТН на канонических участках поверхности магнитопровода, а приведенные формулы используем при преобразовании векторной СИУ к скалярной форме относительно проекции векторов ТН на оси цилиндрической системы, лежащие в плоскости касательной к поверхности магнитопровода.

(Продолжение статьи см. в следующем номере)

A model of three-dimensional magnetic field of the cylindrical electromagnetic stirrer (EMS) based on the scalar system of integral equations (SIE) was obtained as a result of simplification of the vector SIE for magnetization current (MC) on the magnetic circuit surface of the EMS. This system unknowns are projections of density vectors MC which lie in the plane tangential to the magnetic circuit surface. The problem has been formulated in a form of the vector SIE for MC on the magnetic circuit surface, and formulas have been presented which are used for the vector SIE transformation into the scalar one.

1. Найдек В. Л., Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф. и др. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор-индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // Электрон. моделирование. — 2004. — 26, № 1. — С. 30—52.
2. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. и др. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Там же. — 2005. — 27, № 4. — С. 57—74.
3. Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Касьян Г. И. Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе МНЛЗ с явнополюсным электромагнитным перемешивателем // Там же. — 2010. — 32, № 1. — С. 53—75.
4. Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А. Двумерная модель распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с явнополюсным электромагнитным перемешивателем на основе интегральных уравнений для симметричных составляющих // Proc. of XV Int. Conf. on Dynamical System Modelling and Stability Investigation «DSMSI-2011». — Kyiv, May 25—27, 2011. — P. 178.

5. *Evdokimov V., Kuchaev A., Petrushenko E., Kuchayev V.* Numerical Analysis of Distribution of Eddy Currents and Electromagnetic Forces in Liquid Phase of Continuously Cast Billet on Base of the Integral Equations for Symmetrical Components // Proc. 8th Pamir Intern. Conf. on Fundamental and Applied MHD. September 5—9, 2011. — Borgo, Corsica, France. — 2011. — Vol. 1. — P. 335—339.
6. *Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А.* Трехмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя // Электрон. моделирование. — 2010. — **32**, № 4. — С. 93—112.
7. *Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А.* Трехмерная модель распределения вихревых токов в жидкой стали непрерывнолитой заготовки при электромагнитном перемешивании // Там же. — 2010. — **32**, № 6. — С. 69—84.

Поступила 28.09.11

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы и устройства для математического моделирования, математическое и компьютерное моделирование энергетических систем.

КУЧАЕВ Александр Андреевич, д-р техн. наук, вед. науч. сотр. отдела МГД Физико-технологического ин-та металлов и сплавов НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом математического моделирования электромагнитных полей Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский госуниверситет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

КУЧАЕВ Виталий Александрович, аспирант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 2002 г. окончил Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.