УДК 621.316.99

Д. Г. Колиушко, канд. техн. наук
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический ин-т»
(Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,
тел. (057) 7076280, E-mail: den@kpi.kharkov.ua),
С. С. Руденко
Научно-исследовательский и проектно-конструкторский
ин-т «Молния» Национального технического университета
«Харьковский политехнический ин-т»
(Украина, 61013, Харьков, ул. Шевченко, 47,
тел. (057) 7076671, E-mail: sergej_rudenko@mail.ru)

Электрическое поле точечного источника тока в трехслойном проводящем полупространстве

Разработана математическая модель точечного источника тока, расположенного в грунте с трехслойной структурой. Показана адекватность предложенной модели ранее известным моделям с расположением источника тока в двухслойной структуре.

Розроблено математичну модель точкового джерела струму, розміщеного в ґрунті з тришаровою структурою. Показано адекватність запропонованої моделі відомим моделям з розміщенням джерела струму у двошаровій структурі.

Ключевые слова: математическое моделирование, электрическое поле, потенциал точечного источника, трехслойный грунт.

Постановка задачи и обзор публикаций. Одним из основных элементов для обеспечения нормального функционирования оборудования и безопасной эксплуатации станций и подстанций является заземляющее устройство (ЗУ) [1]. В настоящее время для определения его нормируемых параметров (сопротивления ЗУ, напряжения на ЗУ и напряжения прикосновения) используется математическая модель неэквипотенциального ЗУ, размещенного в двухслойном грунте [2], позволяющая учесть произвольное расположение заземлителей в пространстве. Однако по результатам измерений электрических свойств земли (проведено вертикальное электрическое зондирование для 750 объектов) грунт, как правило, имеет три, а иногда и более слоев. Учет параметров многослойного грунта обусловливает повышение точности расчета нормируемых параметров ЗУ.

Для построения математической модели ЗУ используется метод точечного источника тока (ТИТ). В [3] в общем виде рассмотрена методика получения выражений для расчета потенциала ТИТ, расположенного в i-м слое n-слойной электрической структуры.

В неявном виде решение задачи для трехслойных структур с плоско-паралельными границами раздела слоев представлено в [4]. Для приведения его к явному виду соотношения интегрируются с использованием преобразования Вебера—Липшица, при этом знаменатель подынтегральных выражений разлагается в степенной ряд. Приведенные в неявном виде соотношения позволяют определить потенциал ТИТ при расположении его только в первом или третьем слое. В [4] также рассмотрена возможность перехода от трехслойной модели к двухслойной, который может быть применен в качестве проверки правильности решения.

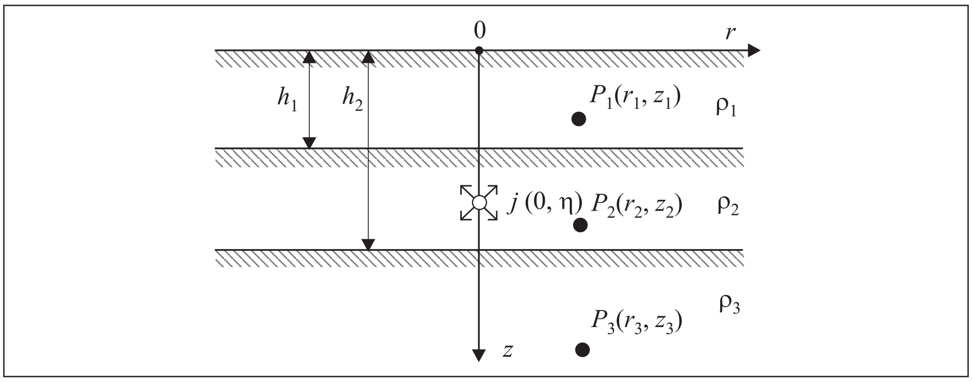
В [5] показано, что для трехслойной структуры аналитическое решение интегралов [4] затруднительно, поскольку процедура разложения приводит к необходимости взятия для каждого из выражений $m + 1$ интегралов от многочленов в m степени, где $m + 1$ — число членов ряда. Решение может быть найдено с использованием приближенного интегрирования при аппроксимации знаменателя подынтегральных выражений в ряд экспонент с помощью графоаналитического метода [5]. В [6] рассмотрены сложности применения этого метода для автоматизации расчета на ПЭВМ и предложен способ аппроксимации функции с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Проверка приведенных в [5] выражений для расчета потенциала при размещении ТИТ во втором слое показала, что после перехода от трехслойной модели к двухслойной не все выражения, в частности при расположении ТИТ и (или) точки наблюдения во втором или третьем слое, соответствуют принятым для двухслойной модели [3]. Учитывая данные обстоятельства, можно судить о неточности существующей математической модели поля ТИТ.

Представляется целесообразной разработка математической модели поля ТИТ, расположенного в любом слое трехслойной среды, с возможностью реализации ее на ПЭВМ.

Результаты исследований. Пусть ТИТ j расположен в k-м слое трехслойного грунта. Сделаем следующие допущения: через границу земли и атмосферы ток не проходит, границы раздела слоев — плоскопараллельные и в пределах каждого из них удельное электрическое сопротивление ρ_i однородно. Электрические сопротивления первого, второго и третьего слоев обозначим ρ_1, ρ_2 и ρ_3, глубины границ разделов первого и второго слоев — h_1, второго и третьего — h_2. Требуется найти электрический потенциал φ в любой точке проводящего полупространства.

Электрическое поле ТИТ в трехслойной среде обладает осевой симметрией. Поэтому целесообразно применить криволинейную ортогональную цилиндрическую систему координат (r, z, ψ) с осью z, перпендику-



Точечный источник тока j, размещенный во втором слое трехслойной структуры: $P_1(r_1, z_1)$, $P_2(r_2, z_2)$, $P_3(r_3, z_3)$ — точки наблюдения

лярной к границе полупространства и проходящей через точечный источник (см. рисунок).

Рассматриваемая задача состоит из уравнения Лапласа и дополнительных условий. Поскольку потенциал не зависит от координаты ψ, уравнение Лапласа принимает вид [7]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Применив метод Фурье для разделения переменных [3, 7], общее решение (1) представим как интеграл по параметру λ в пределах от нуля до бесконечности:

$$\varphi\,(r,z)=\int_0^\infty J_0(\lambda r)(ae^{\lambda z}+be^{-\lambda z})\,d\lambda, \tag{2}$$

где a и b — постоянные, определяемые параметрами грунта, координатами ТИТ и точками наблюдения; λ — параметр разделения. Если ТИТ и точка наблюдения расположены в k-м слое, то к выражению (2) следует добавить величину потенциала ТИТ в однородном проводящем пространстве [3, 7]

$$\varphi_0=\frac{I\rho_k}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\eta)^2}}, \tag{3}$$

где η — координата ТИТ по оси z.

Вид функции (2) является общим для всех слоев проводящего полупространства. Однако в каждом слое, в зависимости от расположения ТИТ и точки наблюдения, постоянные принимают свои определенные значения. Поэтому необходимо определить значения a_i и b_i для каждого слоя трехслойной электрической структуры.

Для нахождения постоянных a_i и b_i воспользуемся следующими дополнительными условиями:

при неограниченном возрастании координаты z потенциал φ стремится к нулю, следовательно,

$$a_3 = 0; \tag{4}$$

в соответствии с принципом непрерывности электрического тока на границе раздела i-го и $(i+1)$-го слоев нормальные составляющие векторов плотности электрического тока равны:

$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}}\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z}; \tag{5}$$

из условия равенства тангенциальных составляющих вектора напряженности поля на границах смежных слоев на границе раздела i-го и $(i+1)$-го слоев потенциалы равны:

$$\varphi_i = \varphi_{i+1}; \tag{6}$$

условие на границе проводящего полупространства имеет вид

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{7}$$

В соответствии с дополнительными условиями (4)—(7), а также с помощью преобразования Вебера—Липшица [3] составим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые в зависимости от расположения ТИТ будут иметь следующий вид:

а) ТИТ находится в первом слое ($h_1 - \eta \geq 0$ и $h_2 - \eta \geq 0$):

$$a_1 - b_1 + \frac{I\rho_1}{4\pi}e^{-\lambda\eta} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_1}\left(a_1 e^{\lambda h_1} - b_1 e^{-\lambda h_1} - \frac{I\rho_1}{4\pi}e^{-\lambda(h_1-\eta)}\right) = \frac{1}{\rho_2}(a_2 e^{\lambda h_1} - b_2 e^{-\lambda h_1});$$

$$\frac{1}{\rho_2}(a_2 e^{\lambda h_2} - b_2 e^{-\lambda h_2}) = -\frac{b_3 e^{-\lambda h_2}}{\rho_3};$$

$$a_1 e^{\lambda h_1} + b_1 e^{-\lambda h_1} + \frac{I\rho_1}{4\pi}e^{-\lambda(h_1-\eta)} = a_2 e^{\lambda h_1} + b_2 e^{-\lambda h_1};$$

$$a_2 e^{\lambda h_2} + b_2 e^{-\lambda h_2} = b_3 e^{-\lambda h_2}; \tag{8}$$

б) ТИТ находится во втором слое ($h_1 - \eta \leq 0$ и $h_2 - \eta \geq 0$):

$$a_1 - b_1 = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_1}(a_1 e^{\lambda h_1} - b_1 e^{-\lambda h_1}) = \frac{1}{\rho_2}\left(a_2 e^{\lambda h_1} - b_2 e^{-\lambda h_1} + \frac{I\rho_2}{4\pi} e^{\lambda(h_1-\eta)}\right);$$

$$\frac{1}{\rho_2}\left(a_2 e^{\lambda h_2} - b_2 e^{-\lambda h_2} - \frac{I\rho_2}{4\pi} e^{-\lambda(h_2-\eta)}\right) = -\frac{b_3 e^{-\lambda h_2}}{\rho_3};$$

$$a_1 e^{\lambda h_1} + b_1 e^{-\lambda h_1} = a_2 e^{\lambda h_1} + b_2 e^{-\lambda h_1} + \frac{I\rho_2}{4\pi} e^{\lambda(h_1-\eta)};$$

$$a_2 e^{\lambda h_2} + b_2 e^{-\lambda h_2} + \frac{I\rho_2}{4\pi} e^{-\lambda(h_2-\eta)} = b_3 e^{-\lambda h_2}; \qquad (9)$$

в) ТИТ находится в третьем слое ($h_1 - \eta \le 0$ и $h_2 - \eta \le 0$):

$$a_1 - b_1 = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_1}(a_1 e^{\lambda h_1} - b_1 e^{-\lambda h_1}) = \frac{1}{\rho_2}(a_2 e^{\lambda h_1} - b_2 e^{-\lambda h_1});$$

$$\frac{1}{\rho_2}(a_2 e^{\lambda h_2} - b_2 e^{-\lambda h_2}) = \frac{1}{\rho_3}\left(\frac{I\rho_3}{4\pi} e^{\lambda(h_2-\eta)} - b_3 e^{-\lambda h_2}\right);$$

$$a_1 e^{\lambda h_1} + b_1 e^{-\lambda h_1} = a_2 e^{\lambda h_1} + b_2 e^{-\lambda h_1};$$

$$a_2 e^{\lambda h_2} + b_2 e^{-\lambda h_2} = b_3 e^{-\lambda h_2} + \frac{I\rho_3}{4\pi} e^{\lambda(h_2-\eta)}. \qquad (10)$$

Решая методом Гаусса СЛАУ (8) — (10), находим постоянные a_i и b_i в зависимости от расположения ТИТ:

а) ТИТ находится в первом слое ($h_1 - \eta \ge 0$ и $h_2 - \eta \ge 0$):

$$a_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{(1+e^{2\lambda\eta})(K_{2,1}e^{-2\lambda h_1} + K_{3,2}e^{-2\lambda h_2})\, e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$b_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi}\left[\frac{(1+e^{2\lambda\eta})(K_{2,1}e^{-2\lambda h_1} + K_{3,2}e^{-2\lambda h_2})\, e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)} + e^{-\lambda\eta}\right];$$

$$a_2 = \frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{(1+K_{2,1})\, K_{3,2}e^{-2\lambda h_2}(1+e^{2\lambda\eta})\, e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$b_2 = \frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{(1+K_{2,1})(1+e^{2\lambda\eta})\, e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$b_3 = \frac{I\rho_1}{4\pi}\frac{(1+K_{2,1})(1+K_{3,2})(1+e^{2\lambda\eta})\, e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)}, \qquad (11)$$

где $K_{2,1}$, $K_{3,2}$ — коэффициенты неоднородности, $K_{2,1}=\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}$; $K_{3,2}=$ $=\dfrac{\rho_3-\rho_2}{\rho_3+\rho_2}$; $F_3(\lambda)$ — функция, характеризирующая трехслойную среду, $F_3(\lambda)=$ $=1-K_{2,1}e^{-2\lambda h_1}+K_{2,1}K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-h_1)}-K_{3,2}e^{-2\lambda h_2}$;

б) ТИТ находится во втором слое ($h_1-\eta\le 0$ и $h_2-\eta\ge 0$):

$$a_1=\frac{I\rho_2}{4\pi}\frac{(1-K_{2,1})(1+K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-\eta)})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$b_1=\frac{I\rho_2}{4\pi}\frac{(1-K_{2,1})(1+K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-\eta)})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$a_2=\frac{I\rho_2}{4\pi}\frac{K_{3,2}e^{-2\lambda h_2}}{F_3(\lambda)}[(1-K_{2,1}e^{-2\lambda h_1})\,e^{\lambda\eta}+(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})\,e^{-\lambda\eta}];$$

$$b_2=\frac{I\rho_2}{4\pi}\frac{(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})(1+K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-\eta)})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$b_3=\frac{I\rho_2}{4\pi}\frac{(1+K_{3,2})}{F_3(\lambda)}[(1-K_{2,1}e^{-2\lambda h_1})\,e^{\lambda\eta}+(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})\,e^{-\lambda\eta}]; \qquad (12)$$

в) ТИТ находится в третьем слое ($h_1-\eta\le 0$ и $h_2-\eta\le 0$):

$$a_1=\frac{I\rho_3}{4\pi}\frac{(1-K_{2,1})(1-K_{3,2})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};\quad b_1=\frac{I\rho_3}{4\pi}\frac{(1-K_{2,1})(1-K_{3,2})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$a_2=\frac{I\rho_3}{4\pi}\frac{(1-K_{2,1}e^{-2\lambda h_1})(1-K_{3,2})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};\quad b_2=\frac{I\rho_3}{4\pi}\frac{(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})(1-K_{3,2})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)};$$

$$b_3=\frac{I\rho_3}{4\pi}\frac{(1+K_{2,1}K_{3,2}e^{2\lambda(h_2-h_1)}-K_{2,1}e^{2\lambda h_1}-K_{3,2}e^{2\lambda h_2})\,e^{-\lambda\eta}}{F_3(\lambda)}. \qquad (13)$$

После подстановки в (2) постоянных a_i и b_i, найденных по формулам (11) — (13), с учетом (3) запишем в неявном виде выражения для определения потенциала в зависимости от расположения ТИТ и точки наблюдения, воспользовавшись для этого преобразованием Вебера—Липшица [3]:

а) при расположении ТИТ в первом слое:

$$\varphi_{1,1}(r,z)=\frac{I\rho_1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\eta)^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+\eta)^2}}+\right.$$

$$+\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1+e^{2\lambda\eta})(K_{2,1}e^{-2\lambda h_1}+K_{3,2}e^{-2\lambda h_2})(e^{\lambda(z-\eta)}+e^{-\lambda(z+\eta)})\,d\lambda\Bigg];$$

$$\varphi_{2,1}(r,z)=\frac{I\rho_1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1+e^{2\lambda\eta})(1+K_{2,1})\,e^{\lambda(z-\eta)}(K_{3,2}e^{-2\lambda h_2}+e^{-2\lambda z})\,d\lambda\,;$$

$$\varphi_{3,1}(r,z)=\frac{I\rho_1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1+e^{2\lambda\eta})(1+K_{2,1})(1+K_{3,2})\,e^{-\lambda(z+\eta)}d\lambda; \qquad (14)$$

б) при расположении ТИТ во втором слое:

$$\varphi_{1,2}(r,z)=\frac{I\rho_2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1-K_{2,1})(1+K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-\eta)})(e^{\lambda(z-\eta)}+e^{-\lambda(z+\eta)})\,d\lambda\,;$$

$$\varphi_{2,2}(r,z)=\frac{I\rho_2}{4\pi}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\eta)^2}}+$$

$$+\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}K_{3,2}e^{-2\lambda h_2})[(1-K_{2,1}e^{-2\lambda h_1})\,e^{\lambda(z+\eta)}+(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})\,e^{-\lambda(\eta-z)})]\,d\lambda\,+$$

$$+\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})\,(1+K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-\eta)})\,e^{-\lambda(\eta+z)}d\lambda\Bigg];$$

$$\varphi_{3,2}(r,z)=\frac{I\rho_2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1+K_{3,2})[(1-K_{2,1}e^{-2\lambda h_1})\,e^{\lambda(\eta-z)}\,+$$

$$+\,(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})\,e^{-\lambda(\eta+z)}]\,d\lambda\,; \qquad (15)$$

в) при расположении ТИТ в третьем слое:

$$\varphi_{1,3}(r,z)=\frac{I\rho_3}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1-K_{2,1})(1-K_{3,2})(e^{\lambda(z-\eta)}+e^{-\lambda(z-\eta)})\,d\lambda;$$

$$\varphi_{2,3}(r,z)=\frac{I\rho_3}{4\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1-K_{3,2})[(1-K_{2,1}e^{-2\lambda h_1})e^{\lambda(z-\eta)}+(1-K_{2,1}e^{2\lambda h_1})e^{-\lambda(z+\eta)}]d\lambda;$$

$$\varphi_{3,3}(r,z)=\frac{I\rho_3}{4\pi}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\eta)^2}}+$$

$$+\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{F_3(\lambda)}(1+K_{2,1}K_{3,2}e^{2\lambda(h_2-h_1)}-K_{2,1}e^{2\lambda h_1}-K_{3,2}e^{2\lambda h_2})\,e^{-\lambda(z+\eta)}d\lambda\Bigg]. \qquad (16)$$

Для проверки выражений (14)—(16) применен переход от трехслойной модели к двухслойной, который осуществлялся объединением двух смежных слоев при сохранении расположения ТИТ и точки наблюдения. В выражениях для $\varphi_{2,2}, \varphi_{3,2}$ и $\varphi_{2,3}$ принято $\rho_1 = \rho_2$ и $h_2 = h_1$, во всех остальных формулах для определения потенциала $\rho_2 = \rho_3$ и $h_2 \to \infty$. При сравнении полученных выражений с принятыми для двухслойной модели грунта [3] установлена их тождественность.

Согласно [5] приведение выражений (14)—(16) к явному виду выполняется методом приближенного интегрирования. В этом случае функция $\frac{1}{F_3(\lambda)}$ принимает вид

$$\frac{1}{F_3(\lambda)} = \sum_{n=0}^{m} K_n e^{-\lambda h_n}, \tag{17}$$

где K_n и h_n — коэффициенты, полученные в результате разложения; n — номер члена ряда; m — число членов ряда.

Для получения (17) предлагается использовать МНК [6]. В этом случае $h_n = 2 \cdot n$, а K_n находим из решения СЛАУ

$$K_0 N + K_1 \sum_{i=1}^{N} e^{-2\lambda_i} + K_2 \sum_{i=1}^{N} e^{-4\lambda_i} + \ldots + K_m \sum_{i=1}^{N} e^{-2m\lambda_i} = \sum_{i=1}^{N} F(\lambda)_i \ ;$$

$$K_0 \sum_{i=1}^{N} e^{-2\lambda_i} + K_1 \sum_{i=1}^{N} e^{-4\lambda_i} + \ldots + K_m \sum_{i=1}^{N} e^{-2(m+1)\lambda_i} = \sum_{i=1}^{N} F(\lambda)_i e^{-2\lambda_i} \ ;$$

....

$$K_0 \sum_{i=1}^{N} e^{-2m\lambda_i} + K_1 \sum_{i=1}^{N} e^{-2(m+1)\lambda_i} + \ldots + K_m \sum_{i=1}^{N} e^{-4m\lambda_i} = \sum_{i=1}^{N} F(\lambda)_i e^{-2m\lambda_i} \ ,$$

где — $F(\lambda) = \frac{1}{F_3(\lambda)}$; N — число расчетных точек.

Используя преобразование Вебера—Липшица [3] с учетом (17), выражения для нахождения потенциала φ (14)—(16) приведем к следующему виду:

а) при расположении ТИТ в первом слое:

$$\varphi_{1,1}(r,z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \Big[\alpha_1 + \alpha_2 + K_{2,1} \sum_{n=0}^{m} K_n (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) +$$
$$+ K_{3,2} \sum_{n=0}^{m} K_n (\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10}) \Big];$$

$$\varphi_{2,1}(r,z) = \frac{I\rho_1}{4\pi}(1 + K_{2,1}) \sum_{n=0}^{m} K_n (\alpha_{11} + \alpha_{12} + K_{3,2}\alpha_{10} + K_{3,2}\alpha_8);$$

$$\varphi_{3,1}(r,z) = \frac{I\rho_1}{4\pi}(1 + K_{2,1})(1 + K_{3,2}) \sum_{n=0}^{m} K_n (\alpha_{11} + \alpha_{12}); \tag{18}$$

б) при расположении ТИТ во втором слое:

$$\varphi_{1,2}(r,z)=\frac{I\rho_2}{4\pi}(1-K_{2,1})\sum_{n=0}^{m}K_n(\alpha_{12}+\alpha_{13}+K_{3,2}\alpha_9+K_{3,2}\alpha_{10});$$

$$\varphi_{2,2}(r,z)=\frac{I\rho_2}{4\pi}\left[\alpha_1+\sum_{n=0}^{m}K_n(\alpha_{12}+K_{3,2}(\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10})-\right.$$

$$\left.-K_{2,1}K_{3,2}(\alpha_{14}+\alpha_{15}+\alpha_{17})-K_{2,1}\alpha_{16})\right];$$

$$\varphi_{3,2}(r,z)=\frac{I\rho_2}{4\pi}(1+K_{3,2})\sum_{n=0}^{m}K_n(\alpha_{11}+\alpha_{12}-K_{2,1}\alpha_5-K_{2,1}\alpha_{16}); \qquad (19)$$

в) при расположении ТИТ в третьем слое:

$$\varphi_{1,3}(r,z)=\frac{I\rho_3}{4\pi}(1-K_{2,1})(1-K_{3,2})\sum_{n=0}^{m}K_n(\alpha_{12}+\alpha_{13});$$

$$\varphi_{2,3}(r,z)=\frac{I\rho_3}{4\pi}(1-K_{3,2})\sum_{n=0}^{m}K_n(\alpha_{12}+\alpha_{13}-K_{2,1}\alpha_4-K_{2,1}\alpha_{16});$$

$$\varphi_{3,3}(r,z)=\frac{I\rho_3}{4\pi}\left(\alpha_1+\sum_{n=0}^{m}K_n(\alpha_{12}+K_{2,1}K_{2,1}\alpha_{18}-K_{2,1}\alpha_{16}-K_{3,2}\alpha_{19})\right), \qquad (20)$$

где α_i — коэффициенты, имеющие следующий вид:

$$\alpha_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\mp\eta)^2}};\quad \alpha_{3,4}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\pm\eta\pm 2h_1\pm h_n)^2}};$$

$$\alpha_{5,6}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\mp\eta\pm 2h_1\pm h_n)^2}};\quad \alpha_{7,8}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\pm\eta\pm 2h_2\pm h_n)^2}};$$

$$\alpha_{9,10}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\mp\eta\pm 2h_2\pm h_n)^2}};\quad \alpha_{11,12}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\mp\eta+h_n)^2}};$$

$$\alpha_{13}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\eta-h_n)^2}};\quad \alpha_{14,15}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\pm\eta\mp 2h_1-2h_2-h_n)^2}};$$

$$\alpha_{16}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+\eta-2h_1+h_n)^2}};\quad \alpha_{17,18}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\mp\eta\mp 2h_1\pm 2h_2+h_n)^2}};$$

$$\alpha_{19}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+\eta-2h_2+h_n)^2}}.$$

Выводы

Полученные выражения (18)—(20) являются основой для моделирования различных физических процессов, в частности для расчета сложного неэквипотенциального ЗУ произвольной конфигурации, размещенного в трехслойном грунте. Разработанная модель позволяет выполнять автоматизированный расчет потенциала электрического поля в любой точке каждого слоя с помощью ПЭВМ.

A mathematical model of the point current source arranged in the earth with the three-layered structure has been developed. An adequacy of the proposed model to the already known models with current source arrangement in the bilayered structure.

1. *Бороницький М. А., Карпець І. Я., Лях В. В. та ін.* Правила улаштування електроустановок. Розділ 1. Загальні правила. Заземлення і захисні заходи електробезпеки. — Київ : Об'єднання енергетичних підприємств «Галузевий резервно-інвестиційний фонд розвитку енергетики», 2006. — 71 с.
2. *Линк И. Ю., Колиушко Д. Г., Колиушко Г. М.* Математическая модель неэквипотенциального заземляющего устройства подстанции, размещенного в двухслойном грунте // Электрон. моделирование. — 2003. — **25**, № 2. — С. 99—111.
3. *Бургсдорф В. В., Якобс А. И.* Заземляющие устройства электроустановок. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 400 с.
4. *Бургсдорф В. В.* Расчет заземлителей в неоднородных грунтах // Электричество. — 1954. — № 1. — С. 15—25.
5. *Максименко Н. Н.* Заземляющие устройства в многолетнемерзлых грунтах. — Норильск: НГМК, 1974. — 503 с.
6. *Колиушко Д. Г., Руденко С. С.* Аппроксимация функции, характеризующей трехслойную модель грунта, методом наименьших квадратов // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут «Техніка та електрофізика високих напруг». — 2011. — № 16. — С. 126—132.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М. : Главиздат, 1953. — 679 с.

Поступила 22.08.11

КОЛИУШКО Денис Георгиевич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. кафедры «Автоматизированные электромеханические системы» Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т». В 1996 г. окончил Харьковский государственный политехнический университет. Область научных исследований – диагностика заземляющих устройств объектов электроэнергетики.

РУДЕНКО Сергей Сергеевич, инженер III категории Научно-исследовательского и проектно-конструкторского ин-та «Молния» Национального технического университета «Харьковский политехнический ин-т». В 2010 г. окончил Национальный технический университет «Харьковский политехнический ин-т». Область научных исследований — математическое моделирование электромагнитных полей в неоднородных средах.