



УДК 681.518.2:621.391(045)

**А. А. Туник** \*, д-р техн. наук,  
**А. Н. Клипа** \*\*, канд. техн. наук  
Национальный авиационный университет  
(Украина, Киев, просп. Космонавта Комарова, 1,  
тел. (044) 497-81-86, E-mail: aatunik@mail.ru \*,  
(044) 406-74-27, E-mail: aklipa@mail.ru \*\*)

### **Идентификация математической модели продольного движения летательного аппарата при наличии шумов измерений и смещений датчиков**

Модели продольного движения самолетов относятся к классу жестких систем с наличием быстрых и медленных мод с существенно различными частотами. В связи с этим идентификация моделей динамики этих объектов в пространстве состояний при наличии помех измерений и смещений датчиков представляет собой сложную задачу. Предложена эффективная процедура идентификации этих моделей, основанная на применении методов максимального правдоподобия, стохастической аппроксимации и планирования эксперимента.

Моделі поздовжнього руху літаків належать до класу жорстких систем з наявністю швидких і повільних мод з суттєво різними частотами. В зв'язку з цим ідентифікація моделей динаміки цих об'єктів у просторі станів за наявності шумів вимірювань і зміщень датчиків є складною задачею. Запропоновано ефективну процедуру ідентифікації цих моделей, базовану на застосуванні методів максимальної правдоподібності, стохастичної апроксимації і планування експерименту.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* идентификация, моделирование, метод максимального правдоподобия, калмановская фильтрация, стохастическая аппроксимация.

**Актуальность проблемы.** Определение математических моделей (ММ) динамики легких летательных аппаратов (ЛА) имеет большое практическое значение при [1—4]:

- уточнении характеристик реального самолета (ранее определенных в аэродинамической трубе для его модели или расчетным путем) по результатам летных испытаний;
- диагностике самолета и проверке его соответствия нормам летной годности в процессе эксплуатации;
- решении задач проектирования систем управления полетом и их коррекции.

При этом принципиально важное значение имеет определение параметров линеаризованной модели в пространстве состояний (в форме Коши),

куда входят аэродинамические производные сил и моментов по переменным состояниям и управления, которые и определяют техническое состояние самолета в данный момент времени [1, 2, 4].

Особым случаем параметрической идентификации является идентификация так называемых жестких систем. Эту особенность предопределяет наличие в таких системах быстрых и медленных мод динамики, что приводит к расходимости алгоритмов идентификации. Линеаризованная модель динамики продольного движения самолета является наглядным примером жесткой системы [2, 4].

Будем рассматривать проблему определения динамических характеристик продольного движения легкого пилотируемого ЛА по записям летного испытания. Особенность такого класса самолетов заключается в том, что в них используются недорогие датчики с большим уровнем помех (виброзащита датчиков, как правило, не обеспечивается). Это приводит к интенсивным случайным погрешностям измерения, а кроме того, таким датчикам свойственны смещения (систематические погрешности), вызываемые рядом эксплуатационных факторов.

Попытки идентификации динамических характеристик продольных моделей ЛА описаны в [5], однако в этой работе не учтена особенность идентификации жестких систем и не рассмотрен вопрос идентифицируемости.

**Постановка задачи.** Необходимо разработать процедуру идентификации параметров модели продольного движения, являющейся моделью жесткой системы [6], по результатам летного эксперимента при наличии шумов измерений и смещений датчиков. Предполагается, что вид линеаризованной модели продольного движения ЛА в пространстве состояний известен [1, 2, 4], и задача заключается в определении параметров этой модели.

Эксперимент проводится в спокойную погоду, поэтому турбулентностью атмосферы можно пренебречь. Пилот выводит ЛА на определенную рекомендуемую высоту полета, триммирует полет, отклоняет рули в соответствии с заданным сигналом управления. В течение нескольких минут (время затухания переходных процессов) самолет представляет собой разомкнутую систему (отключена система управления), на которую подается входной сигнал управления и записываются сигналы реакции самолета на этот входной сигнал.

Поскольку проведение летного эксперимента является дорогостоящим, для отработки алгоритмов идентификации необходимо провести моделирование динамики продольного движения с учетом шумов и смещений всех датчиков с помощью пакета Simulink системы MATLAB. Моделирование динамики движения ЛА целесообразно провести на основе benchmark-модели, т.е. модели, прошедшей многоуровневые проверки и уточнения по результатам физических экспериментов в аэродинамичес-

ких трубах и летных испытаниях [7]. Тогда алгоритмы идентификации, управления, навигации, контроля и другие, прошедшие проверку на таких моделях, признают достоверными и пригодными для практического применения [7].

С учетом изложенных особенностей летного эксперимента сформулируем суть решаемой проблемы. Пусть движение ЛА описывается линеаризованной математической моделью в пространстве состояний с постоянными коэффициентами вида [1, 2, 4]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}$  — соответственно  $n \times n$  матрица и  $n \times 1$  вектор состояния;  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{u}$  —  $n \times m$  матрица и  $m \times 1$  вектор управления;  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{y}$  —  $l \times n$  матрица и  $l \times 1$  вектор измерений;  $\mathbf{b}$  — вектор смещений датчиков;  $\boldsymbol{\xi}$  — вектор гауссовых  $\delta$ -коррелированных случайных ошибок измерения,  $E\boldsymbol{\xi}(t) = 0$ ;  $E[\boldsymbol{\xi}(t)\boldsymbol{\xi}^T(t+\tau)] = \mathbf{R}\delta(\tau)$ , где  $E$  — знак математического ожидания;  $\mathbf{R}$  — ковариационная матрица ошибок измерения;  $\delta(\tau)$  — дельта-функция Дирака;  $\tau$  — временной сдвиг. Заданы записи управляющих сигналов  $\mathbf{u}(t)$  и измерений на выходах датчиков  $\mathbf{y}(t)$ , полученных в результате летного эксперимента.

Известно, что собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$  делятся на две группы, одна из которых представляет собой быстрое (короткопериодическое) движение, а другая — медленное (длиннопериодическое) движение. В связи с этим система (1) относится к категории жестких систем [6].

По результатам летного эксперимента в виде записей  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  необходимо определить матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  системы (1), элементы которой представляют собой аэродинамические производные  $\partial x_i / \partial x_j$  и  $\partial x_i / \partial u_k$ . Кроме того, необходимо определить смещения датчиков, которые на протяжении моделирования (летного эксперимента) считаются постоянными [8]. Таким образом, определению подлежит расширенный вектор параметров  $\boldsymbol{\theta}_p = [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b}]^T$ , где  $\boldsymbol{\theta} = [a_{11} \dots a_{nn} \ b_{11} \dots b_{nn} \ c_{11} \dots c_{ln}]^T$ ;  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  — элементы матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ . Перед выполнением летного эксперимента необходимо решить задачу планирования эксперимента в частотной области, т.е. определить оптимальную форму сигнала управления посредством максимизации детерминанта информационной матрицы Фишера.

Результаты решения этой задачи могут быть применены и для решения других задач этого класса, в которых измерения фазовых координат идентифицируемой системы сопровождаются случайными и систематическими погрешностями. В качестве примера можно привести задачи, возникающие при идентификации моделей динамики механических колебательных систем, систем виброизоляции [8] и др.

**Решение задачи.** С учетом шумов и смещений датчиков продольное движение самолета описывается в пространстве состояний системой уравнений в форме Коши (1), в которой соответствующие векторы и матрицы имеют следующий вид [1, 2, 4]:

$$\mathbf{x} = [V \ \alpha \ q \ \vartheta]^T; \ \mathbf{u} = [\delta \ e]; \ \mathbf{y} = [V \ \alpha \ q \ \vartheta]^T;$$

$$\mathbf{b} = [b_V \ b_\alpha \ b_q \ b_\vartheta]^T; \ \boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4]^T; \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_V & X_\alpha & X_q & -g \\ Z_V & Z_\alpha & Z_q & 0 \\ M_V & M_\alpha & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_{\delta e} \\ Z_{\delta e} \\ M_{\delta e} \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $V$  — истинная воздушная скорость ЛА;  $\alpha$  — угол атаки;  $q$  и  $\vartheta$  — угловая скорость и угол тангажа;  $\delta e$  — отклонение руля высоты;  $b_V, b_\alpha, b_q, b_\vartheta$  — смещения датчиков;  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  — шумы измерений;  $X_V, X_\alpha, X_q, X_{\delta e}$  и  $Z_V, Z_\alpha, Z_q, Z_{\delta e}$  — соответствующие частные производные продольной и вертикальной сил;  $M_V, M_\alpha, M_q, M_{\delta e}$  — соответствующие частные производные момента тангажа;  $g$  — ускорение свободного падения.

В качестве объекта исследования был выбран легкий самолет ДНС-2 «Beaver», имеющий benchmark-модель [3]. Для этой модели собственные числа матрицы состояния  $\mathbf{A}$  в (3) принимают следующие значения:

$$[-2,1603 \pm 2,4111 i; \ -0,0161 \pm 0,2631 i]. \quad (4)$$

Из (4) видно, что модули действительных частей собственных чисел отличаются в 134 раза, а модули самих собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$ : [0,2636; 3,2374] — в 12 раз.

Собственные частоты этой модели ЛА следующие: [3,240; 0,264] рад/с. Первая частота соответствует короткопериодической составляющей продольного движения, вторая — длиннопериодической составляющей. Из (4) следует, что короткопериодические колебания затухают значительно быстрее длиннопериодических. Поэтому одновременное определение параметров первых и вторых колебаний — весьма сложная проблема.

При проверке на идентифицируемость [1] установлено, что модель (2), (3) полностью идентифицируема (матрица идентифицируемости размером  $32 \times 12$  имеет ранг, равный числу неизвестных параметров, т.е. 12). Но поскольку эта модель описывает жесткую систему, в этом случае целесо-

образно выполнить количественную оценку идентифицируемости. Это можно сделать на основе анализа сингулярных чисел  $\sigma_i$  матрицы идентифицируемости  $\mathbf{Q}_{id}$  [1]:

$$\mathbf{Q}_{id} = \frac{\partial [(\mathbf{CB})^T (\mathbf{CAB})^T \dots (\mathbf{CA}^{2n-1}\mathbf{B})^T]^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

Сингулярные числа матрицы идентифицируемости для продольного движения самолета ДНС-2 «Beaver»  $\boldsymbol{\sigma} = [1,00 \ 2,12 \ 9,75 \ 32,16 \ 127,97 \ 295,00 \ 725,25 \ 2073,40 \ 4209,90 \ 8691,81 \ 32980,54 \ 146170,84]^T$ , имеют очень широкий диапазон: от 1,00 до  $1,46 \times 10^5$ . Разобьем множество сингулярных чисел  $\boldsymbol{\sigma}$  на подмножества малых и больших значений. Назовем параметры ММ, которым соответствуют малые значения сингулярных чисел матрицы идентифицируемости  $\mathbf{Q}_{id}$ , слабо идентифицируемыми параметрами. Заметим, что такое разбиение в каждом конкретном случае выполняется исследователем и зависит от конкретных физических особенностей объекта идентификации. В рассматриваемом случае параметры, определяющие длиннопериодическую составляющую модели в пространстве состояний,  $X_V, X_\alpha, X_q, Z_V, M_V, X_{\delta e}$ , являются слабо идентифицируемыми, поэтому обеспечить сходимость итерационного процесса параметрической идентификации ММ продольного движения весьма затруднительно.

Для получения приемлемых результатов необходимо проводить идентификацию продольного движения легкого ЛА в два этапа: идентификация короткопериодической и длиннопериодической составляющих продольного движения. При этом следует использовать хорошо известную декомпозицию полной математической модели ЛА на ММ длиннопериодического и короткопериодического движений [2, 4].

Поскольку ММ длиннопериодического движения [2] является не полностью управляемой, наблюдаемой и идентифицируемой, предлагается сначала оценивать параметры ММ короткопериодического движения ЛА, а затем параметры ММ всего продольного движения при фиксированных известных значениях оценок параметров модели динамики короткопериодического движения и оптимальном входном сигнале управления (отклонения руля высоты) для идентификации ММ длиннопериодического движения.

Для решения этой задачи необходимо, прежде всего, осуществить планирование эксперимента для определения оптимального входного сигнала, при котором обеспечивается наибольшая информативность результатов эксперимента.

**Планирование эксперимента в частотной области.** При планировании эксперимента в частотной области учитываются реальные частотные

свойства объекта и используется достаточная алгоритмическая поддержка в среде MATLAB. Пусть идентифицируемая дискретная система (рис. 1) описывается передаточной функцией  $W(z, \boldsymbol{\theta})$ , где  $z = e^{j\omega T}$ ,  $T$  — интервал квантования;  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_a, \theta_b]$  — коэффициенты числителя  $B(z, \boldsymbol{\theta}_b)$  и знаменателя  $A(z, \boldsymbol{\theta}_a)$  передаточной функции. Для этого необходимо выполнить переход от описания в пространстве состояний (1) к передаточным функциям в дискретной форме.

В [9, 10] показано, что если  $n_b = n_a = n$ , где  $n_a$  и  $n_b$  — порядки полиномов знаменателя и числителя  $W(z, \boldsymbol{\theta})$ , то входной сигнал, обеспечивающий информативный эксперимент, может быть полигармоническим, т.е. состоять из  $n$  гармоник:

$$u(t) = \sum_{i=0}^n A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i). \quad (5)$$

Естественно, с увеличением числа гармоник информативность эксперимента возрастает. Минимальное число гармоник, при котором сохраняется информативность эксперимента, согласно теореме Льюнга [10] составляет  $n_{\min} = n_a + n_b$ .

Спектр мощности сигнала (5) не зависит от фаз  $\varphi_i$ , однако они играют большую роль в генерировании входного сигнала, так как его форма в значительной мере зависит от фазового спектра. На практике широко применяется разложение Райса—Пирсона [8], представляющее собой полигармонический сигнал (5) с постоянными амплитудами, определяющими спектральную плотность сигнала  $u$ , и со случайными фазами  $\varphi_i$ , распределенными по равномерному закону в интервале  $[-\pi; \pi]$ .

Критерием оптимизации для идентификации дискретной системы (см. рис. 1) может быть выражение [11]

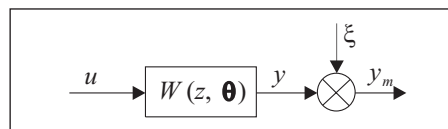
$$C(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N |u_k B(z, \boldsymbol{\theta}_b) - y_k A(z, \boldsymbol{\theta}_a)|^2, \quad (6)$$

где  $u_k$  и  $y_k$  — дискретные преобразования Фурье входного и выходного сигналов. Тогда информационная матрица Фишера, порождаемая критерием (6), имеет вид

$$\frac{\partial C(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} = \left( \frac{\partial C(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^* \left( \frac{\partial C(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{A})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right), \quad (7)$$

где  $*$  — Эрмитово сопряжение;  $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_k]^T$  — вектор, компонентами которого являются амплитуды полигармонического сигнала (5).

Рис. 1. Идентифицируемая дискретная разомкнутая система с учетом ошибки измерения



Задача минимизации объема эллипсоида неопределенности вектора параметров  $\theta$  сводится к максимизации выражения (7) и определению оптимального амплитудного спектра  $\mathbf{A}^0$  полигармонического сигнала (5) [11]:

$$\mathbf{A}^0 = \arg \min_{\mathbf{A} > 0} \det \left[ \left( \frac{\partial C(\theta, \mathbf{A})}{\partial \theta} \right)^T \left( \frac{\partial C(\theta, \mathbf{A})}{\partial \theta} \right)_* \right]^{-1}.$$

Гарантировать гладкость результирующего входного сигнала, что имеет большое значение для обеспечения безопасности полета при проведении эксперимента, можно с помощью минимизации пик-фактора [11]:

$$K_r = (M^+ - M^-) / \sqrt{2 \sum_{i=1}^N A_i^2},$$

где  $M^+$  и  $M^-$  — наибольшее положительное и наименьшее отрицательное значения сигнала  $u$ . После получения оптимальной формы входного сигнала проводится летный эксперимент (или моделирование движения ЛА с учетом шумов и смещений датчиков в Simulink).

**Моделирование продольного движения самолета** в процессе летного эксперимента выполняется по схеме, представленной на рис. 2. Это является вторым этапом процедуры идентификации, на котором данная процедура обеспечивается необходимой информацией. В результате моделирования получены записи исходных сигналов, которые содержат, кроме полезной составляющей, погрешности измерений.

Поскольку измерения компонент вектора состояния имеют значительные помехи, для параметрической идентификации модели ЛА в пространстве состояний целесообразно использовать метод максимального правдоподобия (ММП) [10]. Отрицательный натуральный логарифм от функции максимального правдоподобия (МП)  $P(\mathbf{y}|\hat{\theta})$ , полученной для линейной модели (1) с вектором гауссового шума измерений  $\xi$ , определяет следующий критерий идентификации [12]:

$$J(\hat{\theta}) = -\ln P(\mathbf{y}|\hat{\theta}) = 0,5 \left\{ \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i)^T \mathbf{R}_{in}^{-1} (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i) + N \ln |\mathbf{R}_{in}| + lN \ln (2\pi) \right\}, \quad (8)$$

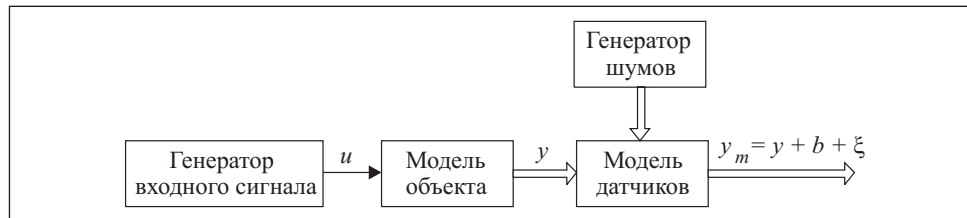


Рис. 2. Схема моделирования продольного движения самолета ДНС-2 «Beaver»

где  $(y_i - \hat{y}_i)$  —  $i$ -й вектор обновляющей последовательности;  $N$  — число точек измерений (зависит от длины реализации);  $l$  — число измеряемых величин;  $\|\mathbf{R}_{in}\|$  — норма Фробениуса ковариационной матрицы обновляющей последовательности. Тогда задача идентификации состоит в нахождении вектора параметров модели динамики, которые удовлетворяет условию  $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \theta_s} J(\hat{\theta})$ .

Оптимизационную процедуру поиска минимума отрицательного логарифма функции МП  $J(\hat{\theta})$  необходимо начинать с начальных значений вектора неизвестных параметров [13], определение которых представляет самостоятельную задачу. Поскольку число неизвестных параметров в любой модели ЛА достаточно велико, функция МП имеет локальные экстремумы и нахождение минимума (8) существенно зависит от выбора начальных значений вектора неизвестных параметров [10]. Поэтому на третьем этапе процедуры идентификации предлагается использовать метод наименьших квадратов (МНК) для определения начальных значений искомых параметров.

**Определение начальных значений искомых параметров.** Применение МНК не требует знания начальных значений. Однако этот метод имеет существенный недостаток — дает хорошие результаты только в случае, когда шумы отсутствуют или они минимальные. Но даже после грубой очистки сигналов (например, цифровым симметрическим нереккурсивным физически нереализуемым фильтром низких частот [14], основным свойством которого является отсутствие фазового сдвига) результаты МНК могут быть использованы как начальные значения параметров для инициализации процедуры идентификации модели в пространстве состояний по ММП. В работах по идентификации МНК, например [10], модель, параметры которой идентифицируются, представлена как «авто-регрессия — скользящее среднее», а именно

$$\mathbf{Y} = \Phi\theta + \mathbf{E}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{Y}$  — вектор выходных сигналов модели;  $\Phi$  — матрица регрессора;  $\mathbf{E}$  — вектор погрешности. Если модель идентифицируемого объекта представ-



лена в виде (9), то в результате идентификации вектор неизвестных параметров определяют по формуле

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{МНК}} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{Y}. \quad (10)$$

Для применения известного МНК (10) к модели в пространстве состояний (1) в работе [13] предложено видоизменить модель (9). В общем случае, когда число переменных состояния равно  $n$ , переменных управления —  $m$  и переменных измерения —  $l$ , а число измерений равно  $N$ , вектор  $\mathbf{Y}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{Y} = [y_1(i) \ y_1(i+1) \ \dots \ y_1(N) \ y_2(i) \ \dots \ y_2(N) \ \dots \ y_l(i) \ y_l(i+1) \ \dots \ y_l(N)]^T.$$

Размер вектора  $\mathbf{Y}$  в этом случае  $l(N-i+1) \times 1$ . Вектор неизвестных параметров при измерении всех переменных состояний имеет размер  $l(n+m) \times 1$  и вид

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{МНК}} = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} \ b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1m} \ a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nm} \ b_{n1} \ b_{n2} \ \dots \ b_{nm}]^T.$$

В данном случае, в отличие от [10], векторный регрессор для модели (1) заменяется расширенным блочно-диагональным матричным регрессором, который имеет размер  $l(N-i+1) \times l(n+m)$  и представляется в виде [13]

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_0 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Phi}_0 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \boldsymbol{\Phi}_0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} x_1(i-1) & x_2(i-1) & \dots & x_n(i-1) & u_1(i) & u_2(i) & \dots & u_m(i) \\ x_1(i) & x_2(i) & \dots & x_n(i) & u_1(i+1) & u_2(i+1) & \dots & u_m(i+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(N-1) & x_2(N-1) & \dots & x_n(N-1) & u_1(N) & u_2(N) & \dots & u_m(N) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$\mathbf{O}$  — нулевая матрица; размеры  $\boldsymbol{\Phi}_0$  и  $\mathbf{O}$  равны  $(N-i+1) \times (n+m)$ ;  $u_l(\cdot)$  и  $x_k(\cdot)$  — входные и выходные сигналы объекта, в данном случае совпадающие с вектором переменных состояния (2). После определения вектора начальных значений параметров  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{МНК}}$  по формуле (10) с учетом (11), (12) переходим к следующему этапу процедуры идентификации.

**Идентификация методом максимального правдоподобия с применением расширенной калмановской фильтрации и стохастической**

**аппроксимации.** Для минимизации критерия (8) в соответствии с ММП требуется оценка обновляющей последовательности  $(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i)$  на каждом шаге. При этом необходимо применение калмановской фильтрации, поскольку измерения  $\mathbf{y}_i$  для получения обновляющей последовательности модели (1) выполняются с погрешностями. В этом случае следует оценить не только параметры модели динамики легкого самолета, но и смещения датчиков. Для этого предложено [5, 12] расширить пространство состояний модели (1) посредством введения фиктивных переменных — смещений датчиков  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_\mu]^T$ , где  $\mu$  — число датчиков, имеющих смещение при идентификации движения легкого самолета.

После расширения пространства состояний векторы входа  $\mathbf{u}_p$ , состояния  $\mathbf{x}_p$ , измеряемого выхода  $\mathbf{y}_p$  принимают вид

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T,$$

$$\mathbf{x}_p = [\mathbf{x}, \mathbf{b}]^T = [x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_\mu]^T, \quad \mathbf{y}_p = \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_l]^T,$$

а уравнениям (1) при измерении всех переменных состояния соответствует следующая тройка матриц:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{O}_{n \times \mu} \\ \mathbf{O}_{\mu \times n} & \mathbf{O}_{\mu \times \mu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{O}_{\mu \times m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{O}_{(n-\mu) \times \mu} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{O}_{i \times j}$  — нулевая матрица размером  $i \times j$ ;  $\mathbf{E}_{i \times j}$  — единичная диагональная матрица размером  $i \times j$ . При этом вектор неизвестных параметров имеет вид  $\boldsymbol{\theta}_p = [a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{n1}, \dots, a_{nn}, b_{11}, \dots, b_{1m}, b_{n1}, \dots, b_{nm}, b_1, \dots, b_\mu]^T$ .

Ковариационная матрица  $\mathbf{R}$  шумов измерений  $\boldsymbol{\xi}$  является диагональной матрицей размером  $n \times n$ , тогда как ковариационная матрица  $\mathbf{Q}$  шумов состояния имеет размер  $n + \mu \times n + \mu$  и вид  $\mathbf{Q} = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_n, 0, \dots, 0]$ , поскольку шумы состояния влияют только на реальные переменные состояния. При этом матрица Гамильтона, ассоциированная с уравнением Риккати для синтеза оптимального наблюдателя [15],

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T (\mathbf{R}^{-1}) \mathbf{C} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

имеет  $2\mu$  нулевых собственных чисел, что приводит к невозможности решения задачи синтеза оптимального наблюдателя. В связи с этим в работе [12] предложено использовать прием рандомизации фиктивных переменных состояния:  $\mu$  последних уравнений состояния расширенной системы имеют вид  $\dot{b}_1 = \zeta_1 w_{n+1}, \dot{b}_2 = \zeta_2 w_{n+2}, \dots, \dot{b}_\mu = \zeta_\mu w_{n+\mu}$ , где  $w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_{n+\mu}$  — центрированные единичные белые шумы, а  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\mu$  — параметры, значения которых намного меньше единицы. Тогда ковариационная матрица шумов состояния имеет вид  $\mathbf{Q} = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_n, \zeta_1^2, \zeta_2^2, \dots, \zeta_\mu^2]$ . Гамильтониан (14) при такой матрице  $\mathbf{Q}$  является невырожденной матрицей (хотя и плохо обусловленной). Заметим также, что малые параметры  $\zeta_i$  аналогичны параметрам регуляризации, введенным в [16].

Для расширенной ММ с матрицами (13) и ковариационными матрицами  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  ковариационная матрица обновляющей последовательности  $\mathbf{R}_{in}$  фильтра Калмана имеет вид [5]  $\mathbf{R}_{in} = \mathbf{CQC}^T + \mathbf{R}$ . Кроме того, в работе [5] для получения лучших результатов предложено использовать вместо дискретного уравнения Риккати [15] его первое приближение на основе непрерывного уравнения Риккати:

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T - (1/d)\mathbf{PC}^T(\mathbf{R}_{in})^{-1}\mathbf{CP} + \mathbf{Q} = 0, \quad (15)$$

где  $d$  — интервал дискретизации. Решение уравнения (15) используется для определения матрицы коэффициентов усиления Калмана [15]:  $\mathbf{K} = \mathbf{PC}^T(\mathbf{R}_{in})^{-1}$ . Обновленный вектор пространства состояний определяется по известному алгоритму стационарной калмановской фильтрации [15], который используется на каждом шаге ММП.

Поскольку применение стационарной калмановской фильтрации к фиктивным переменным затруднено вследствие их слабой наблюдаемости, в [12] предложено совместное применение расширенного фильтра Калмана (для оценки реальных переменных состояния и грубой оценки фиктивных переменных состояния) и ускоренной стохастической аппроксимации Кестена [17] (для уточнения значений смещений датчиков, полученных в результате фильтрации расширенным фильтром Калмана). В связи с этим для переменных состояния, которые относятся к смещениям  $b_j$ , предлагается использовать дополнительную коррекцию, определяемую ускоренной стохастической аппроксимацией Кестена [17]:

$$\hat{x}_{bj}(i+1) = \hat{x}_{bj}(i+1) + \gamma(i)(y_{bj} - \hat{y}_{bj}),$$

где  $\hat{x}_{bj}(i+1)$  — переменная состояния на  $(i+1)$ -м шаге, относящаяся к  $j$ -му смещению, оцененному фильтром Калмана;  $\gamma(i)$  — затухающая последо-

вательность, удовлетворяющая условиям теоремы Дворецкого [17, 18];  $y_{bj}$  и  $\hat{y}_{bj}$  — измеренный и рассчитанный выходы объекта, относящиеся к  $j$ -му смещению.

В соответствии с теоремой Дворецкого [18] алгоритм стохастической аппроксимации сходится к оцениваемому параметру в среднеквадратическом с вероятностью единица. Совместная работа алгоритмов расширенной калмановской фильтрации и стохастической аппроксимации происходит во время выполнения оптимизационной процедуры ММП.

Оценку адекватности полученной модели в [11] предложено проводить посредством определения относительной погрешности оценочных и номинальных значений параметров по формуле

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\hat{\theta}_i - \theta_{i\text{ном}}}{\theta_{i\text{ном}}} \right| 100\%, \quad (16)$$

где  $\hat{\theta}_i$  и  $\theta_{i\text{ном}}$  — рассчитанное и номинальное значения  $i$ -го параметра.

**Результаты применения предложенных подходов.** Результатом решения задачи планирования эксперимента являются сигналы отклонения руля высоты для идентификации параметров короткопериодической (рис. 3) и длиннопериодической составляющих продольного движения. Сигнал для идентификации длиннопериодической составляющей аналогичен представленному на рис. 3, но его длина в 10 раз больше.

Результаты применения предложенной процедуры идентификации ММ динамики продольного движения самолета «Beaver» приведены в табл. 1, из которой видно, что относительная погрешность оценки параметров  $X_V, X_\alpha, X_q, Z_V, M_V, X_{\delta e}$  длиннопериодической составляющей движения ЛА значительно больше, чем погрешность оценки параметров  $Z_\alpha, Z_q, M_\alpha, M_q, Z_{\delta e}, M_{\delta e}$  короткопериодической составляющей. Этот факт подтверждается результатом анализа сингулярных чисел матрицы идентифицируемости, которые имеют достаточно широкий диапазон (от 1,00 до 146170,84) и свидетельствует о том, что параметры  $X_V, X_\alpha, X_q, Z_V, M_V, X_{\delta e}$  являются слабо идентифицируемыми, т.е. их невозможно оценить с достаточной достоверностью.

Для оценки смещений датчиков в соответствии с предложенной процедурой идентификации жесткой системы применен алгоритм стохастической аппроксимации Кестена. Результаты оценки фиктивных переменных состояния приведены в табл. 2.

Графическое представление оценивания смещений датчиков ( $b_V, b_\vartheta$ ) по алгоритму стохастической аппроксимации Кестена приведено на рис. 4, а, а корреляционные функции оценок смещений — на рис. 4, б. Как видно на

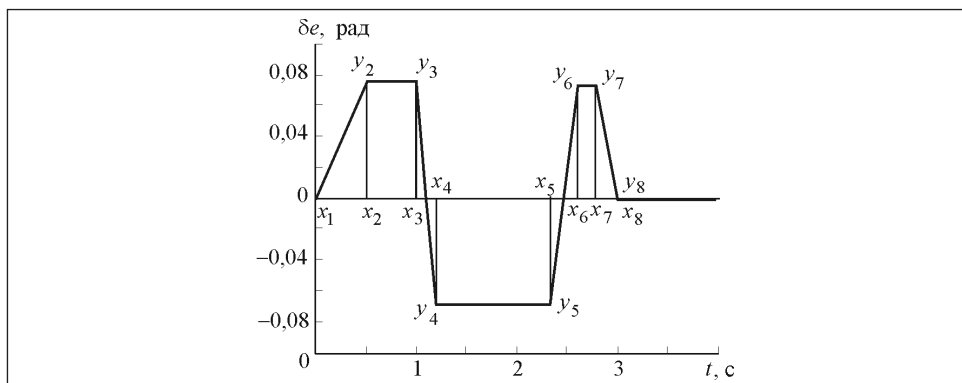


Рис. 3. Сигнал отклонения руля высоты для идентификации короткопериодической составляющей продольного движения ЛА

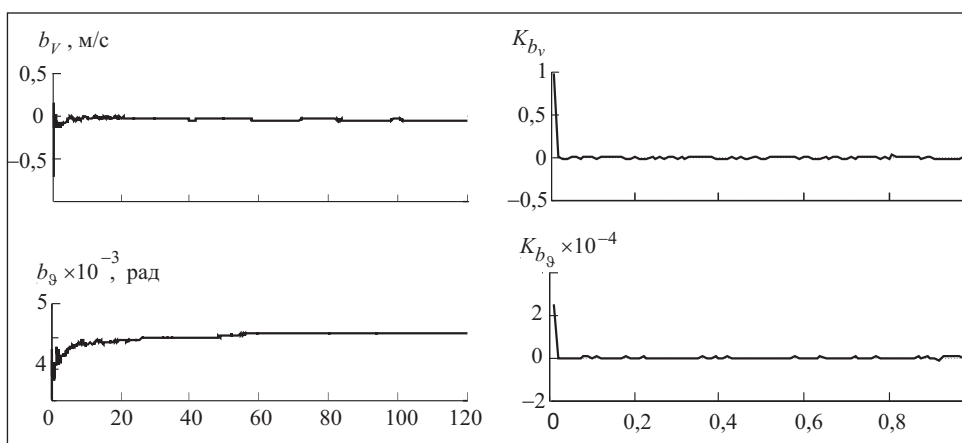


Рис. 4. Кривые оценивания смещений датчиков (а) и корреляционных функций оценок смещений датчиков (б)

рис. 4, б, корреляционные функции оценок смещений приближаются к дельта-функциям, что свидетельствует об их несмещенности [10].

Для оценки качества результатов идентификации воспользуемся среднеквадратической ошибкой  $\bar{\varepsilon}$  относительной погрешности оценочных значений параметров (15):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^K (\varepsilon_i)^2}, \quad (17)$$

где  $K$  — число идентифицируемых параметров модели динамики, а  $\varepsilon_i$  определяется по формуле (16). Среднеквадратическая ошибка  $\bar{\varepsilon}$  (17) относи-

Таблица 1

Параметр	Номинальное значение	Значение, рассчитанное по МНК	$\varepsilon_{\text{МНК}}, \%$	Значение, рассчитанное по предложенной методике	$\varepsilon_i, \%$
$Z_\alpha, \text{с}^{-1}$	-1,2850	-1,1792	8,23	-1,1847	7,80
$Z_q, -$	0,9764	0,8548	12,45	0,8982	8,00
$M_\alpha, \text{с}^{-2}$	-6,7370	-7,0389	4,48	-6,9912	3,77
$M_q, \text{с}^{-1}$	-3,0290	-2,7105	10,52	-2,8716	5,20
$Z_{\delta e}, \text{с}^{-1}$	-0,0929	-0,2073	123,14	-0,0914	1,63
$M_{\delta e}, \text{с}^{-2}$	-10,6000	-9,5858	9,57	-10,1195	4,53
$X_V, 1/\text{с}$	-0,0389	-0,0937	140,87	-0,0466	19,70
$X_\alpha, \text{м}/(\text{рад} \cdot \text{с}^2)$	5,4530	25,5194	367,99	5,9649	9,39
$X_q, \text{м}/(\text{рад} \cdot \text{с})$	-0,4076	-1,4965	267,15	-0,7072	73,50
$Z_V, \text{рад}/\text{м}$	-0,0084	-0,0021	75,00	-0,0148	76,70
$M_V, \text{м}/(\text{рад} \cdot \text{с})$	0,0139	0,0040	71,22	0,0184	32,28
$X_{\delta e}, \text{м}/(\text{рад} \cdot \text{с}^2)$	-0,608	-0,4900	19,41	-0,5622	7,53

Таблица 2

Смещение	Номинальное значение	Результат расчета	$\varepsilon_i, \%$
$b_\alpha, \text{рад}$	0,0080	0,0084	5,00
$b_q, \text{рад}/\text{с}$	-0,0060	-0,0057	5,00
$b_V, \text{м}/\text{с}$	-0,0500	-0,0473	5,40
$b_\delta, \text{рад}$	0,0050	0,0045	10,00

тельной погрешности рассчитанных значений параметров всего продольного движения ЛА составляет 9,52 % (при идентификации МНК — 41,94 %), только короткопериодической составляющей — 2,29 % (при идентификации МНК — 20,82 %), длиннопериодической — 18,9 % (при идентификации МНК — 81,26 %). Приведенные значения среднеквадратических ошибок свидетельствуют о высокой эффективности оценивания параметров короткопериодического движения и достаточной для практики точности оценивания параметров длиннопериодического движения.

## Выводы

Задача идентификации модели динамики продольного движения ЛА, относящихся к классу жестких систем, при наличии помех и смещений датчиков отличается тем, что вследствие слабой наблюдаемости и идентифицируемости отдельных переменных пространства состояний необходи-

мо применять дополнительные меры для улучшения сходимости процесса идентификации. К таким мерам относятся планирование эксперимента в частотной области с применением разложения Райса—Пирсона для получения оптимальной формы сигнала управления ЛА, применение МНК с матричными регрессорами для оценки начального приближения параметров, применение нереккурсивной цифровой фильтрации для грубой фильтрации помех измерений и разделения коротко- и длиннопериодических мод, совместная работа алгоритмов расширенной калмановской фильтрации и стохастической аппроксимации во время выполнения оптимизационной процедуры ММП. Результаты моделирования процесса идентификации на примере «эталонной» модели ЛА свидетельствуют об эффективности предложенной процедуры идентификации жестких систем.

Aircraft longitudinal motion models belong to the class of stiff systems because they include both the fast, and the slow modes, which frequencies considerably differ from each other. In this connection the identification of dynamics models of these plants in state space in the presence of measurement noise and sensors' biases is a difficult problem. An effective identification procedure of these models based on application of likelihood method, methods of stochastic approximation and experiment design is proposed in the paper.

1. Касьянов В. А. Моделирование полета. — К. : НАУ, 2004. — 400 с.
2. McLean D. Automatic flight control systems. — Englewood: Prentice Hall Inc., 1990. — 593 p.
3. Rauiw M. The Flight Dynamics and Control Toolbox. — MathWorks Company, 2000. — 263 p.
4. Боднер В. А. Теория автоматического управления полетом. — М. : Наука, 1964. — 700 с.
5. Jategaonkar R., Plaetschke E. Algorithms for aircraft parameter estimation accounting for process and measurement noise // Journal of Aircraft. — 1989. — P. 360—372.
6. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. — М. : Мир, 1979. — 312 с.
7. Frederick D., Rimer M. Benchmark problems for computer-aided control systems design packages // Abstracts of the 2<sup>nd</sup> Symp. on Computer-aided Control Systems Design of IEEE Control System Society. — Santa Barbara, 1985. — P. 162—164.
8. Вибрации в технике. Т. 6: Защита от вибрации и ударов. Под ред. чл.-кор. АН СССР К.В. Фролова. — М. : Машиностроение, 1981. — 456 с.
9. Кику А. Г., Костюк В. И., Краскевич В. Е. и др. Адаптивные системы идентификации. Под ред. А. Г. Кику. — Киев : Техніка, 1975. — 288 с.
10. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. А.С. Манделя и А. В. Назина. — М. : Мир, 1991. — 432 с.
11. Кліна А. М., Тунік А. А. Планування експерименту в частотній області для визначення оптимальної форми сигналу керування літальним апаратом, необхідного при ідентифікації його динамічних характеристик // Системи управління, навігації та зв'язку. — 2010. — № 2 (14). — С. 92—99.
12. Tunik A. A., Klipa A. N. Identification of flight dynamics models with biased sensors // Stability and control: Theory and applications. — 2003. — Vol. 5, №. 1. — P. 41—48.

13. *Кліпа А. М., Тунік А. А.* Визначення початкових значень параметрів для ідентифікації моделі в просторі станів // Електроніка та системи управління. — 2008. — № 4 (18). — С. 104—109.
14. *Бабак В. П., Хандецький В. С., Шрюфер Е.* Обробка сигналів: підручник. [2-е вид.] — К. : Либідь, 1999. — 496 с.
15. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления: Пер. с англ. В. А. Васильева и Ю. А. Николаева. — М. : Мир, 1977. — 252 с.
16. *Редько С. Ф., Ушкалов В. Ф., Яковлев В. П.* Идентификация механических систем. — К. : Наук. думка, 1985. — 216 с.
17. *Kesten H.* Accelerated stochastic approximation // Ann. Math. Stat. — 1958. — № 29. — P. 41—59.
18. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. — М. : Мир, 1972. — 295 с.

Поступила 01.02.11;  
после доработки 04.07.11

*ТУНИК Анатолий Азариевич, д-р техн. наук, профессор кафедры систем управления летательных аппаратов Ин-та аэрокосмических систем управления Национального авиационного университета. В 1961 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — системы управления и обработка данных.*

*КЛИПА Антонина Николаевна, канд. техн. наук, доцент кафедры систем управления летательных аппаратов Ин-та аэрокосмических систем управления Национального авиационного университета. В 2002 г. окончила Национальный авиационный университет. Область научных исследований — идентификация систем и управление.*