УДК 621.317

Е. Н. Безвесильная *, д-р техн. наук,
А. В. Коваль **, **Е. В. Гура** *, аспиранты
* Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т» (Украина, 03056, Киев, проспект Победы, 37,
тел. (044) 2360926, (093) 7518052, E-mail: bezvesilna@mail.ru, verstand@bigmir.net),
** Житомирский государственный технологический университет
(Украина, 10005, Житомир, ул. Черняховского, 103,
тел. (093) 7720888, E-mail: koval.anton@gmail.com)

Оптимальный фильтр выходного сигнала гравиметра

Рассмотрен случай фильтрации, когда выходной сигнал гравиметра состоит из аномалии ускорения силы тяжести и остаточных неточностей определения вертикального ускорения.

Розглянуто випадок фільтрації, коли вихідний сигнал гравіметра складається з аномалії прискорення сили ваги і залишкових неточностей визначення вертикального прискорення.

К л ю ч е в ы е   с л о в а : фильтрация, гравиметр, ускорение силы тяжести.

Известно что, выходной сигнал гравиметра авиационной гравиметрической системы (АГС) состоит из сигнала, пропорционального аномалии ускорения силы тяжести и остаточных неточностей определения вертикального ускорения (шума) самолета [1].

Попытаемся создать линейную систему для выделения полезного сигнала аномалии ускорения силы тяжести из суммы полезного сигнала и помехи (шума). Такую систему назовем фильтром. Поскольку надо выделить максимально (насколько возможно) полезный сигнал, возникает проблема создания оптимального фильтра.

Рассмотрим линейную систему (см. рисунок), где $v(t)$ — входной сигнал;$S(t)$ — полезный сигнал; $n(t)$ — сигнал помехи (шум); $q(t)$ — реальный выходной сигнал системы; $i(t)$ — идеальный выходной сигнал системы; $y_e(t)$ — сигнал погрешности, $y_e(t)=i(t)-q(t)$; $w(t)$ — весовая функция линейного фильтра.

На вход фильтра поступает суммарный сигнал $v(t)=S(t)+n(t)$. Поскольку аномалия ускорения силы тяжести и вертикальное ускорение самолета — случайные процессы, будем считать, что $S(t)$ и $n(t)$ также имеют случайный характер. Сигналы $S(t)$ и $n(t)$ будем описывать такими

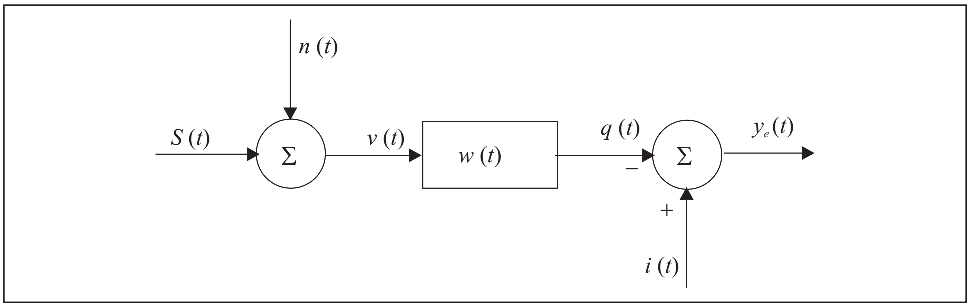

Схема сигналов на входе и выходе фильтра

статистическими параметрами, как их корреляционные и перекрестно-корреляционные функции.

Положим, что параметры системы постоянные или медленно изменяющиеся. Осуществим синтез фильтра для минимизации квадратичной погрешности. Определим передаточную функцию $w(p)$, которая обеспечивает минимальную квадратичную погрешность y_e^2.

Считая корреляционные функции входного сигнала $\varnothing_{vv}(\tau)$ и идеального выходного сигнала $\varnothing_{ii}(\tau)$ известными, вычислим оптимальную передаточную функцию фильтра (обеспечивающую минимальную квадратичную погрешность), решив при этом следующие задачи:

- выразим y_e^2 через весовую функцию $w(t)$ и корреляционную функцию входного сигнала;
- представим весовую функцию в выражении для y_e^2 в виде $w(t) = w_m(t) + w_e(t)$, т.е. выразим ее через оптимальную весовую функцию и весовую функцию помехи;
- сформируем выражение

$$\left.\frac{dy_e^2}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \tag{1}$$

где ε — погрешность измерения высоты;

- решим итоговое уравнение, определив $w_m(t)$ или $w_m(p)$.

Вычислим квадратичную погрешность:

$$y_e(t) = i(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - t_1)\, v(t - t_1)\, dt_1.$$

Возведем в квадрат $y_e(t)$:

$$y_e^2(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y_e^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} i^2(t)\, dt - 2i(y) \int_{-\infty}^{+\infty} w(t_1) \times$$

$$\times v(t-t_1)\,dt_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} w(t_1)\,v(t-t_1)\,dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} w(t_2)\,v(t-t_2)\,dt_2. \qquad (2)$$

Перепишем выражение (2) в виде

$$y_e^2(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i^2(t)\,dt - 2\int_{-\infty}^{+\infty} w(t_1)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i(t)\,v(t-t_1)\,dtdt_1 +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} w(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} w(t_2)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} v(t-t_1)\,v(t-t_2)\,dt_2dt_1. \qquad (3)$$

Учитывая корреляционную функцию

$$\varnothing_{xx}(\tau) = x(t)\,x(t+\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt,$$

перекрестно-корреляционную функцию

$$\varnothing_{xy}(\tau) = x(t)\,y(t+\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,y(t+\tau)\,dt,$$

а также функцию

$$\varnothing_{xy}(0) = x^2(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt,$$

перепишем уравнение (3) в виде

$$y_e^2(t) = \varnothing_{ii}(0) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} w(t_1)\varnothing_{iv}(t_1)\,dt_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} w(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} w(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)\,dt_2dt_1. \qquad (4)$$

Введя замену $w(t) = w_m(t) + w_e(t)$ в выражении (4), получим

$$y_e^2(t) = \varnothing_{ii}(0) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} w_m(t_1) + \varepsilon w_e(t_1)\varnothing_{iv}(t_1)\,dt_1 +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} w_m(t_1) + \varepsilon w_e(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} w_m(t_2) + \varepsilon w_e(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)\,dt_2dt_1.$$

Определим

$$\frac{dy_e^2(t)}{dt}=\frac{d}{d\varepsilon}\left\{-2\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_1)\varnothing_{iv}(t_1)dt_1+\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)dt_2dt_1\right\}+$$

$$+\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\varepsilon\left[-2\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_1)\varnothing_{iv}(t_1)\,dt_1+\int_{-\infty}^{+\infty}w_e(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)\,dt_2dt_1\right]\right\}+$$

$$+\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\varepsilon^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty}w_e(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty}w_e(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)\,dt_2dt_1\right]\right\}.$$

После дифференцирования по ε, пренебрегая составляющими второго порядка малости, получим

$$\frac{dy_e^2(t)}{d\varepsilon}=-2\int_{-\infty}^{+\infty}w_e(t_1)\varnothing_{iv}(t_1)\,dt_1+2\int_{-\infty}^{+\infty}w_e(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)dt_2dt_1. \tag{5}$$

Перепишем уравнение (5) с учетом (1):

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}w_e(t_1)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)\,dt_2-\varnothing_{vi}(t_1)\right\}dt_1=0. \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что необходимое условие устранения или отфильтрования всех возмущающих воздействий можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}w_m(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)\,dt_2-\varnothing_{vi}(t_1)=0. \tag{7}$$

Работоспособность фильтра определяется необходимостью устранения весовых функций $w_e(t)$ и $w_m(t)$ при $t<0$ в случае, если реализованный фильтр не соответствует необходимым условиям. Поэтому в уравнении (7) следует заменить нижнюю границу интегрирования нулем, а также изменить условия допустимой зоны: $t_1\geq 0$.

Решим уравнение (7) для определения оптимальной весовой функции $w_m(t)$. Используем преобразование Фурье корреляционной функции в виде спектральной плотности, характеризуемой средней мощностью на единицу частоты. Спектральная плотность $\varnothing_{xx}(\omega)$ случайного сигнала $x(t)$ связана с корреляционной функцией $\varnothing_{xx}(\tau)$ соотношением

$$\varnothing_{xx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varnothing_{xx}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau. \tag{8}$$

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2011. V. 33. № 4

Воспользовавшись преобразованием Фурье (8), из уравнения (7) получим

$$w_m(j\omega)\varnothing_{vv}(\omega)-D_{vi}(\omega)=0,$$

откуда найдем оптимальную передаточную функцию фильтра:

$$w_m(j\omega)=\frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing_{vv}(\omega)}. \tag{9}$$

Поскольку сигнал $S(t)$, поступающий на вход, не коррелирован с сигналом шума $n(t)$, спектральную плотность системы можно выразить суммой спектральных плотностей:

$$\varnothing_{vv}(\omega)=\varnothing_{SS}(\omega)+\varnothing_{nn}(\omega). \tag{10}$$

Следует заметить, что для перекрестной спектральной плотности системы идеальный выходной сигнал является необходимой частью входного сигнала, поэтому можно записать

$$\varnothing_{vi}(\omega)=\varnothing_{SS}(\omega). \tag{11}$$

С учетом (10) и (11) выражение (9) принимает вид

$$w_m(j\omega)=\frac{\varnothing_{SS}(\omega)}{\varnothing_{SS}(\omega)+\varnothing_{nn}(\omega)}. \tag{12}$$

Из выражения (12) видно, что передаточная функция фильтра, минимизирующего квадратичную погрешность, зависит только от спектральной плотности аномалии ускорения силы тяжести и спектральной плотности помехи на входе. Оптимальный фильтр осуществляет незначительное уменьшение частот, если преобладает спектральная плотность полезного сигнала, и его воздействие увеличивается, если доминирует спектральная плотность шума.

В случае, если необходимо реализовать функцию $w_m(t)$, следует ограничить диапазон допустимой области $t_1 \geq 0$ в уравнении (7), в результате чего уравнение (7) превращается в уравнение Винера—Хопфа.

Решим уравнение (7) с учетом ограничения $t_1 \geq 0$, переписав его в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_m(t_2)\varnothing_{vv}(t_1-t_2)\,dt_2-\varnothing_{vi}(t_1)=L(t_1),$$

где $L(t_1)=0$ для $t_1=0$ и $L(t_1)\neq 0$ для $t_1<0$. Применив преобразование Фурье, получим

$$w_m(j\omega)\varnothing_{vv}(\omega)-\varnothing_{vi}(\omega)=\frac{1}{2\pi}L(t_1). \tag{13}$$

Известно, что у любой случайной функции полюса лежат в левой полуплоскости при $t > 0$, и в правой — при $t < 0$. Соответственно этому функция $L(p)$ имеет полюса только в левой полуплоскости, а функция $w_m(p)$ — только в правой. Поскольку функции $\varnothing_{vv}(t_1 - t_2)$ и $\varnothing_{vi}(t)$ определены до времени t_1, то обычно эти функции имеют полюса в обеих половинах комплексной плоскости.

Подставив в (13) спектральную плотность в виде $\varnothing_{vv}(\omega) = \varnothing^{+}_{vv}(\omega)\varnothing^{-}_{vv}(\omega)$, где $\varnothing^{+}_{vv}(\omega)$ — часть $\varnothing_{vv}(\omega)$, имеющая полюса только в левой полуплоскости, а $\varnothing^{-}_{vv}(\omega)$ — часть $\varnothing_{vv}(\omega)$, имеющая полюса только в правой полуплоскости, запишем

$$w_m(j\omega)\varnothing^{+}_{vv}(\omega) - \frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)} = \frac{1}{2\pi}\frac{L(j\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)}. \tag{14}$$

Из выражения (14) видно, что первый член левой части уравнения имеет полюса только в левой полуплоскости комплексной плоскости, второй член левой части уравнения имеет полюса в обеих полуплоскостях, правая часть уравнения имеет полюса только в правой полуплоскости. Второй член левой части уравнения (14) можно представить в виде

$$\frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)} = \left[\frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)}\right]_{+} \left[\frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)}\right]_{-}. \tag{15}$$

С учетом (15) перепишем уравнение (14):

$$w_m(j\omega)\varnothing^{+}_{vv}(\omega) - \left[\frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)}\right]_{+} = \frac{1}{2\pi}\frac{L(j\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)} + \left[\frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)}\right]_{-}. \tag{16}$$

Вид выражения (16) свидетельствует о том, что правая часть уравнения имеет полюса только в правой полуплоскости, а левая — только в левой. Для того чтобы равенство (16) выполнялось, необходима абсолютная идентичность обеих частей этого уравнения, т.е.

$$w_m(j\omega)\varnothing^{+}_{vv}(\omega) - \left[\frac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)}\right]_{+} = 0. \tag{17}$$

Решив (17), получим передаточную функцию

$$w_m(j\omega) = \frac{\left[\dfrac{\varnothing_{vi}(\omega)}{\varnothing^{-}_{vv}(\omega)}\right]_{+}}{\varnothing^{+}_{vv}(\omega)}$$

оптимального фильтра, минимизирующего квадратичную погрешность, выраженную через спектральные плотности сигналов, для случая реализации фильтра во время измерений на протяжении полета.

Выводы

Полученный оптимальный фильтр позволяет минимизировать квадратичную погрешность и осуществляет выделение полезного сигнала гравиметра из выходного сигнала гравиметра АГС.

The case of filtering, when the output signal of the gravimeter consists of gravity anomalies and residual inaccuracies of determining the vertical acceleration is considered.

Безвесільна О. М. Авіаційні гравіметричні системи та гравіметри. — Житомир : ЖДТУ, 2007. — 604 с.

Поступила 18.01.11

БЕЗВЕСИЛЬНАЯ Елена Николаевна, д-р техн. наук, профессор кафедры приборостроения Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». В 1972 г. окончила Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований – методы измерения механических величин, гравиметрические системы.

КОВАЛЬ Антон Валерьевич, аспирант кафедры автоматизации и компьютерных технологий Житомирского государственного технологического университета, который окончил в 2008 г. Область научных исследований – гравиметрические системы и гравиметры, математическое моделирование и системы автоматизации.

ГУРА Евгений Викторович, аспирант кафедры приборостроения Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончил в 2009 г. Область научных исследований – гравиметрия, приборостроение, механика.