УДК 681. 3. 06

В. В. Нечаев, академик РАЕН
Московский государственный ин-т радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)
(Россия, 119454, Москва, пр-т Вернадского, д.78,
тел.(499) 434-74-47, 434-91-54, E-mail: nir@fcyb.mirea.ru)

Математическое моделирование интегральных характеристик сложных систем на основе модифицированного метода канонических разложений

(Статью представил чл.-кор. НАН Украины В. В. Васильев)

Рассмотрены метод канонических разложений, предложенный В.С. Пугачевым, и его модифицированная версия для решения одного класса задач идентификации вкладов структурных (аспектных) компонентов сложной системы в ее интегральную выходную характеристику.

Розглянуто метод канонічних розкладів, запропонований В.С. Пугачовим, і його модифікована версія для розв'язку одного класу задач ідентифікації вкладів структурних (аспектних) компонентів складної системи в її інтегральну вихідну характеристику.

Ключевые слова: математическое моделирование динамических систем, метод канонических разложений, структурная и параметрическая идентификация.

В сложных системах, на которые воздействует совокупность факторов (входных сигналов) и которые формируют ответный отклик (выходные реакции) в виде детерминированной или случайной интегральной выходной характеристики (ИВХ), достаточно часто возникает задача определения вкладов структурных или аспектных компонентов сложной системы в ИВХ.

Один из возможных подходов к решению рассматриваемого класса задач — разложение ИВХ на составляющие ее адекватные частные выходные характеристики. Такой подход может быть реализован различными методами в зависимости от характера (свойств) исходной сложной системы и как следствие — механизмов формирования ИВХ как линейных, так и нелинейных. В общем случае ИВХ формируются на основе аддитивных, мультипликативных или смешанных процедур. В тоже время, в сложных системах механизмы формирования ИВХ, как правило, неизвестны. Такие системы обычно представляются «черными ящиками», для которых известны (или наблюдаемы) входные воздействия (факторы) и выходные реакции (отклики).

Раскрытие внутренних механизмов функционирования таких систем, хотя бы частичное, возможно через определение компонентов, составляющих ИВХ. При этом используется априорная информация о структуре системы, а также, если это возможно, о ее функциональных аспектах. Априорная неопределенность механизмов формирования вкладов компонентов в ИВХ может быть преодолена посредством моделирования ИВХ как случайного вектора с последующим его разложением по координатным осям, каждая из которых представляет определенный аспект или компонент сложной системы. Подобная постановка задачи по сути является новой и относится к классу задач идентификации. Следовательно, можно сделать вывод о том, что речь идет об одном из новых классов задач идентификации.

Постановка задачи. Для решения рассматриваемого класса задач идентификации предлагается использовать модифицированный метод канонических разложений [1, 2]. Каноническим разложением случайной функции $X(t)$ принято называть ее представление в следующем виде [1]:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i x_i(t), \tag{1}$$

где $m_x(t)$ — математическое ожидание случайной функции $X(t)$; V_i — некоррелированные случайные величины коэффициентов разложения с нулевыми математическими ожиданиями; $x_i(t)$ — неслучайные элементарные функции, называемые координатными.

В случаях, когда интегральная выходная характеристика $X(t)$ сложного динамического объекта представима или является случайной функцией, для решения прикладных задач предлагается рассматривать совокупность ее значений в дискретном ряде точек. Как известно, исчерпывающей вероятностной характеристикой системы, состоящей из n случайных величин, является ее закон распределения. Однако в ряде случаев на практике бывает удобно использовать такие характеристики, как математические ожидания случайной функции $X(t)$ в точках t_j,

$$M[X(t_1)], ..., M[X(t_j)], ..., M[X(t_m)], \quad j = 1, ..., m,$$

дисперсии случайной функции $X(t)$ в тех же точках t_j

$$D[X(t_1)], ..., D[X(t_j)], ..., D[X(t_m)], \quad j = 1, ..., m,$$

а так же ковариации

$$K_{ij} = |M| [X_i X_j], \ i \neq j, \ i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., m,$$

число которых определяется произведением $n\,(n-1)=N$. Ковариации K_{ij} и дисперсии $D_i = K_{ii}$ образуют ковариационную матрицу $(n \times n)$, симметричную относительно главной диагонали.

Во многих практических задачах удобно оперировать случайными векторами с некоррелированными координатами. В работе [3] показано, что декорреляция координат случайного вектора эквивалентна приведению его ковариационной матрицы к диагональной форме, а из неоднозначности решения этой задачи следует существование счетного множества канонических разложений для любого случайного вектора с конечным моментом второго порядка.

При традиционном подходе, определяемом выражением (1), на координатные функции $x_i(t_j)$ для любых $i=1, ..., n$ и $j=1, ..., m$ раскладывается разность

$$X(t)-m_x(t)=\sum_{i=1}^{n}\dot{V}_i x_i(t),$$

а не случайная функция $X(t)$, рассматриваемая в качестве ИВХ. Следовательно, значение математического ожидания $m_x(t)$ случайной функции $X(t)$ не распределяется между координатными функциями $x_i(t)$. Таким образом, традиционная форма метода канонических разложений не может быть адекватно применена для решения поставленной задачи идентификации частных динамических характеристик сложного объекта.

Модифицированный метод канонических разложений. В предлагаемом модифицированном методе канонических разложений на координатные функции $x_i(t_j)$ раскладывается непосредственно ИВХ, т.е. случайная функция $X(t)$. Полученные при этом формулы дают возможность определять значения координатных функций $x_i(t_j)$ в дискретном ряде точек t_j, $j=1, ..., m$, а также вероятностные характеристики коэффициентов разложения — некоррелированных случайных величин V_i, $i=1, ..., n$. Точки дискретного ряда определяются на основе событийного подхода, механизмов квантования по Δt-методу, а также их взаимного комбинирования.

Следует заметить, что порядок (последовательность) реализации случайной функции $X(t)$, в силу линейности механизма, не влияет на результаты разложения $x_i(t_j)$. Рассмотрим представление значений случайной функции $X(t)$ в дискретном ряде точек, определяемых заданными моментами времени t_j, $j=1, ..., m$:

$$X(t_j)=\sum_{i=1}^{n}V_i x_i(t_j). \tag{2}$$

В выражении (2) на координатные функции $x_i(t_j)$ раскладывается сама случайная функция $X(t_j)$. В этом случае математическое ожидание функции $X(t_j)$ имеет вид

$$M[X(t_j)] = \sum_{i=1}^{n} M[V_i]\, x_i(t_j).$$

Возможна и частичная свертка результатов: сумма математических ожиданий компонентов разложения при любом конечном числе слагаемых, вследствие линейности разложения, всегда равна математическому ожиданию исходной случайной функции в каждой точке дискретного ряда. В предлагаемом модифицированном методе канонических разложений конкретные значения $M[V_i]$ можно задавать, изменяя тем самым вклад *i*-й координатной функции. При этом осуществляется переход от случайного вектора со значениями $X[t_1], ..., X[t_m]$ к случайному вектору с некоррелированными случайными составляющими (V_1, ..., V_n). Получаемый случайный вектор имеет некоррелированные составляющие и, следовательно, диагональную ковариационную матрицу. Нулевые значения элементов на главной диагонали означают равенство нулю дисперсий соответствующих случайных величин.

Математические выражения для разложения (2) имеют следующий вид:

$$X(t_1) = V_1 x_1(t_1) + ... + V_1 x_1(t_1) + ... + V_n x_n(t_1), \quad (3)$$

. . . .

$$X(t_j) = V_1 x_1(t_j) + ... + V_i x_i(t_j) + ... + V_n x_n(t_j), \quad (4)$$

. . . .

$$X(t_m) = V_1 x_1(t_m) + ... + V_i x_i(t_m) + ... + V_n x_n(t_m). \quad (5)$$

Рассмотрим значение случайной функции $X(t)$ в момент $t = t_1$. Предположим, что в момент t_1 значения всех координатных функций, кроме первой, равны нулю, т.е. $x_i(t_1) = 0$ для $i = 2, ..., n$. Тогда выражение (3) примет вид

$$X(t_1) = V_1 x_1(t_1). \quad (6)$$

При этом математическое ожидание определяется соотношением

$$M[X(t_1)] = M[V_1 x_1(t_1)].$$

Значение $M[V_1]$ можно задавать или выбирать. В простейшем случае принимаем $M[V_1] = 1$. Тогда можно записать

$$x_1(t_1) = M[X(t_1)]. \quad (7)$$

Значение дисперсии $D[V_1]$ случайной величины V_1 определяем из формулы (6):

$$M[X(t_1)\, X(t_1)] = M[V_1 V_1](x_1(t_1))^2 = D[V_1](x_1(t_1))^2. \quad (8)$$

Преобразуем левую и правую части равенства (8):

$$k_{11}+M\,[X(t_1)]^2=(x_1(t_1))^2 D\,[V_1]+M\,[V_1]^2,$$

где k_{11}— элемент ковариационной матрицы случайного вектора X. С учетом равенства (7) получаем

$$k_{11}+M\,[X(t_1)]^2=(x_1(t_1))^2(D\,[V_1]+1)=M\,[X(t_1)]^2(D\,[V_1]+1)\,.$$

Следовательно, дисперсия случайной величины V_1 может быть вычислена по формуле

$$D\,[V_1]=k_{11}\,/\,M\,[X(t_1)]^2. \tag{9}$$

Таким образом, определены значения первой координатной функции $x_1(t_1)$ в первой точке $t=t_1$, а также математическое ожидание $M\,[V_1]$ и дисперсия $D\,[V_1]$ случайной величины V_1. Значения всех остальных координатных функций в момент времени t_1 равны нулю.

Для момента времени $t=t_2$ значение случайной функции $X\,(t)$ определим по аналогии с $X(t_1)$. Предположим, что в момент $t=t_2$ не равны нулю только первая и вторая координатные функции $x_1(t_2)$ и $x_2(t_2)$:

$$X\,(t_1)=V_1 x_1(t_2)+V_2 x_2(t_2)\,. \tag{10}$$

При этом математическое ожидание определяется выражением

$$M\,[X(t_2)]=M\,[V_1]\,x_1(t_2)+M\,[V_2]\,x_2(t_2).$$

Полагая в простейшем случае $M\,[V_2]=1$, находим $M\,[X(t_2)]=x_1(t_2)+$ $+x_2(t_2)$, т.е. математическое ожидание случайной функции $X\,(t)$ в момент времени t_2 равно сумме значений первой и второй координатных функций в момент времени t_2. Отсюда находим значение второй координатной функции $x_2(t_2)$ в момент времени t_2 :

$$x_2(t_2)=M\,[X(t_2)]-x_1(t_2)\,. \tag{11}$$

Значение первой координатной функции $x_1(t_2)$ в момент времени t_2 можно найти из условия некоррелированности случайных величин V_1 и V_2:

$$M\,[X(t_1)\,X(t_2)]=x_1(t_1)\,x_1(t_2)\,M\,[V_1\,V_1]+x_1(t_1)\,x_2(t_2)\,M\,[V_1\,V_2]\,. \tag{12}$$

Преобразуем левую и правую части выражения (12):

$$\begin{aligned}M\,[X\,(t_1)]\,M\,[X\,(t_2)]+k_{12}&=x_1(t_1)\,x_1(t_2)(D\,[V_1+1)+\\+x_1(t_1)\,x_2(t_2)\,M\,[V_1]\,M\,[V_2]&=x_1(t_1)\,x_1(t_2)(D\,[V_1]+1)+x_1(t_1)\,x_2(t_2)=\\&=x_1(t_1)\,x_1(t_2)\,D\,[V_1]+x_1(t_1)\,x_1(t_2)+x_1(t_1)\,x_2(t_2).\end{aligned} \tag{13}$$

Подставив (7), (9), (11) в выражение (13), получаем

$$M[X(t_1)]\,M[X(t_2)]+k_{12}=x_1(t_2)[k_{11}/M[X(t_1)]]+M[X(t_1)]\,M[X(t_2)].$$

Отсюда следует

$$x_1(t_2)=(k_{12}/k_{11})\,M[X(t_1)]. \qquad (14)$$

Дисперсию $D[V_2]$ случайной величины V_2 определим из выражения (10) с учетом того, что V_1 и V_2 — некоррелированные случайные величины:

$$M[X(t_2)\,X(t_2)]=$$

$$=(x_1(t_2))^2\,M[V_1V_1]+(x_2(t_2))^2\,M[V_2V_2]+2x_1(t_2)\,x_2(t_2)\,M[V_1V_2].$$

Преобразуем левую и правую части полученного выражения:

$$k_{22}+(M[X(t_2)])^2=$$

$$=(x_1(t_2))^2(D[V_1]+1)+(x_2(t_2))^2(D[V_2]+1)+2x_1(t_2)\,x_2(t_2)\,M[V_1]\,M[V_2]=$$

$$=(x_1(t_2))^2D[V_1]+(x_1(t_2))^2+(x_2(t_2))^2D[V_2]+(x_2(t_2))^2+2x_1(t_2)\,x_2(t_2). \qquad (15)$$

Подставляя (9), (11) и (14) в выражение (15), получаем

$$D[V_2]=[k_{22}-k_{12}(k_{12}/k_{11})]/(x_2(t_2))^2.$$

Следует заметить, что дисперсия случайной величины V_2 равна нулю в случае линейной функциональной зависимости между первой и второй составляющими случайного вектора $X(t)$: $D[V_2]=0$ при $k_{22}=(k_{12}\,k_{12})/k_{11}$.

Значение случайной функции $X(t)$ в момент времени $t=t_3$ найдем по аналогии с $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Предположим, что в момент $t=t_3$ не равны нулю первые три координатные функции: $x_1(t_3)$, $x_2(t_3)$ и $x_3(t_3)$. Тогда значение случайной функции $X(t)$ в момент времени $t=t_3$ определяется выражением $X(t_3)=V_1x_1(t_3)+V_2x_2(t_3)+V_3x_3(t_3)$. При этом

$$M[X(t_3)]=M[V_1]\,x_1(t_3)+M[V_2]\,x_2(t_3)+M[V_3]\,x_3(t_3).$$

Полагая $M[V_3]=1$, получаем $M[X(t_3)]=x_1(t_3)+x_2(t_3)+x_3(t_3)$.

Значения координатных функций $x_1(t_3)$, $x_2(t_3)$ в момент t_3 и дисперсии случайной величины V_3 определяются аналогично из условия некоррелированности случайных величин V_1, V_2, V_3 согласно формулам

$$x_1(t_3)=(k_{31}/k_{11})\,M[X(t_1)];$$

$$x_2(t_3)=\{k_{23}-D[V_1]\,x_1(t_2)\,x_1(t_3)\}/D[V_2]\,x_2(t_2);$$

$$x_3(t_3)=M[X(t_3)]-(x_1(t_3)+x_2(t_3));$$

$$D[V_3]=[k_{33}-(D[V_1](x_1(t_3))^2+D[V_2](x_2(t_3))^2]/(x_3(t_3))^2.$$

Таким образом, на основании проведенного анализа канонического метода, математического описания случайной функции $X(t)$ и ее разложения $x_i(t_j)$ в дискретном ряде точек t_j, $j = 1, ..., m$, а также описания вероятностных характеристик получена совокупность математических выражений, определяющих предлагаемый модифицированный метод канонических разложений:

$$x_1(t_j) = (k_{j1} / k_{11})\, M[X(t_1)],\ j = 1, ..., m;$$

$$x_1(t_j) = M[X(t_j)] - \sum_{q=1}^{i-1} X_q(t_j),\ i = 2, ..., n,\ \ j = i\,;$$

$$D[V_i] = \left[k_{ii} - \sum_{q=1}^{i-1} D[V_q](x_q(t_j))^2 \right] / (x_i(t_j))^2,\ i = 2, ..., n,\ j = i\,;$$

$$x_i(t_j) = \left[k_{ii} - \sum_{q=1}^{i-1} D[V_q]\, x_q(t_p)\, x_q(t_j) \right] / D[V_i](x_i(t_p),$$

$$i = 2, ..., n,\ p = i,\ j = i + 1, ..., n\,.$$

При исследовании неслучайных элементарных функций $x_i(t)$, составляющих конкретно интерпретированной векторной случайной функции $X(t)$, может оказаться целесообразным работать с определенным числом координатных функций для их последующей интерпретации. В этом случае после реализации алгоритма канонического разложения можно уменьшить число координатных функций путем сложения значений выделенных координатных функций в каждой точке дискретного ряда. Сумма значений составляющих в каждый момент времени, в силу линейности модели, остается равной оценке математического ожидания случайной векторной функции $X(t)$. В этом заключается одна из важных особенностей предлагаемого подхода. Выбор суммируемых функций следует выполнять, исходя из особенностей рассматриваемого процесса и решаемой задачи.

Применение в медицине. Предлагаемый модифицированный метод канонических разложений применен для моделирования внутрисердечной гемодинамики. Изменение давления внутри полости левого желудочка сердца рассматривалось как ИВХ, представимая случайным процессом $X(t)$. Физически этот процесс протекает под влиянием упругих, фрикционных и инерционных сил, обусловленных свойствами крови и миокарда. При программной реализации алгоритма модифицированного метода канонических разложений в качестве исходного рассматривался полный сердечный цикл. Входными данными являлись опорные значения давления внутри левого желудочка в дискретном ряде точек для фиксированных моментов времени сердечного цикла. Число элементарных координатных функций определялось перечисленными выше физическими процессами, т.е. было сведено к трем, полученным в результате разложения. Были вычеслены вклады координатных функций в интегральное значение давления по формуле $\varphi_i = [x_i(t_j)] / M[X(t_j)]$.

В результате модельного эксперимента получены следующие значения вкладов координатных функций: для упругой составляющей $0,6 < \varphi_1 < < 0,9$; для инерционной составляющей $0,03 < \varphi_2 < 0,38$; для фрикционной составляющей $0,01 < \varphi_3 < 0,07$.

Полученные с помощью модифицированного метода канонических разложений результаты близки к косвенным физиологическим оценкам вкладов упругой, инерционной и вязкой составляющих давления крови для левого желудочка сердца в норме. Следует заметить, что непосредственное измерение указанных характеристик в клинических условиях на данном этапе практически невозможно. Поскольку давление является интегральной опосредованной характеристикой функционального состояния миокарда, применение модифицированного метода канонических разложений в случаях нормы и патологии может дать результаты, полезные для решения практических задач диагностирования.

Выводы

Таким образом, рассмотренный модифицированный метод канонических разложений может быть использован для исследования широкого круга динамических систем в различных предметных областях.

The paper deals with the V.S.Pugachev method of canonical expansions and its modified version for solving a class of identification problems of the contributions of structural (aspect) components of a complex system to its integrated output characteristic.

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей.— М. : Наука, 1964. — 564 с.
2. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М. : Гостехиздат, 1957. — 884 с.
3. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М. : Наука, 1979. — 496 с.

Поступила 01.12.10

НЕЧАЕВ Валентин Викторович, академик РАЕН, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Интеллектуальные технологии и системы» Московского государственного ин-та радиотехники, электроники и автоматики (технического университета). В 1967 г. окончил Московский энергетический ин-т. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование, системы искусственного интеллекта, автоматическое управление.