УДК 519.21

А. В. Макаричев, канд. физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61078, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. (057) 7073737, E-mail: amakarichev@mail.ru)

Асимптотическое распределение времени с момента отказа до выхода комплексов сложных восстанавливаемых систем из множеств неисправных состояний. II

Рассмотрены последовательные соединения в комплексы сложных восстанавливаемых систем с марковским потоком отказов элементов и индивидуальной функцией распределения времени их обслуживания. Число обслуживаемых элементов сложных систем возрастает обратно пропорционально интенсивности их отказов так, что суммарная нагрузка на систему обслуживания ограничена сверху величиной, меньшей единицы, с дисциплиной обслуживания требований в порядке их возникновения. Найдено асимптотическое распределение времени с момента отказа до выхода комплексов сложных восстанавливаемых систем из множества неисправных состояний.

Розглянуто послідовні сполучення у комплекси складних відновлюваних систем з марківським потоком відмовлень елементів та індивідуальною функцією розподілу часу їхнього обслуговування. Число елементів складних систем, що обслуговуються, зростає зворотньо пропорційно інтенсивності їхніх відмовлень так, що сумарне навантаження на систему обслуговування, обмежене зверху величиною, меншою за одиницю, з дисципліною обслуговування вимог у порядку їхнього надходження. Знайдено асимптотичний розподіл часу від моменту відмови до виходу комплексів із чисельних станів несправності.

К л ю ч е в ы е с л о в а: последовательные соединения в комплексы сложных восстанавливаемых систем.

Лемма 6. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1 -}(x_1,\, x_{sk},\, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1,\, x_{sk},\, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любое число $\varepsilon > 0$. Из леммы 3 следует, что существует такое $z = z(\varepsilon)$, что для любого $z \geq z(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_\lambda(x_1, x_{sk})\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{15}$$

Поскольку $\lambda(0) \le \lambda$, из леммы 2 следует, что для любого $x \ge 0$

$$B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk}),\ \ B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x) \le B_\lambda(x_1, x_{sk})\,. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что для любого $x \ge 0$

$$\int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6},$$

$$\int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} < \frac{\varepsilon}{6}\,. \tag{17}$$

Согласно аксиоме непрерывности теории вероятностей для выбранного ε существует такое натуральное число $l = l(\varepsilon)$, что для любого $l \ge l(\varepsilon)$

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(z) > l) < \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}\,.$$

Отсюда и из неравенства $x_1 < x_{sk} < z$ следует, что

$$P(\Pi_{\lambda(0)}(x_1) > l) < P(\Pi_{\lambda(0)}(z) > l) < \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}\,. \tag{18}$$

Пусть C_l — случайное событие, состоящее в том, что совпадут моменты возникновения первых l требований двух пуассоновских потоков с параметрами $\lambda(0)$ и $\lambda(0)_-$ (второй поток получается из первого просеиванием). Тогда $P(C_l) = (1 - kN^{-1})^l \to 1$ при $N \to \infty$. Отсюда следует, что для выбранного $\varepsilon > 0$ существует такое $l = l(\varepsilon)$, при котором для любого $l \ge l(\varepsilon)$

$$P(C_l) > 1 - \frac{\varepsilon}{6|\Delta(z)|}\,. \tag{19}$$

Пусть $C = \{\Pi_{\lambda(0)}(z) \le l\} C_l$ и $I(C)$ — индикатор случайного события C. Тогда

$$\begin{aligned} B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x) &= P(\varsigma_0^- > x_1,\ v_0^{j-}(x_1) > x_{sk} - x_1 + x) = \\ &= P(\varsigma_0^- I(C) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(C) > x_{sk} - x_1 + x) + \\ &+ P(\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1,\ v_0^{j-}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + x), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x) &= P(\varsigma_0 > x_1,\ v_0^{j}(x_1) > x_{sk} - x_1 + x) = \\ &= P(\varsigma_0 I(C) > x_1,\ v_0^{j}(x_1)\, I(C) > x_{sk} - x_1 + x) + \\ &+ P(\varsigma_0 I(\overline{C}) > x_1,\ v_0^{j}(x_1)\, I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + x). \end{aligned} \tag{21}$$

Из построения случайного события C следует, что

$$P\{\varsigma_0 I(C) > x_1, v_0^j(x_1) I(C) > x_{sk} - x_1 + x\} =$$

$$= P\{\varsigma_0^- I(C) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(C) > x_{sk} - x_1 + x\}. \tag{22}$$

Поскольку

$$P\{\varsigma_0 I(\overline{C}) > x_1, v_0^j(x_1) I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + x\} <$$

$$< P(\overline{C}) \le P(\Pi_{\lambda(0)} > l) + P(\overline{C}_l) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|} \tag{23}$$

(здесь использованы (18) и (19)) и

$$P\{\varsigma_0^- I(\overline{C}) > x_1, v_0^{j-}(x_1) I(\overline{C}) > x_{sk} - x_1 + x\} < P(\overline{C}) < \frac{\varepsilon}{3|\Delta(z)|}, \tag{24}$$

из (20)—(24) следует, что для любого $x \ge 0$

$$\left| B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x) - B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x) \right| < \frac{2}{3|\Delta(z)|}. \tag{25}$$

Согласно свойству интеграла с учетом (25) получаем

$$\left| \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int \left| B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x) - B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x) \right| dx_1 \ldots dx_{sk} <$$

$$< \int\limits_{\Delta(z)} \ldots \int \frac{2}{3|\Delta(z)|}\, dx_1 \ldots dx_{sk} = \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

Из (17) и (26) следует, что для любого $N \ge N(\varepsilon)$ и любого $x \ge 0$

$$\left| \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1 -}(x_1, x_{sk}, x) dx_1 \ldots dx_{sk} \right| + \left| \int\limits_{\Delta \setminus \Delta(z)} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, x)\,dx_1\ldots dx_{sk} - \int\limits_{\Delta(z)}\ldots\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\,dx_1\ldots dx_{sk}\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon\,.$$

Отсюда и из определения предела последовательности следует утверждение леммы 6. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$ равномерно по $x\geq 0$

$$\left|J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x)-\int\limits_{\Delta}\ldots\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\,dx_1\ldots dx_{sk}\right|\to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты введем обозначения

$$J_N(U, x)=J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x),$$

$$J_N^{(1)}(U, x)=\int\limits_{\Delta}\ldots\int B^{j_1\ldots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, x)\,dx_1\ldots dx_{sk},$$

$$J_N^{(2)}(x)=\int\limits_{\Delta}\ldots\int B_0^{j_1-}(x_1, x_{sk}, x)\,dx_1\ldots dx_{sk},$$

$$J_N^{(3)}(x)=\int\limits_{\Delta}\ldots\int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\,dx_1\ldots dx_{sk}.$$

Из лемм 5, 6 и 7 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существуют такие натуральные числа $N_1=N_1(\varepsilon)$, $N_2=N_2(\varepsilon)$, $N_3=N_3(\varepsilon)$, что соответственно для любого натурального числа $N>N_1$ и любого $x\geq 0$

$$\left|J_N(U, x)-J_N^{(1)}(U, x)\right|<\varepsilon/3,$$

для любого $N>N_2$ и любого $x\geq 0$

$$\left|J_N^{(1)}(U, x)-J_N^{(2)}(x)\right|<\varepsilon/3,$$

для любого $N>N_3$ и любого $x\geq 0$

$$\left|J_N^{(2)}(x)-J_N^{(3)}(x)\right|<\varepsilon/3.$$

Пусть $N_0=\max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда для любого натурального числа $N>N_0$ и любого $x\geq 0$ справедливо неравенство

$$\left|J_N(U, x)-J_N^{(3)}(x)\right|\leq\left|J_N(U, x)-J_N^{(1)}(U, x)\right|+\left|J_N^{(1)}(U, x)-J_N^{(2)}(x)\right|+$$

$$+\left|J_N^{(2)}(x)-J_N^{(3)}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\,.$$

Лемма 7 доказана.

Пусть j — номер элемента j_1 и пусть $v_0^j=\eta_j+w^{(0)}$ — стационарное время пребывания требования j-го типа в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda(0),G_0}$. Оно состоит из двух независимых случайных слагаемых: длины η_j требования j-го типа с функцией распределения $G_j(x)=P(\eta_j\le x)$ и стационарного времени ожидания обслуживания $w^{(0)}$ в РО комплекса $\mathrm{N}_{\lambda(0),G_0}$.

Лемма 8. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk}<\infty$. Тогда для любого $x\ge 0$

$$\int\limits_{\Delta}\!\!...\!\int B_0^{j_1}(x_1,\,x_{sk}\,,\,x)\,dx_1...\,dx_{sk}=\int\limits_{t>0}\frac{t^{ks-2}}{(ks-2)!}P\,(v_0^j>t+x)\,dxT_{\lambda(0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем в рассматриваемом кратном интеграле замену переменных $t=x_1,\,t_1=x_{sk}-x_1,\,t_2=x_{sk-1}-x_1\,,...,\,t_{sk-1}=x_{sk}-x_{sk-1}$. После этой замены интеграл принимает вид

$$\int\limits_{t_1>t_2>...>t_{sk-1}>0,}...\int\limits_{t>0}P\,\{\varsigma_0>t,v_0^j(t)>t_1+x\}\,dtdt_1...\,dt_{sk-1}=$$

$$=\int\limits_{t_1>...>t_{sk-1}>0,}...\int dt_1...\,dt_{sk-1}\int\limits_{t>0}P\,\{\varsigma_0>t,v_0^j(t)>t_1+x\}\,dt\,.$$

Из предельной теоремы для регенерирующих процессов [1, 2] следует, что

$$\int\limits_{t>0}P\,\{\varsigma_0>t,v_0^j(t)>t_1+x\}\,dt=P\,\{v_0^j>t+x\}\,T_{\lambda(0)}\,.$$

Интегрируя и полагая $t=t_1$, из двух последних равенств находим искомый интеграл

$$\int\limits_{\Delta}\!\!...\!\int B_0^{j_1}(x_1,x_{sk},x)\,dx_1...\,dx_{sk}=$$

$$=\int\limits_{t_1>t_2>...>t_{sk-1}}...\int P\,\{v_0^j>t_1+x\}\,dt_1...\,dt_{sk-1}T_{\lambda(0)}=$$

$$=\int\limits_{t>0}\frac{t^{sk-2}}{(sk-2)!}P\,\{v_0^j>\,t+x\}\,dtT_{\lambda(0)}\le\frac{E\,[(v_0^j)^{sk-1}]}{(sk-1)!}T_{\lambda(0)}<\infty$$

для любого $x\ge 0$, так как существует конечный момент $m_{sk}<\infty$ и $\rho<1$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. В условиях леммы 8 при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$q_0^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x) \sim \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int_{t>0} \frac{t^{sk-2}}{(sk-2)!} P(v_0^j > t + x)\, dt T_{\lambda(0)},$$

где j-номер элемента j_1, отказавшего первым на периоде регенерации из первых k сложных систем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 1 получаем равенство

$$q_0^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x).$$

Из леммы 7 при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$ вытекает

$$\left| J_N(U, j_1, \ldots, j_{sk}, x) - \int_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} \right| \to 0,$$

а из леммы 8 —

$$\int_{\Delta} \ldots \int B_0^{j_1}(x_1, x_{sk}, x)\, dx_1 \ldots dx_{sk} = \int_{t>0} \frac{t^{sk-2}}{(sk-2)!} P(v_0^j > t + x)\, dx T_{\lambda(0)}.$$

Из последних трех соотношений при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$ получаем

$$q_0^{j_1 j_2 \ldots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x) \sim \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int_{t>0} \frac{t^{sk-2}}{(sk-2)!} P(v_0^j > t + x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Лемма 9 доказана.

Обозначим $q_0^{12\ldots k}(x) = P\{U^{12\ldots k}, \tau^- > x\}$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет обычный отказ комплекса по 1, 2, ..., k-слабомонотонному минимальному пути и комплекс будет находиться в неисправном состоянии более длительное время, чем x. Для краткости обозначим $v_0(i_1^l) = v_0^j$, где $j = i_1^l$ — номер элемента, отказавшего первым из первых k сложных систем на периоде регенерации, и этот элемент из l-й сложной системы, отказавшей на пути π_l, $l = 1, 2, \ldots, k$.

Лемма 10. В условиях леммы 8 при $N \to \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$q_0^{12\ldots k}(x) \sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \sum_{l=1}^{k} \int_{t>0} t^{sk-2} P(\nu_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$-последовательность отказавших элементов в первых k системах, приведших к отказу комплекса. Пусть

$$\begin{array}{l} i_1^1, i_2^1, \ldots, i_s^1, \\ i_1^2, i_2^2, \ldots, i_s^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_1^k, i_2^k, \ldots, i_s^k \end{array} \tag{27}$$

есть последовательность номеров отказавших элементов 1, 2, …, k-й систем, приведших к отказу комплекса. Каждый из этих наборов определяет монотонный минимальный путь π_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, по которому произошел отказ i-й сложной системы. Таким образом, $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$ — перестановка из номеров (27), указывающая последовательность, в которой произошли отказы элементов в этих сложных системах, и при этом для каждого верхнего индекса сохраняется монотонность по нижнему индексу. Следовательно,

$$q_0^{12\ldots k}(x) = \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi \in \Pi_0^k}} \sum_{(j_1,\, j_2,\, \ldots,\, j_{sk})} q_0^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x), \tag{28}$$

где $q_0^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x)$ — вероятность обычного отказа комплекса и его пребывания в неисправном состоянии более длительное время, чем x, по таким 1, 2, ..., k-слабомонотонным путям, что отказ l-й сложной системы произошел по монотонному минимальному пути π_l $(l = 1, 2, \ldots, k)$, а перестановка $j_1, j_2, \ldots, j_{sk}$ определяет порядок отказов элементов из первых k сложных систем. Из леммы 1 и определения условной вероятности $B^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(U, x_1, \ldots, x_{sk}, x)$ в силу дисциплины обслуживания требований в порядке поступления следует, что вероятность $q_0^{j_1 j_2 \cdots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, x)$ не зависит от порядка отказов элементов $j_2, \ldots, j_{sk}$, отказавших вслед за элементом j_1 из первых k сложных систем комплекса, а равенство $J_N(U, j_1, j_2, \ldots, j_{sk}, x) = J_N(U, j_1, x)$ не зависит от номеров элементов $j_2, \ldots, j_{sk}$. Поэтому во внутренней сумме (28) для каждого элемента j_1 с номером $j = i_1^l$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ будет ровно $\dfrac{(sk-1)!}{(s-1)!(s!)^{k-1}}$

равных слагаемых, каждое из которых при $N \to \infty$ согласно лемме 9 равномерно по $x \ge 0$ эквивалентно

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \int_{t>0} \frac{t^{sk-2}}{(sk-2)!} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Отсюда при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$ получаем

$$\sum_{(j_1 j_2 \dots j_{sk})} q_0^{j_1 j_2 \dots j_{sk}}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, x) \sim$$

$$\sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \sum_{l=1}^{k} \int_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}. \qquad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$q_0^{12\dots k}(x) \sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \dots\dots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk}} \sum_{l=1}^{k} \int_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Лемма 10 доказана.

Обозначим $q_0^{l_1 l_2 \dots l_k}(x) = P(U^{l_1 l_2 \dots l_k}, \tau^- > x)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет обычный отказ комплекса по l_1, l_2, ..., l_k-слабомонотонному минимальному пути и время пребывания комплекса в неисправном состоянии будет больше, чем x $(1 \le l_1,\ l_2 = l_1 + 1, \dots, l_k = l_1 + k - 1 \le N)$.

Обозначим $P(U, \tau^- > x)$ вероятность того, что на периоде регенерации произойдет обычный отказ комплекса и время пребывания его в неисправном состоянии будет больше, чем x.

Лемма 11. В условиях леммы 8 при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$P(U, \tau^- > x) \sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1} k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \dots\dots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} \int_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения комплекса N в силу однотипности сложных систем, его составляющих, и того, что дисциплина обслуживания требований в РО отказавших элементов не зависит от номе-

ров сложных систем, где они отказали, следует, что для любых $1 \le l_1 < l_2 < ...$
$...< l_k \le N$ $(1 \le l_1, l_2 = l_1 + 1, ..., l_k = l_1 + k - 1 \le N)$

$$q_0^{l_1 l_2 ... l_k}(x) = q_0^{12...k}(x),$$

откуда и по определению $P(U, \tau^- > x) = (N - k + 1)\, q_0^{12...k}(x)$. Отсюда согласно лемме 10 и эквивалентности $(N - k + 1) \sim N$ при $N \to \infty$ следует утверждение леммы 11.

Лемма 12. Пусть $\rho < 1$ и существует конечный момент $m_{sk+1} < \infty$. Тогда при $N \to \infty$ $P(A) \sim P(U)$.

Доказательство. Интегрируя по частям, запишем

$$\int\limits_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t)\, dt = \frac{E[v_0(i_1^l)]^{sk-1}}{(sk-1)}.$$

Используя это равенство и утверждение леммы 11 при $x = 0$, после сокращения на $(sk - 1)$ получаем следующую эквивалентность:

$$P(U) = P(U, \tau^- > 0) \sim \frac{1}{(s-1)!(s!)^{k-1} k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} E[v_0(i_1^l)]^{sk-1} T_{\lambda(0)}.$$

Отсюда и из лемм 10, 14 [3] при $N \to \infty$ получаем

$$P(A) \sim \frac{1}{(s-1)!(s!)^{k-1} k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} E[v_0(i_1^l)]^{sk-1} T_{\lambda(0)} \sim P(U),$$

откуда в силу транзитивности отношения эквивалентности при $N \to \infty$ следует $P(A) \sim P(U)$. Лемма 12 доказана.

Положим

$$F(x) = 1 - \frac{(sk-1) \sum\limits_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum\limits_{l=1}^{k} \int\limits_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t + x)\, dt}{\sum\limits_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum\limits_{l=1}^{k} E[v_0(i_1^l)]^{sk-1}}, \quad x \ge 0.$$

Теорема. Пусть $\rho<1$ и существует конечный момент $m_{sk+1}<\infty$. Тогда при $N\to\infty$ равномерно по натуральному номеру i $\lim\sup_{x\ge0}\left|P\{\tau^-\le x\}-F(x)\right|=0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения для следующих случайных событий: U_i = {i-й отказ комплекса является обычным}; $\overline{U}_i$ = {i-й отказ комплекса не является обычным}.

Представим вероятность $P\{\tau^->x\}$ как сумму вероятностей несовместных событий:

$$P\{\tau_i^->x\}=P\{U_i,\tau_i^->x\}+P\{\overline{U}_i,\tau_i^->x\}. \qquad (30)$$

В этой сумме второе слагаемое оценим сверху:

$$P\{\overline{U}_i,\tau_i^->x\}\le P(\overline{U}_i)=1-P(U_i). \qquad (31)$$

Вероятность того, что i-й отказ комплекса является обычным, равна условной вероятности того, что произошедший на периоде регенерации отказ комплекса является обычным:

$$P(U_i)=P(U|A)=\frac{P(U)}{P(A)}. \qquad (32)$$

Из леммы 12 следует, что при $N\to\infty$

$$P(U)\sim P(A) \text{ или } \frac{P(U)}{P(A)}\to1. \qquad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что при $N\to\infty$ $\lim\sup_{i\ge1}[1-P(U_i)]=0.$ Отсюда и (31) следует, что при $N\to\infty$ равномерно по номеру i $\lim\sup_{x\ge0}P\{\overline{U}_i,\tau_i^->x\}=0.$ Отсюда и (30) следует, что при $N\to\infty$ равномерно по номеру i

$$\lim\sup_{x\ge0}[P\{\tau_i^->x\}-P\{U_i,\tau_i^->x\}]=0. \qquad (34)$$

Вероятность того, что i-й отказ комплекса является обычным и $\tau_i^->x$, равна условной вероятности того, что произошедший на периоде регенерации отказ комплекса является обычным и время пребывания комплекса в неисправном состоянии больше, чем x:

$$P\{U_i,\tau_i^->x\}=\frac{P\{U,\tau^->x\}}{P(A)}. \qquad (35)$$

Из леммы 11 при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$

$$P(U, \tau^- > x) \sim \frac{sk-1}{(s-1)!(s!)^{k-1}k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} \int_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt T_{\lambda(0)}. \tag{36}$$

Из лемм 10, 14 [3] при $N \to \infty$ вытекает

$$P(A) \sim \frac{1}{(s-1)!(s!)^{k-1}k!} \sum_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \frac{\prod_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i)}{N^{sk-1}} \sum_{l=1}^{k} E[v_0(i_1^l)]^{sk-1} T_{\lambda(0)}. \tag{37}$$

Заменяя в (35) числитель и знаменатель эквивалентными величинами из (36), (37), получаем при $N \to \infty$ равномерно по $x \ge 0$ и номеру i

$$P\{U_i, \tau_i^- > x\} \to \frac{(sk-1) \sum\limits_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum\limits_{l=1}^{k} \int\limits_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x) dt}{\sum\limits_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum\limits_{l=1}^{k} E[v_0(i_1^l)]^{sk-1}}, \quad x \ge 0.$$

Отсюда, из (37) и определения функции $F(x)$ при $N \to \infty$ равномерно по номеру i

$$\limsup_{x \ge 0} \left| P\{\tau_i^- > x\} - [1 - F(x)] \right| = 0,$$

откуда ввиду равенства $P\{\tau_i^- \le x\} = 1 - P\{\tau_i^- > x\}$ следует, что при $N \to \infty$ равномерно по номеру i $\limsup\limits_{x \ge 0} \left| P\{\tau_i^- \le x\} - F(x) \right| = 0$, где

$$F(x) = 1 - \frac{(sk-1) \sum\limits_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum\limits_{l=1}^{k} \int\limits_{t>0} t^{sk-2} P(v_0(i_1^l) > t+x)\, dt}{\sum\limits_{\substack{\pi_1 \in \Pi_0^1 \\ \cdots\cdots \\ \pi_k \in \Pi_0^k}} \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda(\pi_i) \sum\limits_{l=1}^{k} E[v_0(i_1^l)]^{sk-1}}, \quad x \ge 0.$$

Теорема 1 доказана.

Series connections into sets of complex restorable systems with Markovian failure flows of elements and individual distribution function of the time of their maintenance have been considered. The number of maintained elements of complex systems increase in inverse proportion of their failures intensity in such a way that the total load on the maintenance system is bounded on the top by the value lower than 1, with discipline of meeting requirements in order of their appearance. Asymptotic time distribution from the moment of failure to the escape of a set of complex restorable systems from multiple fault conditions was found.

1. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М. : Наука, 1967. — 244 с.
2. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. — М. : Сов. радио, 1967. — 299 с.
3. *Макаричев А. В.* Надежность комплексов сложных восстанавливаемых систем. — Электрон. моделирование. — 2004. — **26**, № 2. — С. 57—77.

Поступила 12.01.10;
после доработки 31.05.10

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. В 1981 г. окончил Московский государственный университет им. М. Ломоносова. Область научных исследований — вопросы теории вероятностей, теории восстанавливаемых систем, оптимизация характеристик надежности комплексов сложных восстанавливаемых систем.