УДК 519.6

Д. С. Смаковский
Национальный технический университет Украины «КПИ»
(Украина, 03056, Киев, ул. Политехническая, 6, корп. 5,
тел. (044) 4068324, E-mail: denis@aprodos.ntu-kpi.kiev.ua)

Адаптивная интерполяция на основе кривых Фергюссона для построения сеточных функций

(Статью представил д-р техн. наук С.Е. Саух)

Рассмотрены проблемы интерполяции при решении задач, описанных моделями в распределенных параметрах, с помощью адаптивных сеток. Предложен адаптивный метод, позволяющий уменьшить погрешность интерполяции при построении сеточной функции.

Розглянуто проблеми інтерполяції при розв'язанні задач, що описуються моделями в розподілених параметрах, за допомогою адаптивних сіток. Запропоновано адаптивний метод, який дозволяє зменшити похибку інтерполяції при побудові сіткової функції.

Ключевые слова: интерполяция, дифференциальные уравнения в частных производных.

При численном решении большого числа задач математической физики часто получаем искомые функции со значительными градиентами. Общепринятым для таких задач является применение численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных: метода конечных разностей или метода конечных элементов. При этом непрерывную функцию заменяют дискретной — сеточной функцией, которая задана на конечном множестве узлов. Для минимизации погрешности численного метода при решении в местах значительных изменений функции сетку сгущают. Обычно это происходит в автоматическом режиме. Возникает задача нахождения значений сеточной функции на новой сетке из значений исходной функции. Для этого применяется полиномиальная интерполяция, которая не удовлетворяет требованиям при решении высокоградиентных задач [1].

Как известно, полиномиальная интерполяция достаточно эффективно используется для гладких функций. Но вблизи места быстрого изменения функции возникают осцилляции, при которых значения сеточной функции противоречат физической постановке задачи. Кроме того, при решении целесообразно учитывать погрешность интерполяции вместе с ошибкой численного метода решения дифференциальных уравнений в частных производных. Ошибка полиномиальной интерполяции определяется формулой [2]

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \tag{1}$$

где $f^{(n+1)}(\xi)$ — значение $(n+1)$-й производной в некоторой точке ξ. В (1) $(n+1)$-я производная и производные меньших порядков должны быть непрерывными.

Для задач с разрывами 1-го рода в производных функции решения погрешность является существенной и не подлежит оценке по формуле (1). Для задач с большими значениями $(n+1)$-й производной погрешность интерполяции также будет существенной. Следует заметить, что в этом случае линейная интерполяция окажется точнее полиномиальной высоких порядков. Таким образом, при построении сеточных функций представляется целесообразным применять полиномиальную интерполяцию 2-4-го порядков в местах, где функция решения гладкая, и интерполяцию, приближенную к линейной, в местах с большими значениями градиента.

Постановка задачи. Будем рассматривать область определения G в виде прямоугольника с границей $\Gamma: \overline{G}=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$. Разобьем отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ точками соответственно $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_{Nx}=b$ и $y_0=$ $=a, y_1, y_2, ..., y_{Ny}$. Через точки проведем прямые, параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых получаем узлы (i, j), определенные координатами (x_i, y_j), которые образуют сетку $\overline{\omega}=$ $=\{(x_i, y_j)\in\overline{G}\}$. Пусть на ней задано значение некоторой сеточной функции u_{ik}. При решении дифференциальных уравнений в частных производных в результате использования алгоритма построения сетки получаем некоторую новую сетку $\overline{\omega}^*=\{(x_i^*, y_j^*)\in\overline{G}\}$, где (x_i^*, y_j^*) — заданные узлы. Необходимо найти значение сеточной функции $u_{i,j}^*$ в узлах сетки $\overline{\omega}^*$.

Метод решения. Перед реализацией двумерной интерполяции целесообразно исследовать одномерный случай. Поставим задачу реализовать интерполяцию, порядок которой может изменяться в зависимости от гладкости функции. Эту задачу можно решить несколькими способами.

Во-первых, можно выбрать один из нескольких интерполяционных полиномов разной степени, определив погрешности по формуле (1). Для этого необходимо знать максимальное значение $(n+1)$-й производной на отрезке, где построен полином. Следует заметить, что значение $(n+1)$-й производной можно оценить лишь по формуле численного дифференцирования, но в этом случае крайние точки расположены недостаточно близко к отрезку, и такая оценка не будет точной.

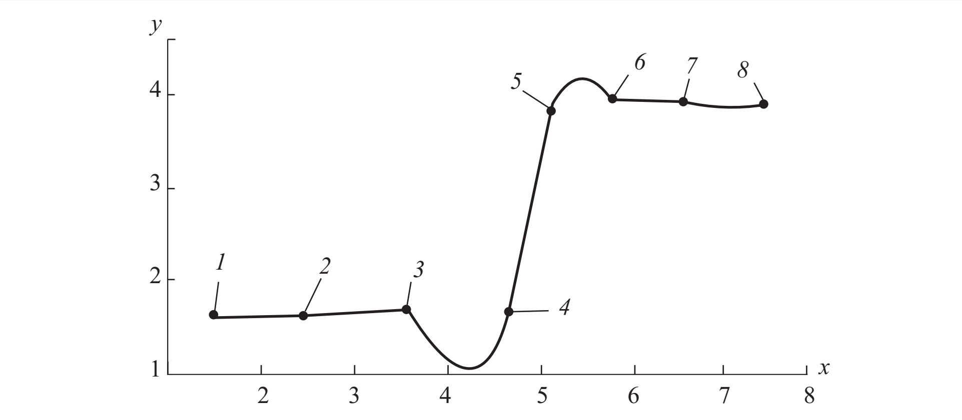

Рис. 1. Кусочная интерполяция методом Лагранжа 3-го порядка

Во-вторых, можно использовать общепринятые в компьютерной графике методы, например сплайны Кочанека—Бартельса [3], но эти методы ориентированы в первую очередь на построение кривых, а не на интерполяцию, и требуют дополнительных коэффициентов, таких как параметр смещения и параметр непрерывности.

Для одномерного случая используем подход, основанный на кривых Фергюссона. Аналогично сплайнам Кочанека—Бартельса, введем коэффициенты A и B, учитывающие влияние производных в узловых точках на кривую:

$$y(t) = y_i(1-3t^2+2t^3) + y_{i+1}(3t^2-2t^3) + (Ay'_i + (1-A)\,\dot{y}'_i)(t-2t^2+t^3) +$$
$$+(By'_{i+1} + (1-B)\,\dot{y}'_i)(-t^2+t^3),$$

где $t = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$; y_i, y_{i+1}, y'_i, y'_{i+1}, $\dot{y}'_i$ — значения функции и ее производной в соседних точках.

Рассмотрим выбор коэффициентов для функций одной переменной. На рис. 1 приведена точечно заданная функция с достаточно большой разницей значений между четвертой и пятой точками и непрерывная кривая, построенная с помощью кусочной интерполяции методом Лагранжа 3-го порядка (для каждого отрезка учитываются значения четырех точек, по две с каждой стороны). Из рис. 1 видно, что значительная разность ординат между точками *4* и *5* порождает осцилляции полинома между точками *3* и *4*, а также между точками *5* и *6*. Этого и следовало ожидать от полиномиальной интерполяции, но для большинства задач

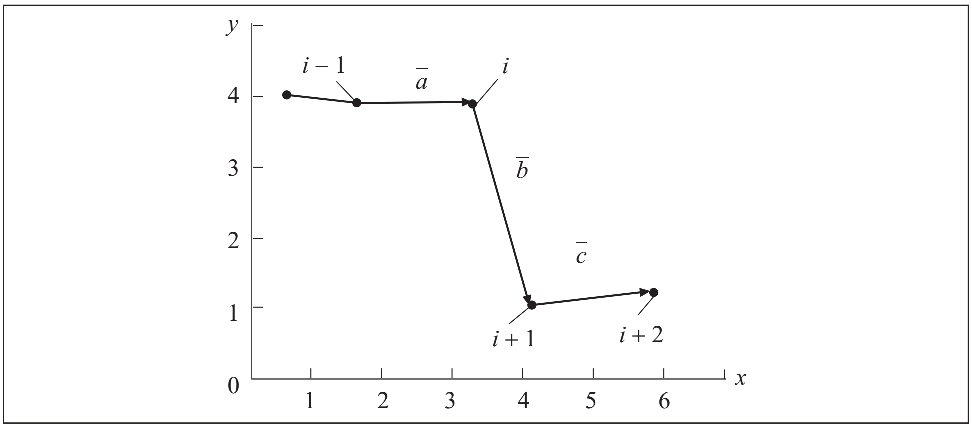

Рис. 2. Векторы для расчета коэффициентов *A* и *B*

математической физики такие отклонения не являются естественными, а при решении высокоградиентных задач могут привести к потере точности.

Таким образом, если известна природа решения задачи, то целесообразно уменьшить или исключить влияние точек из области с большими значениями производных на построение интерполирующей функции в области незначительных градиентов. Следует также заметить, что процедура принятия решения об учете или исключении влияния некоторых точек не должна состоять из многих вычислений, так как это значительно увеличит общее время решения уравнения.

Рассмотрим подробнее реализацию адаптивной интерполяции по формуле (1). Значения производных определяются по формулам численного дифференцирования:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} (x_{i+1} - x_i), \; y'_{i+1} = \frac{y_{i+2} - y_i}{x_{i+2} - x_i} (x_{i+1} - x_i), \; \dot{y}'_i = y_{i+1} - y_i .$$

Коэффициент A зададим таким образом, что если рассчитанная численно с использованием значения в $(i-1)$-й точке производная y'_i существенно отличается от производной $\dot{y}'_i$, рассчитанной на основании ближайших значений, то его значение будет стремиться к нулю. При незначительной разнице между производными коэффициент A будет близок к единице.

Вместо оценки разницы производных для быстрого расчета коэффициента A будем использовать угол между векторами, построенными между точками $i-1$, i, $i+1$, $i+2$ (рис. 2). Расчет коэффициента B аналогичен расчету A.

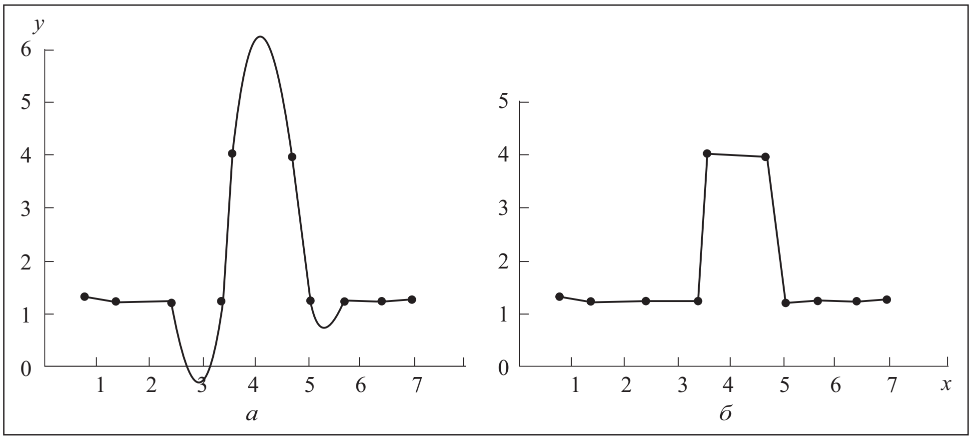

Рис. 3. Пример одномерной интерполяции методом Лагранжа 3-го порядка (*а*) и предложенным методом (*б*)

Векторы имеют следующие координаты: $\bar{a} = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})$; $\bar{b} = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)$; $\bar{c} = (x_{i+2} - x_{i+1}, y_{i+2} - y_{i+1})$. Косинусы углов α и β между векторами соответственно $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{b}$, $\bar{c}$ можно определить из скалярного произведения векторов:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|};\ \cos\beta = \frac{\bar{b}\,\bar{c}}{|\bar{b}|\,|\bar{c}|}.$$

Определим коэффициенты:

$$A = \begin{cases} \cos^2\alpha, \cos\alpha \ge k \\ 0, \cos\alpha \le k \end{cases};\quad B = \begin{cases} \cos^2\beta, \cos\beta \ge k \\ 0, \cos\beta \le k \end{cases},$$

где $0 < k < 1$ — некоторое число, используемое в качестве критерия отсекания влияния производных y'_i и y'_{i+1} при существенной разнице между ними (например $k = 0{,}2$). При значениях $\cos\alpha$ или $\cos\beta$ меньше нуля значение производной $\dot{y}'_i$ принималось равным нулю, что соответствовало экстремуму функции в точке, близкой соответственно к x_i или x_{i+1}.

На рис. 3 приведены интерполирующие функции, построенные с помощью кусочной интерполяции Лагранжа 3-го порядка и по формуле (1) на одинаковом каркасе точек со значительной разницей между значениями ординаты. Из рис. 3 видно, что функции, полученные предложенным методом не выходят далеко за пределы каркаса точек.

На рис. 4 приведены интерполирующие кривые на каркасе точек, задающих функцию с плавным изменением ординаты, полученные двумя

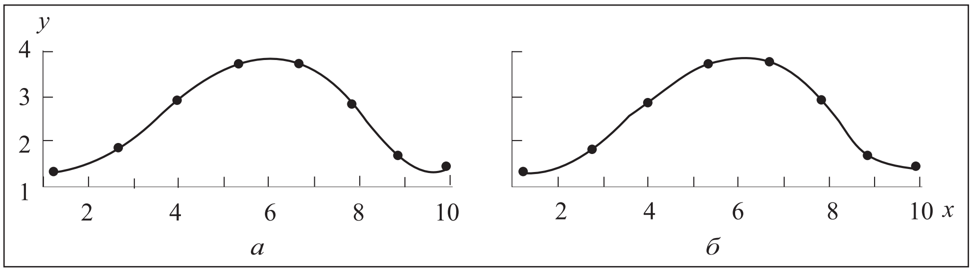

Рис. 4. Пример одномерной интерполяции на каркасе точек, задающих функцию с плавным изменением ординаты: *а* — метод Лагранжа 3-ого порядка; *б* — предложенный метод

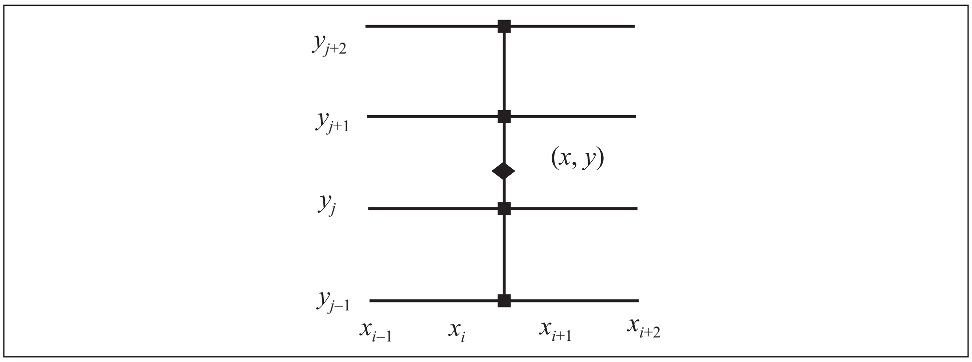

Рис. 5. Шаблон двумерной интерполяции

методами. Как видим, в обоих случаях получены подобные кривые. Таким образом, предложенный метод можно использовать для интерполяции как гладких функций, так и функций, которые в некоторой области имеют большие значения производной. Это особенно актуально в случаях, когда необходимо применить интерполяцию к численным решениям дифференциальных уравнений и предварительно неизвестна скорость измерения искомой функции, но известны ее свойства.

Исследование метода. Используем предложенный метод для решения двумерной задачи. Значение в точке (x, y) находим, выбрав вокруг 16 точек (рис 5). Одномерная интерполяция последовательно используется вдоль оси для нахождения значений в точках (x, y_{j-1}), (x, y_j), (x, y_{j+1}), (x, y_{j+2}). Предложенный одномерный метод используем вдоль оси *oy*, и по найденным четырем точкам найдем значение в точке (x, y).

Точность метода была исследована на непрерывно-дифференцируемой функции

$$u_1(x, y) = e^{-M\,((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}\,, \tag{2}$$

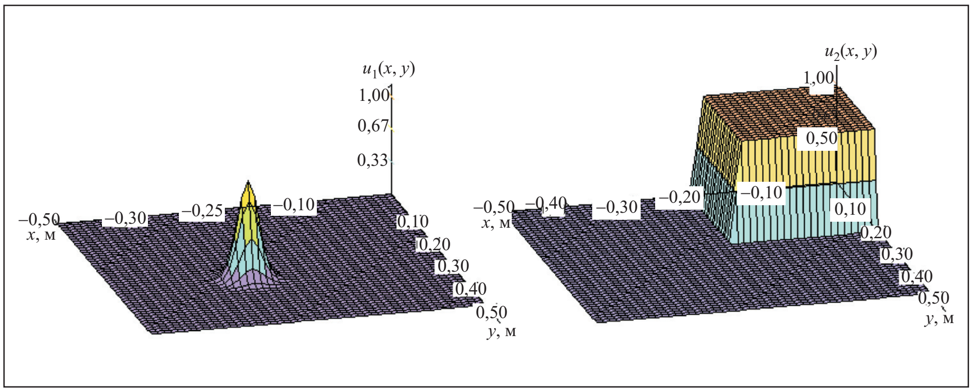

Рис. 6. Функции для исследования точности интерполяции

где $M = 2000$; $x_0 = y_0 = 0{,}3$, и функции

$$u_2 = \begin{cases} 1, \ x < x_1 \wedge y < y_1, \\ 1 - 50(x - x_1), \ x_1 \le x < x_2 \wedge y < y_1, \\ 1 - 50(y - y_1), \ y_1 \le y < y_2 \wedge x < x_1, \\ 1 - 25(x - x_1 + y - y_1), \ x_1 \le x < x_2 \wedge y_1 \le y < y_2, \\ 0, \ x \ge x_2 \vee y \ge y_2, \end{cases} \tag{3}$$

где $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}22$.

Построены таблицы значений функций (2) и (3) в точках $(x_i, y_j) = (h \cdot i, h \cdot j)$, $h = 0{,}02$; $i = \overline{0 \ldots 25}$; $j = \overline{0 \ldots 25}$. Обе функции имеют большие значения частных производных в некоторых областях (рис. 6).

По данным таблиц осуществлена интерполяция предложенным адаптивным методом и методом Лагранжа 3-го порядка и найдены дополнительные значения между точками, т.е. построена таблица значений с шагом, вдвое меньшим, чем исходная. Рассчитанные значения средней $< \varepsilon >$ и максимальной ε_m погрешностей приведены в таблице.

Погрешность интерполяции

Функция	$<\varepsilon>$		ε_m	
	Метод Лагранжа	Адаптивный метод	Метод Лагранжа	Адаптивный метод
(2)	0,000543	0,000398	0,055	0,052
(3)	0,002169	0,000096	0,25	0,25

Выводы. Предложенный способ оказался эффективным при интерполяции функции (3), которая имеет разрыв в значении первой производной. При интерполяции значений, полученных из непрерывно-дифференцируемой функции (2), погрешность метода близка к погрешности интерполяционного полинома такого же порядка. Таким образом, использование предложенного метода может увеличить точность решения задач с большими значениями производных, описываемых моделями в распределенных параметрах с помощью адаптивных сеток.

The interpolation while solving problems described by models in distributed parameters with the help of adaptive meshes have been considered. An adaptive method was proposed which permits decreasing the interpolation error when calculating the mesh functions.

1. *Лукьяненко С. А., Рассамакин Б. М, Хайрнасов С. М., Смаковский Д. С.* Контурные тепловые трубы и адаптивные методы математического моделирования их тепловых полей // Иновационное развитие топливно-энергетического комплекса: проблемы и возможности / Под общ. ред. Г. К. Вороновского, И. В. Недина. — Киев : Знания Украины, 2004. — С. 320—324.
2. *Самарский А. А.* Введение в численные методы/Учеб. пособие для вузов. — СПб. : Лань, 2005. — 288 с.
3. *Херн Д., Бейкер М. П.* Компьютерная графика и стандарт OpenGL. — М. : Вильямс, 2005. — 1168 с.

Поступила 20.04.10;
после доработки 03.06.10

СМАКОВСКИЙ Денис Сергеевич, ст. преподаватель кафедры автоматизации проектирования энергетических процессов и систем теплоэнергетического факультета Национального технического университета Украины «КПИ», который окончил в 2006 г. Область научных исследований — математическое моделирование и численные методы.