



УДК 539.3

Х. Эшматов, д-р техн. наук, **Д. А. Ходжаев**, канд. физ.-мат. наук
Ташкентский институт ирригации и мелиорации
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39,
тел. (99871) 2371948, E-mail: heshmatov@mail.ru; dhodjaev@mail.ru),

Б. Х. Эшматов

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University at Buffalo
(318 Jarvis Hall, Buffalo, NY 14260-4400, USA,
E-mail: ebkh@mail.ru),

О. Р. Кучаров

Ташкентский институт ирригации и мелиорации
(тел. (99871) 2371986, E-mail: olimjon_kucharov@mail.ru)

Компьютерное моделирование задачи о нелинейном флаттере вязкоупругой пластины из композиционного материала с сосредоточенными массами

(Статью представил д-р техн. наук В. Ф. Верлань)

Рассмотрена задача о флаттере вязкоупругой прямоугольной пластины с сосредоточенными массами в геометрически нелинейной постановке. Математическая модель задачи с помощью метода Бубнова—Галеркина сведена к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерры, для решения которых применен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул. Расчеты проведены для реальных композиционных материалов в среде программирования Delphi.

Розглянуто задачу про флаттер в'язкопружної прямокутної пластини з зосередженими масами у геометричній нелінійній постановці. Математичну модель задачі за допомогою метода Бубнова—Гальоркіна зведено до розв'язання систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтери, для розв'язку яких застосовано чисельний метод, базований на використанні квадратурних формул. Розрахунки проведено для реальних композиційних матеріалів у середовищі програмування Delphi.

К л ю ч е в ы е с л о в а: математическая модель, численный метод, интегро-дифференциальные уравнения, нелинейный флаттер..

Математическая модель. Рассмотрим вязкоупругую прямоугольную пластину толщиной h со сторонами a и b , изготовленную из однородного изотропного материала, с сосредоточенными массами M_i , находящимися в точках (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, I$, и обтекаемую сверхзвуковым потоком газа со скоростью V (рис. 1).

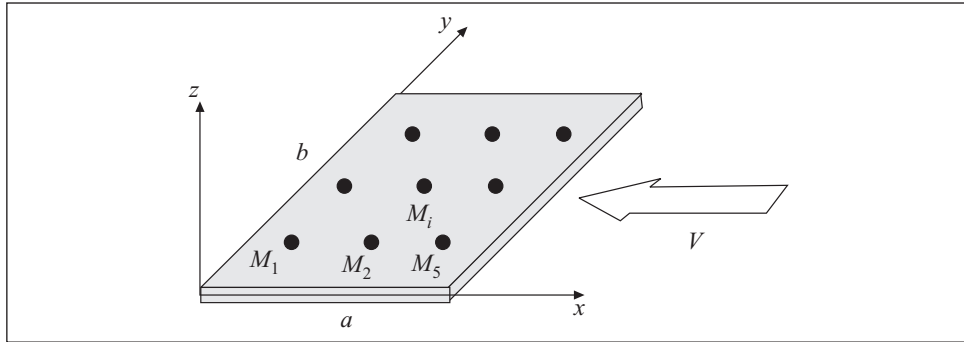


Рис. 1. Вязкоупругая прямоугольная пластина с сосредоточенными массами, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа

Физические соотношения между напряжениями в срединной поверхности σ_x , σ_y , τ_{xy} и деформациями ε_x , ε_y , γ_{xy} , согласно модели Больцмана—Вольтерры, примем в виде [1]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (1-\Gamma^*) (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad (x \leftrightarrow y), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \gamma_{xy}, \quad (1)$$

где E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; Γ^* — интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$, $\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$; символ $(x \leftrightarrow y)$

указывает на то, что остальные соотношения получаются круговой перестановкой индексов.

Связь между деформациями в срединной поверхности ε_x , ε_y , γ_{xy} и перемещениями u , v , w имеет вид [2]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2)$$

Изгибающие и крутящие моменты M_x , M_y , и H вязкоупругой прямоугольной пластины имеют вид [3]

$$M_x = -D (1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D (1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3)$$

$$H = -D (1-\mu) (1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины при изгибе.

При выводе уравнения движения элемента вязкоупругой прямоугольной пластины с сосредоточенными массами, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, будем исходить из уравнений [2, 4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\Delta p}{h} - \frac{m}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w), \end{aligned} \quad (4)$$

где Δp — избыточное давление.

Рассмотрим установившееся движение тонкостенной конструкции со сверхзвуковой скоростью V . Поле скоростей в каждой точке оказывается зависящим от нормальной составляющей скорости ϑ во всех точках поверхности тела. При весьма больших сверхзвуковых скоростях каждая частица газа движется практически лишь в направлении, перпендикулярном к скорости V [4, 5].

В случае линеаризованного течения газа вдоль пластины, по которой распространяются упругие волны, нормальная составляющая скорости ϑ имеет вид [4, 5]

$$\vartheta = \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x},$$

и, следовательно, избыточное давление Δp можно записать в виде

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{\varkappa p_\infty}{V_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Здесь \varkappa — показатель политропы; p — давление на поверхности тела; p_∞ и V_∞ — давление и скорость в невозмущенном газе.

Влияние сосредоточенных масс на вязкоупругую пластину имеет инерционный характер и учитывается в уравнении движения (4) с помощью δ -функции Дирака [6]:

$$m(x, y) = \rho h + \sum_{i=1}^I M_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (6)$$

где ρ — плотность материала пластины. С учетом (5) и (6), подставляя (1), (2) и (3) в (4) и вводя функцию напряжений в виде [2]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

для определения прогиба $w = w(x, y, t)$ и функции напряжений $F = F(x, y, t)$ получаем следующую систему уравнений типа Кармана:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h}(1-\Gamma^*)\nabla^4 w &= L(w, F) - \frac{\alpha p_\infty}{hV_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \\ &- \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^I M_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 F &= -\frac{1}{2}(1-\Gamma^*)L(w, w). \end{aligned} \quad (7)$$

Эта задача в различных постановках рассмотрена в работах [7—9].

Расчет нелинейного флаттера вязкоупругой прямоугольной пластины с сосредоточенными массами. Пусть вязкоупругая пластина шарнирно оперта по всем краям. Решение системы (7), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (8)$$

где $w_{nm} = w_{nm}(t)$ — неизвестные функции времени. Подставляя (8) в уравнение (7) и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина, относительно неизвестных $w_{kl} = w_{kl}(t)$ получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Введя в полученную систему безразмерные величины x/a , y/b , M_i/M_0 , w_{kl}/h , $(V_\infty t)/a$, $a\Gamma(t)/V_\infty$ и сохранив при этом прежние обозначения, получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klmn} \ddot{w}_{nm} + M_p \alpha \lambda \delta \dot{w}_{kl} + \frac{M_E \pi^4 \lambda^2}{12(1-\mu^2)\delta^2} \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1-\Gamma^*) w_{kl} + \\ + 2M^* M_p \alpha \lambda \delta \sum_{n=1}^N n(\gamma_{n+k} - \gamma_{n-k}) w_{nl} + \\ + \frac{M_E \pi^2 \lambda^2}{\delta^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klnmirs} w_{nm} (1-\Gamma^*) w_{ir} w_{js}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k=1, 2, \dots, N; \quad l=1, 2, \dots, M,$$

где $B_{klmn} = 1 + 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin^2 k\pi x_i \sin^2 l\pi y_i$ при $n = k$ и $m = l$, в других случаях

$B_{klmn} = 4 \sum_{i=1}^I M_i \sin k\pi x_i \sin n\pi x_i \sin l\pi y_i \sin m\pi y_i$; $M_0 = ab\rho h$ — масса всей пластины;

$\delta = b/h$; $\gamma_k = \alpha_k/k$; $\alpha_k = 1$, если k нечетное, если k четное или равно нулю, то $\alpha_k = 0$ и $\gamma_k = 0$; коэффициенты $a_{klmijrs}$ определены в [10]; $M_p = p_\infty/\rho V_\infty^2$, $M_E = E/\rho V_\infty^2$, $M^* = V/V_\infty$.

Систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (9) проинтегрируем с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [10], при этом в качестве ядра релаксации используем слабо-сингулярные ядра Колтунова—Ржаницына [1]:

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (10)$$

В работе [11] исследованы релаксационные свойства реальных вязкоупругих материалов стеклопластиков КАСТ-В, ЭДФ, СВАМ и текстолита с различным направлением волокон для ядра релаксации Колтунова—Ржаницына (10). Параметры A , β и α , а также модуль упругости E найдены методом логарифмических сдвигов [1]. Значения A , β , α и E для указанных материалов приведены в работе [11].

Результаты вычислений нелинейного флаттера вязкоупругой прямоугольной пластины с сосредоточенными массами, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, приведены в таблице и на рис. 2, 3. Для исследования поведения вязкоупругой пластины при различных физических и геомет-

Материал	δ	λ	M_E	M_p	M_i	Значение $V_{кр}$ флаттера					
						линейного					нелинейного
						$N = 2$	$N = 3$	$N = 7$	$N = 11$	$N = 13$	
Упругий	133	3	4,71	0,003	0,1	1256,3	973	1537	1565	1570	1933,4
ЭДФ 0 ⁰	133	3	4,71	0,003	0,1	1262,4	982,1	1589	1623	1626,8	1949,1
СВАМ 0 ⁰	133	3	4,71	0,003	0,1	1216,1	953,4	1670	1702,7	1705	2023,4
КАСТ-В 0 ⁰	133	3	4,71	0,003	0,1	1163,5	933,5	1665	1725	1727,5	2041,3
Текстолит 0 ⁰	133	3	4,71	0,003	0,1	1004,4	788,3	1563,8	1597,3	1600	1891,5
КАСТ-В 45 ⁰	133	3	4,71	0,003	0,1	1092,6	852,7	1628,2	1718,2	1721,3	2017,2
" "	120	3	4,71	0,003	0,1	1485,1	1163,2	2372,4	2423,2	2426,7	2813,1
" "	150	3	4,71	0,003	0,1	763,1	592,1	1128,3	1152,6	1155	1366,2
" "	133	4	4,71	0,003	0,1	949,7	537,1	1134,4	1158,7	1161	1388,5
" "	133	3	6	0,003	0,1	1776,2	1392,1	2728,8	2914	2921	3385,3
" "	133	3	4,71	0,004	0,1	774,4	599	1101,1	1148,8	1150,9	1373,1
" "	133	3	4,71	0,003	—	698,5	906,1	1250,8	1249	1248,9	1478,2

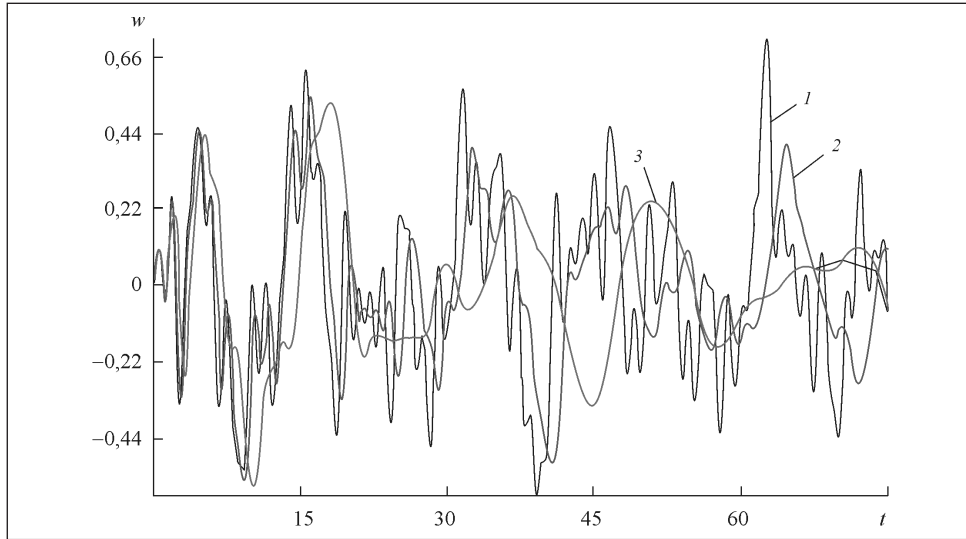


Рис. 2. Зависимость прогиба от времени для пластин из различных материалов: 1 — упругий; 2 — СВAM 0°; 3 — текстолит 0°

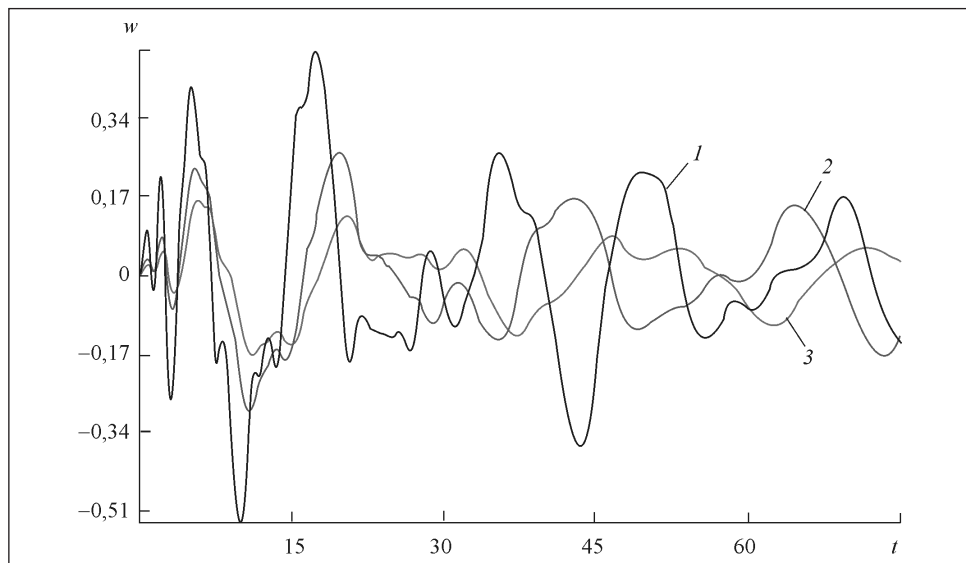


Рис. 3. Зависимость прогиба пластины от времени для материала КАСТ-В 45°: 1 — $M_1 = 0$; 2 — $M_1 = 0,1$; 3 — $M_1 = 0,2$

рических параметрах скорость потока газа принята равной 400 м/с, в качестве исходных приняты следующие данные: $\lambda = 3$, $\delta = 133$, $\alpha = 1,4$, $M_E = 4,71$, $M_p = 0,003$.

В таблице приведены численные значения критических скоростей $V_{кр}$ потока газа линейного и нелинейного флаттеров прямоугольной пластины при различных физико-механических и геометрических параметрах. Для каждого случая изучена сходимость метода Бубнова—Галеркина. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что при вычислении значений $V_{кр}$ в ряде разложения Бубнова—Галеркина необходимо удерживать, по крайней мере, 11 ($N = 11$, $M = 1$) первых гармоник. Как видно из таблицы, величины, полученные при двучленной аппроксимации, для расчета флаттера не дают ожидаемых результатов. Значения $V_{кр}$, полученные при двухчленной ($N = 2$) и многочленной аппроксимации ($N = 11$), существенно различаются как для упругой, так и для вязкоупругой пластины (более чем на 25—80 %).

В результате расчетов установлено, что изменение безразмерных параметров жесткости M_E , давления M_p и сосредоточенной массы M_i также оказывает существенное влияние на поведение вязкоупругой пластины. Как показывают результаты исследования, увеличение параметров M_E и M_i приводит к увеличению критической скорости, а увеличение параметра M_p приводит к ее интенсивному уменьшению.

На рис. 2 представлена зависимость прогиба срединной точки упругой и вязкоупругих пластин из различных материалов от времени. Как видно из рис. 2, учет вязкоупругих свойств материала пластины приводит к затуханию колебательного процесса. При этом решения упругой и вязкоупругой задач сначала незначительно отличаются одно от другого, но с течением времени вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние.

На рис. 3 графически представлено влияние сосредоточенной массы в центре пластины на колебательный процесс. Видно, что увеличение сосредоточенной массы приводит к уменьшению амплитуды колебаний.

Выводы. Результаты исследования нелинейного флаттера вязкоупругой прямоугольной пластины из композиционного материала с сосредоточенными массами позволяют сделать следующие выводы:

учет вязкоупругих свойств материала приводит к существенному изменению значения $V_{кр}$;

учет сосредоточенных масс как для упругой, так для вязкоупругой пластины приводит к увеличению значения $V_{кр}$;

учет нелинейных свойств приводит к увеличению значения $V_{кр}$;

при расчетах методом Бубнова—Галеркина необходимо выбирать многочленную аппроксимацию прогиба;

при расчетах в зависимости от различных геометрических и физических параметров прямоугольной пластины необходимо выбирать соответствующую теорию (линейную или нелинейную).

The paper deals with a problem on a flutter of a viscoelastic, rectangular plate with concentrated masses in geometrically nonlinear setting. Mathematical model of the problem is reduced, using the Bubnov-Galerkin method, to solution of the system of nonlinear integro-differential Volterra

equations, a numerical method based on the use of quadrature formulae being used for their solution. Calculations were carried out for real composite materials in the Delphi programming environment.

1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. — М. : Высшая школа, 1976. — 276 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М. : Наука, 1972. — 432 с.
3. Верлань А. Ф., Эшматов Х., Эшматов Б. Х. и др. Математическое моделирование нелинейных колебаний и исследование динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей. I // Электрон. моделирование. — 2009. — 31, № 3. — С. 3—19.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М. : Физматгиз, 1961. — 340 с.
5. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикладная математика и механика. — 1956. — XX, вып. 6. — С. 733—755.
6. Amba-Rao C. L. On the Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass // J. Applied Mech. — 1964. — 31. — P. 550—551.
7. Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A. Nonlinear Vibration and Dynamic Stability of a Viscoelastic Cylindrical Panel with Concentrated Mass // Acta Mechanica. — 2007. — № 1—4 (190). — P. 165—183.
8. Khodjaev D. A., Eshmatov B. Kh. Nonlinear Vibration of Viscoelastic Plate with Concentrated Mass // J. of Applied Mech. and Technical Physics. — 2007. — № 6 (48). — P. 905—914.
9. Eshmatov B. Kh., Khodjaev D. A. Dynamic Stability of a Viscoelastic Plate with Concentrated Masses // International Applied Mechanics. — 2008. — № 2 (44). — P. 208—216.
10. Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Дис... док-ра техн. наук. — Киев, 1991. — 337 с.
11. Тюнеева И. М. Релаксационные характеристики стеклопластиков // Механика полимеров. — 1970. — № 3. — С. 560—562 (г. Рига).

Поступила 26.03.10

ЭШМАТОВ Хасан, д-р техн. наук, зав. кафедрой информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1969 г. окончил Самаркандский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

ХОДЖАЕВ Дадахан Акмарханович, канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1996 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — механика деформируемого твердого тела.

ЭШМАТОВ Бахтиер Хасанович, канд. физ.-мат. наук, проф. факультета механики и космической техники университета Буффало (США). В 1997 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.

КУЧАРОВ Олимжон Рузимурастович, ст. преподаватель кафедры высшей математики Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1994 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.