ЛИТЕРАТУРА

1. *Чайка А.И., Мартыненко М.П.* Экстракция из растительного сырья при пульсациях среды. // Труды 1-й межд. науч.- практ. конф. “Современные энергосберегающие тепловые технологии”.– Москва.– 2002.– Т. 3.– С. 242-246.
2. *Иваницкий Г.К., Корчинский А.А., Матюшкин М.В.* Математическое моделирование процессов в пульсационном диспергаторе ударного типа// Пром. теплотехника.– 2003.– Т. 25.– № 1.
3. *Накорчевский А.И., Басок Б.И., Чайка А.И.* Пульсаторы с переменной геометрией рабочего объема и влияние обрабатываемых композитов на динамические характеристики пульсаторов// Инж. Физ. Журн.– 1998.– 71.– № 5.– С.775-783.
4. *Накорчевский А.И., Басок Б.И.* Гидродинамика и тепломассоперенос в гетерогенных системах и пульсирующих потоках.– Киев: Наукова думка, 2001.– 348 с.
5. *Мартыненко М.П.* Моделирование истечения потока в осесимметричный тупик// Пром. теплотехника.– 2004.- Т. 26.– № 3.– С. 32-37.
6. *А.А. Авраменко, Б.И. Басок, А.В. Кузнецов.* Групповые методы в теплофизике.– Киев: Наукова думка.– 2003.– 484 с.
7. *Yakhot V, Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G.* Development of turbulence models for shear flows by double expansion technique// Phys. Fluids A.– 1992.– 4.– N 7.– P.1510-1520.
8. *Yakhot V, Orszag S.A.* Renormalization-group analysis of turbulence. I. Basic theory//J.Sci. Comp.1986.– 1.– N 1.– P. 3-51.
9. *К. Флетчер.* Численные методы на основе метода Галеркина.– М.: «Мир», 1988.– 352 с.

Получено 16.09.2004 г.

УДК 532.5:536.24

АВРАМЕНКО А.А.[1], БАСОК Б.И.[1], КУЗНЕЦОВ А.В.[2]

[1] *Ин-т технической теплофизики НАН Украины*

[2] *Университет штата Северная Каролина*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНЫХ ВЯЗКОСТИ И ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

Запропоновано теоретичну однопараметричну модель турбулентності, що базується на ренормгруповій k-ε моделі. Отримана модель узгоджується з існуючими емпіричними моделями, однак, на відміну від них не включає емпіричних даних. Дана модель дає змогу спростити процедуру чисельного моделювання турбулентних течій.

Предложена теоретическая однопараметрическая модель турбулентности, основанная на ренормгрупповой k-ε модели. Полученная модель согласуется с существующими эмпирическими моделями, однако, в отличие от них не включает эмпирических данных. Данная модель должна упростить процедуру численного моделирования турбулентных течений.

The theoretical one-parameter model of a turbulence grounded on renormalization group k-ε model is offered. The obtained model is compounded with existing empirical models, however, this model does not include empirical datas. The given model should simplify a procedure of a numerical modeling of turbulent flow.

a – эффективная температуропроводность;
k – кинетическая энергия турбулентности;
p – давление;
Pr_K – число Прандтля кинетической энергии турбулентности;
Pr_t – турбулентное число Прандтля;
t – время;
T – температура;
u_n – n-ая компонента осредненной скорости;
x_n – ортогональная n-ая координата;
ε – скорость диссипации;
ν – коэффициент эффективной вязкости;
ν_0 – коэффициент молекулярной вязкости;
ν_t – коэффициент турбулентной вязкости.

В настоящее время существует большое разнообразие моделей турбулентности различной параметричности, которые широко используются как в коммерческих пакетах прикладных программ, таких как «Fluent», «Flow 3D» и др., так и в авторских кодах. При этом возникает проблема выбора той или иной модели турбулентности. Довольно часто при расчетах сложных течений используются двухпараметрическая RNG k-ε модель [1] (содержащая два дополнительных уравнения), построенная на основе ренормгруппового анализа, которая не включает эмпирических коэффициентов. Наряду с этим также используются эмпирические однопараметрические модели с одним дополнительным уравнением. Наличие лишь одного дополнительного уравнения (по сравнению с двухпараметрическими моделями) ускоряет и упрощает процедуру расчета за счет возможной потери точности расчета. Один из видов таких моделей – это модель, содержащая дополнительное уравнение для эффективной вязкости. Впервые такая эмпирическая модель была предложена в работах [2, 3]. В 90-ые годы была разработана подобная эмпирическая модель [4, 5]. Упомянутые модели включают ряд эмпирических коэффициентов и слагаемых, что является недостатком таких моделей. В настоящей работе предлагается процедура вывода однопараметрической модели эффективной вязкости и температуропроводности, которая построена на основе RNG k-ε модели и, следовательно, не содержит никакой эмпирики.

RNG k-ε модель содержит два уравнения: уравнение кинетической энергии турбулентности и уравнение скорость диссипации. RNG уравнение кинетической энергии турбулентности имеет следующий вид [1]

$$\frac{\partial k}{\partial t}+u_n\frac{\partial k}{\partial x_n}=2\nu_t S_{nm}^2-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}_K}\frac{\partial k}{\partial x_n}\right), \quad (1)$$

где

$$S_{nm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_n}{\partial x_m}+\frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_n}\right) \quad (2)$$

– тензор деформаций. RNG уравнение скорости диссипации, которое получено с учетом влияние малости чисел Рейнольдса [6, 7], выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\overline{u}_n\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n}= \\ =2C_{1\varepsilon}^*\nu_t\frac{\varepsilon}{k}S_{nm}^2-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n}\right), \quad (3)$$

где $\mathrm{Pr}_\varepsilon = \mathrm{Pr}_K = 0{,}7179$,

$$C_{2\varepsilon}=1{,}68,\ C_{1\varepsilon}^*=1{,}42-\frac{\eta}{1+0{,}012\eta^3}\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right),$$

$$\eta=\sqrt{2S_{nm}S_{nm}}\frac{k}{\varepsilon}=S\frac{k}{\varepsilon}, \quad (4)$$

где $\eta_{\varepsilon 0}$ = 4,38. Второе слагаемое в формуле для коэффициента $C_{1\varepsilon}^*$ играет значительную роль при низких значениях числа Рейнольдса, когда турбулентность существенно анизотропная. Когда же число Рейнольдса велико, и принимается гипотеза локальной изотропии, этим слагаемым можно пренебречь.

В рассматриваемом подходе необходимо как бы свернуть двухпараметрическую k-ε модель, которая содержит два уравнения, до однопараметрической ν-модели, описываемой лишь одним уравнением. Для этого воспользуемся RNG формулой для турбулентной вязкости, которая связывает эту вязкость с кинетической энергией турбулентности и скоростью диссипации и которая получена на основе ренормгруппового анализа [1]:

$$\nu_t=0{,}0847\frac{k^2}{\varepsilon}=C_\nu\frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Таким образом, необходимо свести два уравнения (1) и (3) к одному уравнению для вязкости. Чтобы понять, как это сделать, продифференцируем (5) по времени и по координате. В результате получим

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t}=C_\nu\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial t}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial x_n}=C_\nu\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_n}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n}\right). \quad (6)$$

Отсюда видно, что уравнение (1) надо умножить на $2k/\varepsilon$, уравнение (3) – на $(k/\varepsilon)^2$, а затем из (1) вычесть (3) и умножить полученный результат на C_ν. В результате получаем

$$\underbrace{C_\nu\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial t}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)}_{\mathrm{I}}+\underbrace{C_\nu u_n\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_n}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right)}_{\mathrm{II}}=\underbrace{C_\nu\left(C_{2\varepsilon}-2\right)k}_{\mathrm{III}}+\underbrace{2C_\nu\left(C^*_{1\varepsilon}+2\right)\nu_t\frac{k}{\varepsilon}S^2_{nm}}_{\mathrm{IV}}+$$
$$+\underbrace{\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\frac{\partial\nu}{\partial x_n}\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_n}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right)+\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\nu\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial^2 k}{\partial x_n^2}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_n^2}\right)-\frac{C_\nu\nu}{\left(\mathrm{Pr}_K\,\varepsilon\right)^2}\frac{\partial\,\mathrm{Pr}_K}{\partial x_n}\left(2\varepsilon\frac{\partial k}{\partial x_n}-k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right)}_{\mathrm{V}}. \tag{7}$$

Преобразуем слагаемое V, добавив к нему и вычтя выражение

$$\frac{2\nu}{\varepsilon^3}\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\left(\varepsilon\frac{\partial k}{\partial x_n}-k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right)^2=2\nu\varepsilon\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\right)^2.$$

В результате получим

$$\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\frac{\partial\nu}{\partial x_n}\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_n}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right)+$$
$$+\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\nu\left(2\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial^2 k}{\partial x_n^2}-\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_n^2}\right)-$$
$$-\frac{C_\nu\nu}{\left(\mathrm{Pr}_K\,\varepsilon\right)^2}\frac{\partial\,\mathrm{Pr}_K}{\partial x_n}\left(2\varepsilon\frac{\partial k}{\partial x_n}-k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right)+ \tag{8}$$
$$+2\nu\varepsilon\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\right)^2-2\nu\varepsilon\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\right)^2=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}_K}\frac{\partial\nu}{\partial x_n}\right)-2\nu\varepsilon\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\right)^2.$$

Для области локального равновесия генерация турбулентной энергии уравновешивается ее диссипацией. В этой области уравнение (1) с учетом формул (2) и (4) принимает простой вид

$$2\nu_t S^2_{nm}=\nu_t S^2=\varepsilon. \tag{9}$$

Воспользовавшись этим соотношением и формулой (5), преобразуем слагаемые III и IV:

$$C_\nu\left(C_{2\varepsilon}-2\right)k+2C_\nu\left(C^*_{1\varepsilon}+2\right)\nu_t\frac{k}{\varepsilon}S^2_{nm}=$$
$$=\sqrt{C_\nu^3}\left(C_{2\varepsilon}-2\right)S\nu_t+\sqrt{C_\nu^3}\left(C^*_{1\varepsilon}+2\right)S\nu_t=$$
$$=\sqrt{C_\nu^3}\left(C^*_{1\varepsilon}+C_{2\varepsilon}\right)S\nu_t.$$

Осталось проанализировать последнее слагаемое соотношения (8). Используя снова выражения (5) и (9), находим

$$2\nu\varepsilon\frac{C_\nu}{\mathrm{Pr}_K}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)\right)^2=\frac{4C_\nu^3\nu^2}{\mathrm{Pr}_K\,S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2.$$

Подставив все полученные соотношения в уравнения (7) и преобразовав слагаемые I и II на основе формул (6), получим

$$\underbrace{\frac{\partial\nu}{\partial t}+u_n\frac{\partial\nu}{\partial x_n}}_{\mathrm{I}}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}_K}\frac{\partial\nu}{\partial x_n}\right)}_{\mathrm{II}}+$$
$$+\underbrace{\sqrt{C_\nu^3}\left(C^*_{1\varepsilon}+C_{2\varepsilon}\right)S\nu_t}_{\mathrm{III}}-\underbrace{\frac{4C_\nu^3\nu^2}{S^2\,\mathrm{Pr}_K}\left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2}_{\mathrm{IV}}. \tag{10}$$

Используя снова соотношения (5) и (9), находим

$$\eta=S\frac{k}{\varepsilon}=\sqrt{C_\nu}$$

и, следовательно,

$$C^*_{1\varepsilon}=1{,}42-\frac{\eta}{1+0{,}012\eta^3}\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right)=$$
$$=1{,}42-\frac{\sqrt{C_\nu}}{1+0{,}012\sqrt{C_\nu^3}}\left(1-\frac{\sqrt{C_\nu}}{\eta_0}\right)=1{,}148.$$

По своей структуре уравнение для вязкости (10) подобно эмпирическим моделям, предложенным в работах [2-5]. Оно содержит члены, которые описывают адвекцию (I), диффузию (II), генерацию (III) и деструкцию (IV). Однако в отличие от предыдущих моделей, предложенная модель не использует эмпирических данных.

Уравнение (10) замыкает систему уравнений, включающей уравнения движения, неразрывности и энергии

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\nu\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right),$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial\left(Tu_n\right)}{\partial x_n}=\frac{\partial}{\partial x_n}\left(a\frac{\partial T}{\partial x_n}\right),$$

где коэффициент эффективной температуропроводности определяется на основе дифференциального уравнения [1]

$$\frac{d\,\mathrm{Pr}_t^{-1}}{d\tau}=\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\tau}\left(\frac{d-1}{d}\tilde{A}_d^{-1}\frac{1}{1+\mathrm{Pr}_t^{-1}}-\mathrm{Pr}_t^{-1}\right), \qquad (11)$$

где d – размерность пространства,

$$\tilde{A}_d=\frac{d-1}{2\left(d+2\right)}.$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\left|\frac{\mathrm{Pr}_t^{-1}-1{,}3929}{\mathrm{Pr}^{-1}-1{,}3929}\right|^{0,6321}\left|\frac{\mathrm{Pr}_t^{-1}+2{,}3929}{\mathrm{Pr}^{-1}+2{,}3929}\right|^{0,3679}=\frac{\nu_0}{\nu}$$

В области высоких чисел Рейнольдса, т. е. при полностью развитой турбулентности, когда $\nu_0/\nu\to 0$, данное соотношение дает асимптотическое значение турбулентного числа Прандтля [1] $\mathrm{Pr}_t=1/1{,}3929=0{,}7179$.

По аналогичной зависимости определяется число Прандтля кинетической энергии турбулентности

$$\left|\frac{\mathrm{Pr}_K^{-1}-1{,}3929}{0{,}3929}\right|^{0,6321}\left|\frac{\mathrm{Pr}_K^{-1}+2{,}3929}{3{,}3929}\right|^{0,3679}=\frac{\nu_0}{\nu},$$

которое при полностью развитом турбулентном потоке имеет значение $\mathrm{Pr}_K=0{,}7179$.

Вывод

Предложена однопараметрическая модель турбулентных вязкости и температупроводности, которую можно назвать RNG ν-моделью. В отличие от RNG *k*-ε модели, предложенная модель содержит лишь одно дополнительное уравнение, что должно сокращать время расчета и упрощать численное моделирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yakhot V, Orszag S.A.* Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory //J. Sci. Comp.– 1986.– 1.– № 1.– P. 3-51.
2. *Kovasznay L.S.G.* Structure of the turbulent boundary layer // Phys. Fluids.– 1967.– 10.– № 9.– Part II.– P. 25-30.
3. *Nee P., Kovasznay L.S.G.* Simple phenomenological theory of turbulent shear flows // Phys. Fluids.– 1969.– 12.– № 3.– P. 473-484.
4. *Sparalt P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 92-0439.– 1992.– 16 p.
5. *Sparalt P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows //La recherche aerospatiate.– 1994.– 1.– P. 5-21.
6. *Yakhot V., Smith L.M.* The renormalization group, the ε-expansion and derivation of turbulence models // J. Sci. Comput.– 1992.– 7.– P. 35-52.
7. *Yakhot V, Orszag S.A., Thangam S., Gatski T B., Speziale C.G.* Development of turbulence models for shear flows by double expansion technique // Phys. Fluids A– 1992.– 4.– № 7.– P. 1510-1520.

Получено 20.09.2004 г.