

УДК 536.24

АВРАМЕНКО А.А., СОРОКИНА Т.В.

Институт технической теплофизики НАН Украины

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПАРОВОГО ПУЗЫРЯ

Досліджено стійкість парової бульбашки. Отримані критерії монотонної та осцилюючої нестійкості, формули Томсона і Лапласа для критичного радіуса парової бульбашки.

Исследована устойчивость парового пузырька. Получены критерии монотонной и осциллирующей неустойчивости, формулы Томсона и Лапласа для критического радиуса парового пузырька.

Stability of a steam bubble has been studied. Criteria of monotonous and oscillating instability, the Thomson and the Laplas equations for the critical radius of bubble have been obtained.

$H$  – удельная теплота фазового перехода жидкость–пар;  
 $p$  – давление;

$\Delta p$  – разность давлений фаз;

$R_0$  – начальный радиус паровой полости;

$R$  – текущий радиус;

$r$  – теплота парообразования;

$t$  – время;

$T_s$  – температура насыщения;

$\Delta T$  – перегрев жидкости относительно температуры насыщения;

$v$  – удельный объем;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;

$\rho$  – плотность;

$\sigma_{12}$  – поверхностное натяжение.

**Комплексы:**

$K_s = \frac{p_1(\rho_1 - \rho_2)}{H\rho_1\rho_2}$  – число фазового перехода;

Образование и схлопывание паровых пузырьков приводит к всплескам в их окрестности мощных динамических импульсов, что способствует интенсификации теплообмена. Эти процессы носят существенно нестационарный характер и по сути являются неустойчивыми процессами. Поэтому принципиальное значение при исследовании процессов дискретно-импульсного ввода энергии имеет учет неустойчивости подобных физических процессов. В настоящей работе проведен анализ устойчивости парового пузырька в нелинейной постановке задачи Релея [1].

Пузырек рассматривается как динамическая система, подверженная воздействию различных возмущающих факторов. В отличие от большинства предыдущих работ основное внимание уделено исследованию различных типов неустойчи-

$Lp = \frac{v}{R_0} \sqrt{\frac{\rho_1}{p_1}}$  – число Лапласа;

$\bar{p} = \frac{p_2}{p_1}$  – безразмерное давление;

$\bar{R} = \frac{R}{R_0}$  – безразмерный радиус полости;

$We^{-1} = \frac{\sigma_s}{R_0 p_1}$  – число Вебера;

$\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}}$  – безразмерное время.

**Индексы:**

0 – начальное состояние;

1, 2 – соответственно относятся к жидкой фазе и паровой.

вости, что позволит более глубоко проникнуть в физику происходящих процессов.

Математическая модель содержит уравнение Релея, описывающее рост парового пузыря и уравнение Клапейрона-Клаузиуса, которое описывает связь между температурой и давлением на линии фазового перехода (линии насыщения):

$$\rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_1 \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + 4 \frac{\mu_1}{R} \frac{dR}{dt} + 2 \frac{\sigma_{12}}{R} + p_1^\infty - p_2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dp_2}{dT} = \frac{r}{T(v_2 - v_1)}.$$

Начальные условия:

$$t = 0, \quad R(0) = R_0, \quad \frac{dR}{dt} = 0. \quad (2)$$

Приведенная модель учитывает вязкостные силы, силы поверхностного натяжения на границе жидкость-пар и силы давления на паровой пузырек.

При исследовании устойчивости парового пузыря на основании предложенной математической модели могут иметь место три вида аттракторов: стационарное состояние, предельный цикл или странный аттрактор, которые могут быть как устойчивые, так и неустойчивые [2].

Для изучения устойчивости парового пузырька такую систему уравнений удобно обезразмерить и привести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. В результате после обезразмеривания и приведения к автономному виду система примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}}{d\tau} &= \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= -\frac{3}{2} \frac{\vartheta^2}{\bar{R}} - 4 \frac{\vartheta Lp}{\bar{R}^2} - 2 \frac{We^{-1}}{\bar{R}^2} + \frac{\bar{p}-1}{\bar{R}}, \\ \frac{d\bar{p}}{d\tau} &= -\frac{\vartheta}{K_s T_s} \frac{\Delta T}{\bar{R}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Методы исследования подобных систем дифференциальных уравнений описаны в [2].

Для определения особых точек (стационарных состояний) необходимо решить систему:

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0, \\ -\frac{3}{2} \frac{\vartheta^2}{\bar{R}} - 4 \frac{\vartheta Lp}{\bar{R}^2} - 2 \frac{We^{-1}}{\bar{R}^2} + \frac{\bar{p}-1}{\bar{R}} &= 0, \\ -\frac{\vartheta}{K_s T_s} \frac{\Delta T}{\bar{R}} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение уравнений (4) дает точки стационарных состояний:

$$\bar{R} = 1, \quad \vartheta = 0, \quad \bar{p} = 2We^{-1} + 1. \quad (5)$$

В приведенных значениях  $\vartheta$  и  $\bar{p}$  система уравнений (4) превращается в тождество при любом значении  $\bar{R} \neq 0$ . Однако было выбрано значение  $\bar{R} = 1$ , исходя из физики процесса, потому что именно это значение соответствует стационарной точке системы (4), что видно из начальных условий (2). Параметры  $Lp$ ,  $We^{-1}$ ,  $K_s$ ,  $T_s$ ,  $\Delta T$  в формулах (4) и (5) являются управляющими параметрами. От их значений зависит устойчивость системы дифференциальных уравнений (3) в точках стационарного состояния.

Матрица взаимодействия (матрица Якоби) имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2We & -4Lp & 1 \\ 0 & -\frac{\Delta T}{K_s T_s} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для нахождения собственных значений матрицы (6) необходимо определить нетривиальные решения характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 0 - \beta & 1 & 0 \\ 2We & -4Lp - \beta & 1 \\ 0 & -\frac{\Delta T}{K_s T_s} & 0 - \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет решения:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0, \\ \beta_2 &= -2Lp + \sqrt{\frac{2K_s T_s (2Lp^2 + We) - \Delta T}{K_s T_s}}, \\ \beta_3 &= -2Lp - \sqrt{\frac{2K_s T_s (2Lp^2 + We) - \Delta T}{K_s T_s}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученные собственные значения позволяют проанализировать два вида неустойчивости — монотонную и осциллирующую (колебательную). Монотонная неустойчивость возникает при условии  $\Re\{\beta_k\} > 0$ .

Для  $\beta_1$  и  $\beta_3$  условие (9) не выполнимо. Для  $\beta_2$  на основе критерия (9) находим условие монотонной неустойчивости

$$\frac{\Delta T}{T_s} < 2K_s We^{-1} \quad (10)$$

или в размерном виде

$$R_0 < \frac{2T_s \sigma_{12} (\rho_1 - \rho_2)}{H \Delta T \rho_1 \rho_2}. \quad (11)$$

Возникающий паровой пузырек не может иметь размер меньше, чем предсказывает формула (11). Если учесть, что  $\rho_1 \gg \rho_2$ , то из (11) следует формула Томсона для минимального радиуса

возникающего пузырька, которая была получена на основе приближенного рассмотрения физики процесса. В тоже время формула (11) выведена из строгого анализа устойчивости.

Осциллирующая неустойчивость возникает при условии

$$\text{Im}(\beta_k) \neq 0 . \quad (12)$$

Анализ корней характеристического детерминанта показывает, что это условие выполняется, если

$$\frac{\Delta T}{T_s} > 2K_s We^{-1} + 4K_s Lp^2 . \quad (13)$$

Переходя к размерным величинам, получим значение радиуса парового пузырька, при котором возникают осцилляции

$$R_{osc} > \frac{R_{min}}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\Delta T \rho_2}{T_s (\rho_1 - \rho_2)} \frac{Hv^2 \rho_1^2}{\sigma_s^2}} \right) , \quad (14)$$

где  $R_{min}$  определяется по формуле (11).

В отличие от начального радиуса  $R_0$  радиус  $R_{osc}$ , при котором возникают колебания межфазной поверхности, зависит от вязкости. Из (14) видно, что чем больше вязкость, тем больше  $R_{osc}$ . Вязкость демпфирует осцилляции, поэтому для начала колебаний паровому пузырьку необходимо иметь более развитую поверхность раздела фаз, чем и обусловлен рост  $R_{osc}$ .

Для случая исчезающей вязкости ( $Lp \rightarrow 0$ ), когда подкоренное выражение в формулах для собственных значений (8) меньше нуля, возникает бифуркация Хопфа. При этом, как следует из формулы (14),  $R_{osc} = R_{min}$ . Это означает, что осцилляции парового пузырька начинаются с момента его возникновения. Таким образом, можно сделать вывод о том, что вязкость является основным демпфирующим фактором при возникновении колебаний пузыря. При этих условиях траектория решений в фазовом пространстве  $(\bar{R}, \vartheta, \bar{p})$  отходит от предельного цикла по спирали, который изображен на рис. 1 вместе со своими проекциями на координатные плоскости. При условии  $Lp > 0$  форма траекторий решений в фазовом пространстве модифицируется в сходящуюся по спирали траекторию. Это означает, что возникают затухающие колебания и степень затухания зависит от числа  $Lp$ .

Частным случаем системы (3) является случай, когда перепад давлений  $\Delta p = const$ . Такое условие может быть реализовано при резком сбросе давления в системе. При этом математическая модель (3) редуцируется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}}{d\tau} &= \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= -\frac{3}{2} \frac{\vartheta^2}{\bar{R}} - 4 \frac{\vartheta Lp}{\bar{R}^2} - 2 \frac{We^{-1}}{\bar{R}^2} + \frac{\Delta \bar{p}}{\bar{R}}. \end{aligned} \quad (15)$$

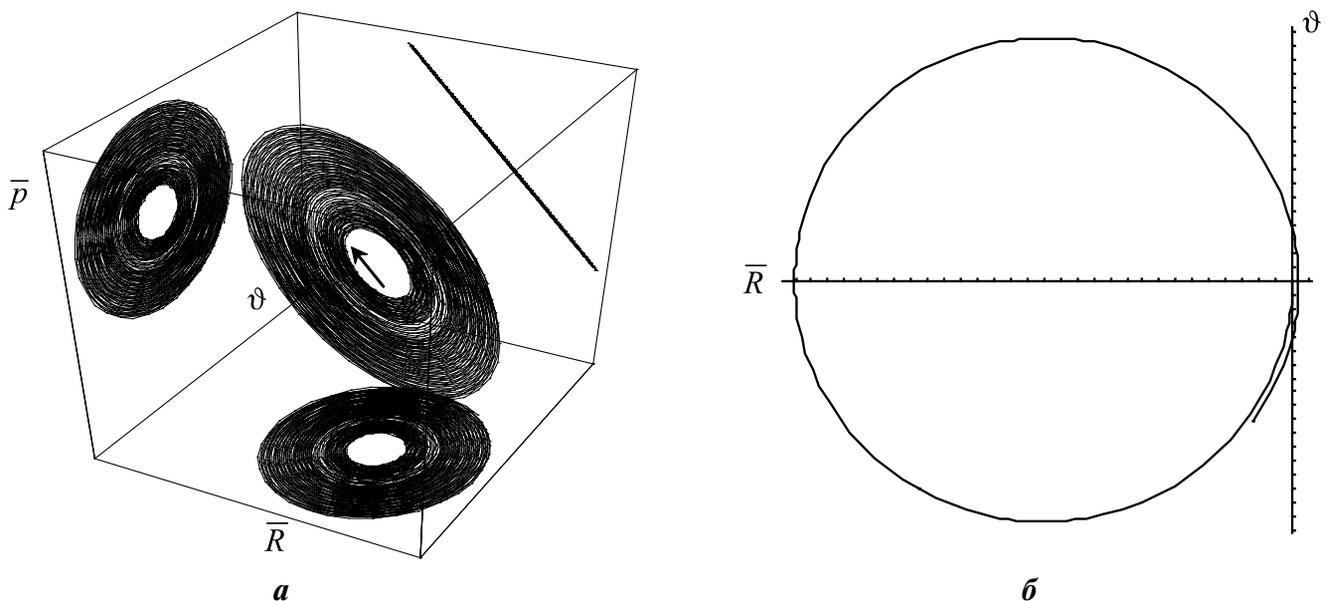


Рис. 1 Неустойчивый предельный цикл: а) его проекции на фазовые плоскости; б) проекция в фазовой плоскости  $R, \vartheta$ .

Из анализа устойчивости уравнений (15) находится точка стационарного состояния:

$$\bar{R} = \frac{2We^{-1}}{\Delta\bar{p}} \quad (16)$$

Выражение (16), по сути, представляет собой уравнение Лапласа для критического радиуса пузырька, что свидетельствует об адекватности предложенной модели и методики исследования.

Как упоминалось ранее, существует три типа аттракторов [2]. Стационарное состояние и предельный цикл изучены выше. Однако, если размерность системы больше двух, то в её фазовом пространстве может возникнуть странный аттрактор, который также имеет размерность больше двух. Результаты численного исследования показывают отсутствие в фазовом пространстве системы (3) странного аттрактора. Траектория решений в фазовом пространстве имеет ярко выраженный двухмерный характер (рис. 1 (а)), что свидетельствует о том, что нет никаких предпосылок зарождения странного аттрактора. Это обусловлено тем, что в физической системе “жидкость – паровой пузырек”, как показывают эксперименты [1], существует только два вида неустойчивости – монотонная (стационарное состояние) и осциллирующая (предельный

цикл). В этом состоит отличие исследуемой системы от системы Лоренца [3], в которой существует три типа неустойчивости.

### Выводы

В результате проведенного исследования предложенная математическая модель изучена на наличие трех типов аттракторов. Из строгого анализа устойчивости получены формулы Томсона и Лапласа для критического радиуса парового пузырька, что свидетельствует об адекватности предложенной модели и методики исследования.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Долинский А.А., Басок Б.И., Гульй С.И., Накорчевский А.И., Шурчкова Ю.А. Дискретно-импульсный ввод энергии в теплотехнологиях. — Киев: ИТТФ НАНУ, 1996, 208с.
2. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. — М.: Мир, 1989 — 486 с.
3. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. — 1963. — 20. — P. 130-147.

Получено 27.08.2005 г.