

УДК 532.529: 532.517.4

РОХМАН Б. Б.

*Институт угольных энерготехнологий НАН и Минтопэнерго Украины*

## МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ГАЗОДИСПЕРСНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА СТАБИЛИЗИРОВАННОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ

Побудовано модель двофазової турбулентної течії на стабілізованій ділянці труби. Враховуються міжфазова та міжчастинкова взаємодія, вплив стінки каналу і масових сил. Викладена методика розрахунку других та третіх кореляційних моментів пульсаційних характеристик частинок, що базується на побудові рівнянь переносу шуканих кореляцій. Наведені приклади числових результатів.

Построена модель двухфазного турбулентного течения на стабилизированном участке трубы. Учитываются межфазное и межчастичное взаимодействие, влияние стенки канала и массовых сил. Изложена методика расчета вторых и третьих корреляционных моментов пульсационных характеристик частиц, основанная на построении уравнений переноса искоемых корреляций. Приведены примеры численных результатов.

The model of twophase turbulent flow on the stabilized part of a pipe is constructed. Interphase and interparticle interaction, influence of the wall channel and mass forces are taken into account. The design procedure of the second and third correlation moments of the particles fluctuation characteristics, based on construction of the transfer equations for the required correlations is stated. Examples of numerical results are given.

$B$  – расход;  
 $C_1, C_2$  – эмпирические постоянные;  
 $F$  – сила;  
 $g$  – ускорение свободного падения;  
 $K$  – коэффициент восстановления скорости при ударе;  
 $k$  – кинетическая пульсационная энергия;  
 $N$  – частота ударов;  
 $P$  – давление газа;  
 $R$  – радиус канала;  
 $r, z, \varphi$  – радиальная, продольная и трансверсальная координаты;  
 $Re$  – критерий Рейнольдса;  
 $u, v, w$  – осредненные составляющие вектора скорости;  
 $\beta$  – истинная объемная концентрация частиц;  
 $\delta$  – диаметр частицы;  
 $\varepsilon$  – диссипация пульсационной энергии;  
 $\eta$  – кинематическая вязкость;  
 $\rho$  – плотность;  
 $\sigma$  – эмпирическая постоянная;  
 $\tau$  – время динамической релаксации;  
 $\psi_1, \psi_2$  – функции;  
 $\Gamma_p$  – генерация турбулентной энергии газа в следах за частицами.

### Индексы нижние

$a$  – величина относится к силе аэродинамического сопротивления частицы;  
 $g$  – величина относится к газу;  
 $k$  – величина относится к пульсационной энергии газа;  
 $m$  – величина относится к средней (по сечению) скорости несущей среды;  
 $n$  – величина относится к коэффициенту восстановления нормальной составляющей скорости при ударе;  
 $o$  – величина относится к оси потока;  
 $p$  – величина относится к частицам;  
 $t$  – величина относится к пульсациям;  
 $w$  – величина относится к стенке канала;  
 $r, z, \varphi$  – величины относятся к радиальной, продольной и трансверсальной оси;  
 $\tau$  – величина относится к коэффициенту восстановления тангенциальной составляющей скорости при ударе.

### Индексы верхние

/ – величина относится к пульсационной составляющей при временном осреднении;  
 $\langle \rangle$  – величина относится к осреднению по времени;  
 $\wedge$  – величина относится к актуальным значениям.

Сложность моделирования газодисперсных турбулентных потоков связана, в первую оче-

редь, с необходимостью решения двух теоретических проблем, состоящих в описании вовлечения

частиц в пульсационное движение среды и характера обратного влияния дисперсной фазы на параметры несущего потока. Существующие методы моделирования турбулентных двухфазных потоков могут быть разделены на две группы. Первая объединяет работы, основанные на эйлерово-лагранжевом описании движения среды: уравнения движения газа представляются и решаются в эйлеровых переменных, а уравнения движения твердой фазы – в лагранжевых. В рамках такого подхода учет стохастического характера движения частиц приводит к существенному увеличению объема вычислений, так как для получения статистически достоверной информации необходимо получить достаточно представительный ансамбль реализаций [1, 2]. Вторая группа охватывает работы, использующие эйлерово представление уравнений движения для обеих фаз. Это направление имеет ряд преимуществ по сравнению с предыдущим подходом: а) для решения системы уравнений используется единый алгоритм; б) упрощается численная реализация определения пульсационных характеристик газодисперсных потоков. Принципиальные трудности, возникающие при построении такого класса моделей, связаны с определением корреляционных моментов пульсационных характеристик дисперсной фазы, которые зависят от турбулентного и псевдотурбулентного механизмов переноса. Последний связан с межчастичными столкновениями за счет осредненного и хаотического движением частиц. В [3] корреляционные моменты, связанные с твердой фазой, выражаются через корреляционные моменты несущего потока. При этом для вычисления корреляционных моментов пульсационных характеристик дисперсной фазы использовалось локально-однородное приближение на базе гипотезы об изотропии турбулентности. В [4] корреляционные моменты  $\langle v'_p v'_p \rangle$ ,  $\langle w'_p w'_p \rangle$  определяются из уравнений переноса самих корреляций, в которых учитываются только турбулентные эффекты. При этом моменты третьего порядка, связанные с компонентами линейных и угловых скоростей частиц, вычислялись на базе градиентных представлений.

В настоящей работе на основании методов механики сплошной среды [5], с применением про-

цедуры Рейнольдса к актуальным уравнениям сохранения массы и импульса (в приближении пограничного слоя) получена стационарная осесимметричная система осредненных дифференциальных уравнений пульсационного движения газа и монодисперсных частиц на стабилизированном участке трубы. Замыкание системы уравнений проводится на основе однопараметрической модели турбулентности, обобщенной на случай двухфазных турбулентных течений. Для вычисления вторых и третьих корреляционных моментов пульсационных характеристик дисперсной фазы, в данной работе используется специально разработанная методика расчета, основанная на построении уравнений переноса искоемых корреляций, которые включают в себя турбулентные и псевдотурбулентные эффекты.

На стабилизированном участке трубы нет осредненного радиального движения газа и частиц ( $v_g = 0$ ,  $v_p = 0$ ), и осредненные параметры не изменяются в продольном направлении:  $\partial u_g / \partial z = \partial k_g / \partial z = \partial u_p / \partial z = \partial \langle w'_p v'_p \rangle / \partial z = \partial \langle v'_p v'_p \rangle /$

$\partial z = \partial \langle w'_p w'_p \rangle / \partial z = 0$ . Кроме того, предполагается, что истинная объемная концентрация твердой фазы равномерно распределена по сечению канала. С учетом сказанного, система дифференциальных уравнений, описывающая изотермическое течение газодисперсного потока на стабилизированном участке, может быть представлена следующим образом.

$$\frac{\rho_g}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(\eta_{ig} + \eta_g) \frac{\partial u_g}{\partial r} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} - F_{az} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\rho_p \beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \eta_p \frac{\partial u_p}{\partial r} \right] + F_{az} - \rho_p \beta g = 0. \quad (2)$$

Левые части уравнений сохранения количества движения фаз (1), (2) учитывают вязкие и рейнольдсовы напряжения, градиент давления, силы аэродинамического сопротивления и тяжести.

Для определения коэффициента турбулентной вязкости несущего потока используется однопараметрическая модель турбулентности, т.е. данная система дифференциальных уравнений дополняется уравнением переноса турбулентной энергии газа [3]:

$$\frac{\rho_g}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\eta_{lg}}{\sigma_k} + \eta_g \right) \frac{\partial k_g}{\partial r} \right] + \rho_g \eta_{lg} \left( \frac{\partial u_g}{\partial r} \right)^2 - \rho_g (\varepsilon_g + \varepsilon_p) + \Gamma_p = 0; \quad (3)$$

Первый член уравнения (3) описывает молекулярный и турбулентный перенос пульсационной энергии, второй – ее генерацию за счет энергии осредненного движения, третий и четвертый – ее диссипацию за счет вязкости газа и присутствия в нем твердой фазы, последний – генерацию турбулентной энергии в следах за частицами.

Для вычисления коэффициента турбулентной вязкости “газа” частиц  $\eta_p$  необходимо найти корреляционные моменты  $\langle v'_p v'_p \rangle$ ,  $\langle w'_p w'_p \rangle$ ,  $\langle w'_p v'_p \rangle$  ( $\eta_p = \psi_1(\langle v'_p v'_p \rangle)$ ) (см. [4]),  $\langle v'_p v'_p \rangle = \psi_2(\langle w'_p w'_p \rangle, \langle w'_p v'_p \rangle)$  (см. ниже)). Для этого необходимо построить уравнения переноса искомых величин. Для вывода уравнений переноса рейнольдсовых напряжений  $\langle v'_p v'_p \rangle$ ,  $\langle w'_p w'_p \rangle$ ,  $\langle w'_p v'_p \rangle$  необходимо, прежде всего, получить уравнения пульсационного движения частиц вдоль радиальной и трансверсальной оси. Для этого спроектируем актуальное уравнение движения дисперсной фазы на указанные оси координат. С учетом осевой симметрии задачи ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ) проекции уравнения движения частиц имеют вид:

$$\rho_p \beta \left( \hat{u}_p \frac{\partial \hat{v}_p}{\partial z} + \hat{v}_p \frac{\partial \hat{v}_p}{\partial r} - \frac{\hat{w}_p^2}{r} \right) = \hat{F}_{ar}; \quad (4)$$

$$\rho_p \beta \left( \hat{u}_p \frac{\partial \hat{w}_p}{\partial z} + \hat{v}_p \frac{\partial \hat{w}_p}{\partial r} + \frac{\hat{v}_p \hat{w}_p}{r} \right) = \hat{F}_{a\varphi}. \quad (5)$$

(при этом предполагается, что  $\hat{\beta} = \beta$ ). Применяя к уравнениям (4), (5) процедуру Рейнольдса ( $\hat{w}_p = w_p + w'_p$ ,  $\hat{v}_p = v_p + v'_p$ ), получим:

$$\rho_p \beta \left[ u_p \frac{\partial v_p}{\partial z} + u_p \frac{\partial v'_p}{\partial z} + u'_p \frac{\partial v_p}{\partial z} + u'_p \frac{\partial v'_p}{\partial z} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial r} + v_p \frac{\partial v'_p}{\partial r} + v'_p \frac{\partial v_p}{\partial r} + v'_p \frac{\partial v'_p}{\partial r} - \frac{1}{r} (w_p w_p + w_p w'_p + w_p w'_p + w'_p w'_p) \right] = F_{ar} + F'_{ar}; \quad (6)$$

$$\rho_p \beta \left[ u_p \frac{\partial w_p}{\partial z} + u_p \frac{\partial w'_p}{\partial z} + u'_p \frac{\partial w_p}{\partial z} + u'_p \frac{\partial w'_p}{\partial z} + v_p \frac{\partial w_p}{\partial r} + v_p \frac{\partial w'_p}{\partial r} + v'_p \frac{\partial w_p}{\partial r} + v'_p \frac{\partial w'_p}{\partial r} + \frac{1}{r} (v_p w_p + v_p w'_p + w_p v'_p + w'_p v'_p) \right] = F_{a\varphi} + F'_{a\varphi}. \quad (7)$$

Осредняя уравнения (6) и (7) с учетом  $\langle w'_p \rangle = \langle v'_p \rangle = \langle u'_p \rangle = w_p = w_g = 0$ , имеем:

$$\rho_p \beta \left[ u_p \frac{\partial v_p}{\partial z} + \frac{\partial \langle u'_p v'_p \rangle}{\partial z} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial r} + \frac{\partial (r \langle v'_p v'_p \rangle)}{r \partial r} - \frac{\langle w'_p w'_p \rangle}{r} \right] = F_{ar}; \quad (8)$$

$$\rho_p \beta \left( \frac{\partial \langle u'_p w'_p \rangle}{\partial z} + \frac{\partial (r \langle v'_p w'_p \rangle)}{r \partial r} + \frac{1}{r} \langle w'_p v'_p \rangle \right) = 0 \quad (9)$$

(при преобразовании (8), (9) используется пульсационное уравнение неразрывности. В зависимости от выбранной координаты (например,  $\varphi$ ) это уравнение предварительно умножается на пульсацию проекции вектора скорости частиц на эту ось, т.е. на величину  $w'_p$ , а затем осредняется).

Вычитая из актуальных уравнений (6), (7) осредненные (8), (9), получим уравнения для пульсационной скорости частиц вдоль радиальной и трансверсальной оси:

$$\rho_p \beta \left[ u_p \frac{\partial v'_p}{\partial z} + u'_p \frac{\partial v_p}{\partial z} + u'_p \frac{\partial v'_p}{\partial z} + v_p \frac{\partial v'_p}{\partial r} + v'_p \frac{\partial v_p}{\partial r} + v'_p \frac{\partial v'_p}{\partial r} - \frac{1}{r} w'_p w'_p - \frac{\partial \langle u'_p v'_p \rangle}{\partial z} - \frac{\partial (r \langle v'_p v'_p \rangle)}{r \partial r} + \frac{1}{r} \langle w'_p w'_p \rangle \right] = F'_{ar}; \quad (10)$$

$$\rho_p \beta \left[ u_p \frac{\partial w'_p}{\partial z} + u'_p \frac{\partial w'_p}{\partial z} + v_p \frac{\partial w'_p}{\partial r} + v'_p \frac{\partial w'_p}{\partial r} + \frac{1}{r} (v_p w'_p + w'_p v'_p) - \frac{\partial \langle u'_p w'_p \rangle}{\partial z} - \frac{\partial (r \langle v'_p w'_p \rangle)}{r \partial r} - \frac{1}{r} \langle w'_p v'_p \rangle \right] = F'_{a\varphi}, \quad (11)$$

где

$$F'_{ar} = \frac{\rho_p \beta}{\tau} (v'_g - v'_p); \quad F'_{a\varphi} = \frac{\rho_p \beta}{\tau} (w'_g - w'_p). \quad (12)$$

Для того чтобы получить уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений  $\langle v'_p v'_p \rangle$ ,  $\langle w'_p w'_p \rangle$ , необходимо умножить уравнение (10) на величину  $v'_p$ , а уравнение (11) – на  $w'_p$ , и в полученных уравнениях произвести осреднение. После несложных преобразований с учетом (12) в приближении пограничного слоя на участке установившегося движения газозвеси ( $v_p = 0$ ) уравнения переноса искомых корреляционных моментов имеют вид:

$$\begin{aligned} & \rho_p \beta \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle v'_p v'_p v'_p \rangle) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{r} \langle v'_p w'_p w'_p \rangle \right] + \frac{2\beta \rho_p}{\tau} (\langle v'_p v'_g \rangle - \\ & - \langle v'_p v'_p \rangle) + 2 \left\{ \frac{\delta^2 \rho_p}{6912\beta} \left( \frac{\partial u_p}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{1-K_n}{2} - \frac{1-K_\tau}{7} \right)^2 - \right. \\ & \left. - C_1 \rho_p \beta \langle v'_p v'_p \rangle (1-K_n^2) \right\} N = 0; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_p \beta \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle v'_p w'_p w'_p \rangle) - \frac{2}{r} \langle v'_p w'_p w'_p \rangle \right] + \\ & + \frac{2\beta \rho_p}{\tau} (\langle w'_p w'_g \rangle - \langle w'_p w'_p \rangle) + \\ & + 2 \left\{ \frac{\delta^2 \rho_p}{6912\beta} \left( \frac{\partial u_p}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{1-K_n}{2} - \frac{1-K_\tau}{7} \right)^2 - \right. \\ & \left. - C_2 \rho_p \beta \langle w'_p w'_p \rangle (1-K_n^2) \right\} N = 0; \quad (K_n < 0). \quad (14) \end{aligned}$$

В уравнениях (13), (14) фигурируют дополнительные слагаемые нетурбулентного происхождения (последние члены уравнений), которые описывают генерацию и диссипацию псевдотурбулентной энергии твердой фазы, обусловленные межчастичными столкновениями за счет их осредненного и пульсационного движения. Как отмечалось в работе [6], эти слагаемые не могут быть вычислены традиционными методами тео-

рии турбулентности, так как пульсации, связанные с межчастичными столкновениями, зависят в основном от случайного положения единичного вектора, направленного вдоль линии удара. Поэтому для их определения использовалась специально разработанная методика расчета, основанная на анализе динамики процесса соударений [6].

Для того чтобы построить уравнения переноса касательного рейнольдсова напряжения  $\langle w'_p v'_p \rangle$ , необходимо умножить уравнение (10) на величину  $w'_p$ , а уравнение (11) – на  $v'_p$ , после чего сложить полученные уравнения и произвести осреднение. Опуская промежуточные вычисления с использованием (12) в приближении пограничного слоя на участке стабилизированного движения двухфазного потока, запишем уравнение переноса для второго корреляционного момента  $\langle w'_p v'_p \rangle$ :

$$\begin{aligned} & \rho_p \beta \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle v'_p v'_p w'_p \rangle) + \frac{1}{r} \langle w'_p w'_p w'_p \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \langle v'_p v'_p w'_p \rangle \right] + \frac{\beta \rho_p}{\tau} (\langle v'_g w'_p \rangle + \langle v'_p w'_g \rangle - \\ & - 2 \langle w'_p v'_p \rangle) = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Смешанные корреляционные моменты второго порядка, фигурирующие в уравнениях (13)-(15), определяются через корреляции несущего потока в локально-однородном приближении в соответствии с рекомендациями [3].

Для замыкания приведенной системы уравнений необходимо вычислить третьи моменты  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle$ ,  $\langle v'_p w'_p w'_p \rangle$ ,  $\langle v'_p v'_p w'_p \rangle$ ,  $\langle w'_p w'_p w'_p \rangle$ , фигурирующие в уравнениях (13)-(15). Для этого построим уравнения переноса искомых корреляций. Проиллюстрируем вывод этих уравнений на примере уравнения переноса третьего момента  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle$ . Умножим пульсационное уравнение (10) на величину  $v'_p v'_p$  и преобразуем полученное уравнение с помощью выражений (12) и пульсационного уравнения неразрывности, предварительно умноженного на величину  $v'_p v'_p v'_p / 3$ . Затем в преобразованном уравнении произведем осреднение. Пренебрегая смешанным третьим корреляционным моментом  $\langle v'_p v'_p v'_g \rangle$  в приближении узкого канала на участ-

ке стабилизированного течения газозвеси, запишем уравнение переноса искомой величины  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle$ :

$$\begin{aligned} & \rho_p \beta \left[ \frac{1}{3r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle v'_p v'_p v'_p \rangle) - \frac{\langle v'_p v'_p w'_p w'_p \rangle}{r} - \right. \\ & \left. - \langle v'_p v'_p \rangle \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle v'_p v'_p \rangle) + \right. \\ & \left. + \frac{\langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle}{r} \right] + \frac{\beta \rho_p}{\tau} \langle v'_p v'_p v'_p \rangle = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В уравнении (16) присутствуют четвертые корреляционные моменты, которые могут быть выражены подобно [7]:

$$\langle v'_p v'_p v'_p v'_p \rangle = 3 \langle v'_p v'_p \rangle \langle v'_p v'_p \rangle; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \langle v'_p v'_p w'_p w'_p \rangle = \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle + \\ & + 2 \langle v'_p w'_p \rangle \langle v'_p w'_p \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (16), после несложных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} & \langle v'_p v'_p v'_p \rangle = -\tau \left[ \langle v'_p v'_p \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle v'_p v'_p \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{2 \langle w'_p v'_p \rangle^2}{r} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Подобным образом могут быть получены алгебраические выражения для остальных искомых корреляций. Приведем окончательный вид этих выражений:

$$\begin{aligned} & \langle w'_p w'_p w'_p \rangle = -\tau \left[ \langle w'_p v'_p \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p w'_p \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{2 \langle w'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle}{r} \right]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \langle v'_p v'_p w'_p \rangle = -\tau \left[ \frac{2 \langle v'_p v'_p \rangle}{3} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p v'_p \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{2 \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p v'_p \rangle}{3r} + \frac{\langle w'_p v'_p \rangle}{3} \frac{\partial}{\partial r} \langle v'_p v'_p \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{4 \langle w'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle}{3r} \right]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \langle v'_p w'_p w'_p \rangle = -\tau \left[ \frac{\langle v'_p v'_p \rangle}{3} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p w'_p \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{2 \langle w'_p v'_p \rangle}{3} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p v'_p \rangle - \frac{2 \langle w'_p w'_p \rangle^2}{3r} + \right. \\ & \left. + \frac{2 \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle}{3r} + \frac{2 \langle w'_p v'_p \rangle^2}{3r} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (19)-(22) в уравнения (13)-(15), получим окончательный вид уравнений переноса вторых корреляционных моментов.

$$\begin{aligned} & \rho_p \beta \left[ \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \tau \langle v'_p v'_p \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle v'_p v'_p \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau \langle w'_p v'_p \rangle^2) - \frac{2 \tau \langle v'_p v'_p \rangle}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p w'_p \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{4 \tau \langle w'_p v'_p \rangle}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p v'_p \rangle + \frac{4 \tau \langle w'_p w'_p \rangle^2}{3r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4 \tau \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle}{3r^2} - \frac{4 \tau \langle w'_p v'_p \rangle^2}{3r^2} \right] + \frac{2 \rho_p \beta}{\tau} \times \\ & \times (\langle v'_p v'_p \rangle - \langle v'_p v'_p \rangle) + \\ & + 2 \left\{ \frac{\delta^2 \rho_p}{6912 \beta} \left( \frac{\partial u_p}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{1 - K_n}{2} - \frac{1 - K_\tau}{7} \right)^2 - \right. \\ & \left. - C_1 \rho_p \beta \langle v'_p v'_p \rangle (1 - K_n^2) \right\} N = 0; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \rho_p \beta \left[ \frac{\partial}{3r \partial r} \left( r \tau \langle v'_p v'_p \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p w'_p \rangle \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2 \partial}{3r \partial r} \left( r \tau \langle w'_p v'_p \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p v'_p \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau \langle w'_p w'_p \rangle^2) + \frac{2}{3r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau \langle w'_p v'_p \rangle^2) + \frac{2 \tau \langle v'_p v'_p \rangle}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p w'_p \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{4 \tau \langle w'_p v'_p \rangle}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p v'_p \rangle - \frac{4 \tau \langle w'_p w'_p \rangle^2}{3r^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4\tau \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle + 4\tau \langle w'_p v'_p \rangle^2}{3r^2} \Big] + \frac{2\rho_p \beta}{\tau} \times \\
 & \times (\langle w'_p w'_g \rangle - \langle w'_p w'_p \rangle) + \\
 & + 2 \left[ \frac{\delta^2 \rho_p}{6912\beta} \left( \frac{\partial u_p}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{1-K_n}{2} - \frac{1-K_\tau}{7} \right)^2 - \right. \\
 & \left. - C_2 \rho_p \beta \langle w'_p w'_p \rangle (1-K_n^2) \right] N = 0 ; \quad (24) \\
 & \rho_p \beta \left[ \frac{2\partial}{3r\partial r} \left( r\tau \langle v'_p v'_p \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p v'_p \rangle \right) + \right. \\
 & + \frac{2}{3r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p v'_p \rangle) + \\
 & + \frac{\partial}{3r\partial r} \left( r\tau \langle w'_p v'_p \rangle \frac{\partial}{\partial r} \langle v'_p v'_p \rangle \right) - \\
 & - \frac{4}{3r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau \langle w'_p v'_p \rangle \langle w'_p^2 \rangle) - \frac{\tau \langle w'_p v'_p \rangle}{r} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p w'_p \rangle - \\
 & - \frac{10\tau \langle w'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle}{3r^2} + \frac{2\tau \langle v'_p v'_p \rangle}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \langle w'_p v'_p \rangle + \\
 & + \left. \frac{2\tau \langle v'_p v'_p \rangle \langle w'_p v'_p \rangle}{3r^2} + \frac{\tau \langle w'_p v'_p \rangle}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \langle v'_p v'_p \rangle \right] + \\
 & + \frac{\rho_p \beta}{\tau} (\langle v'_g w'_p \rangle + \langle v'_p w'_g \rangle - 2 \langle w'_p v'_p \rangle) = 0. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Полные расходы газа и частиц находятся из очевидных соотношений:

$$B_g = 2\pi \rho_g \int_0^R u_g r dr; \quad (26)$$

$$B_p = 2\pi \rho_p \beta \int_0^R u_p r dr. \quad (27)$$

Скорость диссипации турбулентной энергии газа  $\varepsilon_p$  за счет действия силы аэродинамического сопротивления находится по формуле [6]:

$$\varepsilon_p = \frac{\rho_p \beta}{\rho_g \tau} (2k_g - \langle u'_p u'_g \rangle - \langle v'_p v'_g \rangle - \langle w'_p w'_g \rangle). \quad (28)$$

Генерация турбулентной энергии газа в следах за частицами может быть рассчитана при помощи выражения [6]:

$$\Gamma_p = 0,12 \left\{ 1 - \exp \left[ -(\text{Re}_p / 80)^2 \right] \right\} \rho_p \beta (u_g - u_p)^2 / \tau. \quad (29)$$

Граничные условия на оси потока для уравнений (1)-(3), (23)-(25) задаются из соображения симметрии:

$$(\partial u_g / \partial r)_o = (\partial k_g / \partial r)_o = 0 ;$$

$$\begin{aligned}
 & (\partial u_p / \partial r)_o = (\partial \langle v'_p v'_p \rangle / \partial r)_o = \\
 & = (\partial \langle w'_p w'_p \rangle / \partial r)_o = (\partial \langle w'_p v'_p \rangle / \partial r)_o = 0, \quad (30)
 \end{aligned}$$

а на стенке канала – соотношениями:

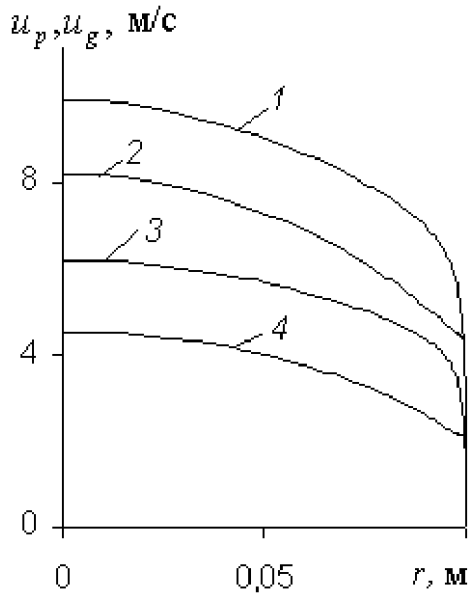
$$u_{gw} = k_{gw} = 0 ; \quad (31)$$

$$u_{pw} = \frac{\delta}{24\sqrt{2}\beta(1-K_\tau)} \left( \frac{\partial u_p}{\partial r} \right)_w (7K_n - 2K_\tau - 5); \quad (32)$$

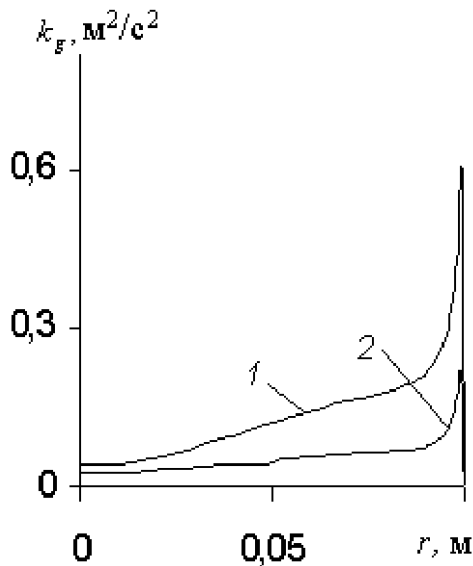
$$\begin{aligned}
 & (\partial \langle v'_p v'_p \rangle / \partial r)_w = (\partial \langle w'_p w'_p \rangle / \partial r)_w = \\
 & = (\partial \langle w'_p v'_p \rangle / \partial r)_w = 0. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Приведенная система уравнений (1)-(3), (23)-(27) с учетом выражений (28), (29) и граничными условиями (30) – (33) интегрировалась методом прямой и обратной прогонки на неравномерной сетке, сгущающейся у стенки канала; при этом градиент давления исключался с помощью известного метода, описанного в работе [8]. В соответствии с приведенным алгоритмом была разработана программа для расчета двухфазных течений.

Обсудим результаты расчетов двух вариантов при следующих исходных данных:  $\beta = 0,0012$ ,  $\rho_g = 1,3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\delta = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\rho_p = 1600 \text{ кг/м}^3$ . Вариант I:  $u_{gm} = 5 \text{ м/с}$ , II:  $u_{gm} = 8 \text{ м/с}$ . На рис. 1 – 4 представлены некоторые результаты расчетов аэродинамики газодисперсного потока в канале радиусом  $R = 0,1 \text{ м}$ . Рис. 1 иллюстрирует распределение аксиальных осредненных скоростей газа и частиц на участке установившегося движения. В ядре потока дисперсная фаза отстает от газа тем больше, чем больше скорость витания частиц. В пристеночной области, где скорость несущей среды резко снижается, частицы опережают газ – здесь сила аэродинамического сопротивления отрицательна, и взвешивание частиц обусловлено действием рейнольдсовых напряжений (рис. 1, кривые 2, 4). Повышение средней (по сечению) скорости несущей среды  $u_{gm}$



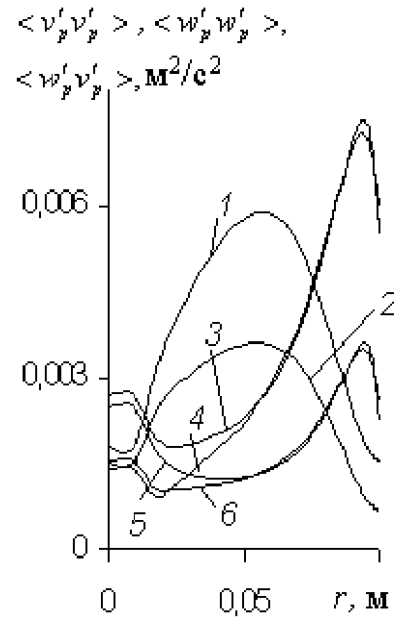
**Рис. 1. Профили осредненных аксиальных скоростей газа и частиц;**  
 вариант I: 3 –  $u_g$ , 4 –  $u_p$ ; вариант II: 1 –  $u_g$ , 2 –  $u_p$ .



**Рис. 2. Профили кинетических энергий турбулентных пульсаций скорости газа  $k_g$ :**  
 1 – вариант II; 2 – вариант I.

способствует генерации турбулентной энергии газа, вследствие чего кинетическая пульсационная энергия газа в варианте II оказывается выше, чем в варианте I (рис. 2, ср. кривые 1, 2).

На рис. 3 приведены профили вторых корреляционных моментов пульсаций скоростей дисперсной фазы. Как показывают результаты рас-



**Рис. 3. Профили вторых корреляционных моментов пульсационных характеристик дисперсной фазы:**

вариант I: 2 –  $\langle w'_p v'_p \rangle$ , 5 –  $\langle w'_p w'_p \rangle$ , 6 –  $\langle v'_p v'_p \rangle$ ;  
 вариант II: 1 –  $\langle w'_p v'_p \rangle$ , 3 –  $\langle w'_p w'_p \rangle$ , 4 –  $\langle v'_p v'_p \rangle$ .

четов, характер зависимости  $\langle v'_p v'_p \rangle(r)$  (кривая 4) определяется, главным образом, скоростью генерации энергии хаотического (турбулентного и псевдотурбулентного) движения частиц, обусловленной, с одной стороны, действием силы аэродинамического сопротивления (восьмой член уравнения (23) –  $2\rho_p \beta \langle v'_p v'_p \rangle / \tau$ ), с другой – межчастичными столкновениями (девятый член уравнения (23) –  $\frac{2\delta^2 \rho_p (\frac{du_p}{dr})^2 N}{6912\beta} \left( \frac{1-K_n}{2} - \frac{1-K_\tau}{7} \right)^2$ ).

В приосевой области, где скорость генерации псевдотурбулентной энергии частиц незначительна из-за малой величины производной  $du_p/dr$  (заметьте, что генерация псевдотурбулентной энергии пропорциональна  $(du_p/dr)^2$ , а частота соударений –  $|du_p/dr|$  (см. [6])), определяющую роль в формировании профиля  $\langle v'_p v'_p \rangle(r)$  играет производство турбулентной энергии дисперсной фазы, обусловленное межфазным взаимодействием. Поэтому вторая производная от функции  $\langle v'_p v'_p \rangle(r)$  в уравнении (23) отрицательна. В интервале  $0,026 \text{ м} < r < 0,055 \text{ м}$ , где величины смешанного корреляционного момента  $\langle v'_p v'_g \rangle$  и модуля градиента аксиальной скорости частиц

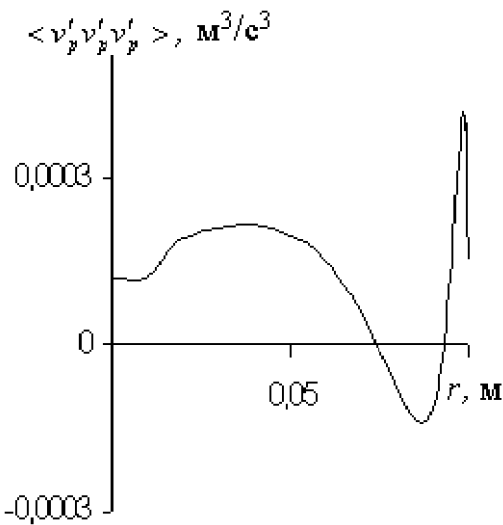


Рис. 4. Распределение третьего корреляционного момента  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle$  по поперечному сечению потока для варианта II.

$|\partial u_p / \partial r|$  повышаются, происходит возрастание функции  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$ . На втором участке восходящей ветви  $0,055 \text{ м} < r < 0,094 \text{ м}$  скорость порождения турбулентной энергии дисперсной фазы уменьшается, зато значительно увеличивается скорость генерации псевдотурбулентной энергии частиц, что в итоге приводит к повышению величины производной  $\partial \langle v'_p v'_p \rangle / \partial r$  в этой зоне. В пристеночной области скорость производства энергии хаотического движения частиц заметно снижается, что способствует убыванию кривой  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$ .

Необходимо отметить, что кривые  $\langle w'_p w'_p \rangle (r)$  подобны кривым  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$ , причем значения функций  $\langle w'_p w'_p \rangle (r)$  и  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$  в периферийной области практически совпадают между собой, а в центральной части канала несколько отличаются друг от друга, что говорит об анизотропии поля пульсационной энергии твердой фазы в этой зоне (рис. 3, ср. кривые 3 и 4; 5 и 6).

Из рис. 3 видно, что функция  $\langle w'_p w'_p \rangle (r)$  имеет максимум в точке  $r = 0,055 \text{ м}$  (кривая 1). Анализ баланса членов уравнения (25) показывает, что на восходящей ветви поведение функции  $\langle w'_p w'_p \rangle (r)$  определяется, в основном, четвертым, шестым и десятым слагаемыми указанного уравнения. Резкое возрастание кривой  $\langle w'_p w'_p \rangle (r)$  на участке  $0,0095 \text{ м} < r < 0,026 \text{ м}$  обусловлено, с одной сторо-

ны, увеличением скорости генерации рейнольдсова напряжения  $\langle w'_p v'_p \rangle$  за счет действия силы аэродинамического сопротивления (последний член уравнения (25) —  $\rho_p \beta (\langle v'_g w'_p \rangle + \langle v'_p w'_g \rangle) / \tau$ ), с другой — существенным уменьшением величины  $10 \rho_p \beta \tau \langle w'_p v'_p \rangle \langle w'_p w'_p \rangle / (3r^2)$  (шестой член уравнения (25)), которое связано с убыванием функции  $\langle w'_p w'_p \rangle (r)$  (кривая 3) в этой области и увеличением радиальной координаты  $r$ . При дальнейшем росте координаты  $r$  в интервале  $0,026 \text{ м} < r < 0,055 \text{ м}$  влияние четвертого и шестого слагаемых уравнения (25) становится незначительным. При этом скорость генерации, обусловленная межфазным взаимодействием, несколько уменьшается, вследствие чего скорость возрастания функции  $\langle w'_p v'_p \rangle (r)$  в этой зоне замедляется. На нисходящей ветви производство касательного рейнольдсова напряжения значительно снижается за счет убывания функций  $\langle v'_g w'_p \rangle (r)$  и  $\langle v'_p w'_g \rangle (r)$  в рассматриваемом диапазоне, и в результате производная  $\partial \langle w'_p v'_p \rangle / \partial r$  становится отрицательной.

Увеличение средней (по сечению) скорости несущей среды  $u_{gm}$  способствует возрастанию значений функций  $\langle w'_p w'_p \rangle (r)$ ,  $\langle w'_p v'_p \rangle (r)$  и  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$  (рис. 3).

На рис. 4 приведены результаты расчетов третьего корреляционного момента  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle$  на участке стабилизированного движения двухфазного потока. На участке  $0,0094 \text{ м} < r < 0,0255 \text{ м}$  функция  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle (r)$  возрастает. Это связано, с одной стороны, с убыванием кривой  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$  ( $\partial \langle v'_p v'_p \rangle / \partial r < 0$ ) в этой зоне (рис. 3, кривая 4), с другой — быстрым ростом функции  $\langle w'_p v'_p \rangle (r)$  (см. (19); рис. 3, кривая 1). В интервале  $0,0255 \text{ м} < r < 0,04 \text{ м}$  производная  $\partial \langle v'_p v'_p \rangle / \partial r$  меняет знак, поэтому скорость изменения функции  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle (r)$  в этой области резко замедляется. На участке  $0,04 \text{ м} < r < 0,09 \text{ м}$  происходит убывание зависимости  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle (r)$  за счет увеличения значений функции  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$ , ее производной и координаты  $r$ , а также уменьшения величины  $\langle w'_p v'_p \rangle$ . В интервале  $0,09 \text{ м} < r < 0,099 \text{ м}$  производная  $\partial \langle v'_p v'_p \rangle / \partial r < 0$ , поэтому кривая  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle (r)$  возрастает на этом участке. В пристеночной области резкое убывание функции



$\langle v'_p v'_p v'_p \rangle (r)$  обусловлено значительным уменьшением величин  $\langle v'_p v'_p \rangle$  и  $\langle w'_p v'_p \rangle$ .

Из сравнения значений функций  $\langle v'_p v'_p \rangle (r)$ ,  $\langle w'_p v'_p \rangle (r)$  и  $\langle v'_p v'_p v'_p \rangle (r)$  (рис. 3, 4) следует, что величины вторых корреляционных моментов существенно выше, чем третьих.

Таким образом, предложенная математическая модель позволяет корректно определить аэродинамические параметры газа и монодисперсных частиц, что дает основание использовать ее при расчетах технических устройств, предназначенных для пневмотранспорта сыпучих материалов, очистки газов от твердых примесей, механической и термической обработки порошков, сжигания твердого топлива.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Волков К. Н., Горсинов Г. Ф. Моделирование процессов турбулентного переноса импульса и тепла в неизотермических дисперсных струях // Теплообмен ММФ. — 2000. — Т. 6. — С. 203–212.
2. Crowe C. T., Troutt T. R., Chung J. N. Numerical models for two-phase turbulent flows // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1996. — 28. — P. 11–43.
3. Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газозвеси. — К.: Наукова думка, 1987. — 240 с.
4. Кондратьев Л. В. Модель и численное исследование турбулентного течения газозвеси в трубе. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. — Л., 1989. — 18 с.
5. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
6. Рохман Б. Б., Шрайбер А. А. Математическое моделирование аэродинамики и физико-химических процессов в надслоевом пространстве топки с циркулирующим кипящим слоем // Инж.-физ. журнал. — 1993. — 65, № 5. — С. 521–526; 1994. — 66, № 2. — С. 159–167.
7. Hanjalic K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid. Mech.. — 1972. — 52, № 4. — P. 609–638.
8. Симуни Л. М. Численное решение задачи о неизотермическом движении жидкости в плоской трубе // Инж.-физ. журнал. — 1966. — 10, №1. — С. 85–91.

Получено 05.04.2005 г.