УДК 519.6: 536.24

Никитенко Н.И.[1], Снежкин Ю.Ф.[1], Сороковая Н.Н.[1], Кольчик Ю.Н.[2]

[1] *Институт технической теплофизики НАН Украины*
[2] *Киевский национальный университет строительства и архитектуры*

ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Викладено метод математичного моделювання динаміки тепломасообміну при різноманітних режимах течії рідини в каналах з пористими стінками на базі рівнянь Нав'є -Стокса та методу гальмування швидкостей зміни шуканих функцій в деяких вузлових точках різницевої сітки. Виконано зіставлення результатів моделювання з відомими експериментальними даними.

Излагаются метод математического моделирования динамики тепломассообмена при различных режимах течения жидкости в каналах с пористыми стенками на базе уравнений Навье-Стокса и метода торможения скоростей изменения искомых функций в некоторых узловых точках разностной сетки. Выполнено сопоставление результатов моделирования с известными экспериментальными данными.

Are stated a method of mathematical modeling of dynamics heat and mass transfer at various modes of current of a liquid in channels with porous walls on the basis of equations Navier-Stokes and of the method of braking speeds of change of required functions in some points in nodes of finite-difference grids. Comparison of results of modelling to known experimental data is executed.

a – температуропроводность;
b_W – доля узлов, в которых осуществляется торможение скоростей изменения искомых функций во времени;
C – объемная концентрация компонента смеси;
d – диаметр;
D – коэффициент диффузии;
g_x, g_y – проекции создаваемого массовыми силами ускорения g на оси x и y;
G – расход жидкости;
Gr – число Грасгофа;
Gr_D – диффузионное число Грасгофа;
h_x, h_y – размер шагов разностной сетки по пространственным координатам x и y;
I – число шагов разностной сетки вдоль оси x;
M – число шагов разностной сетки вдоль оси y;
J – плотность потока массы;
l – размер шага разностной сетки по времени t;
L – масштаб длины;
P – давление;
Pr – число Прандтля;
Re – число Рейнольдса;
Sc – число Шмидта;
t – время;
T – температура;
u, v – проекции вектора скоростии на оси x и y;
V – масштаб скорости;
V_η и V_τ – проекции вектора скоростии на оси η и τ;
x, y – декартовы координаты;
X – половина ширины щелевого канала;
Y – длина канала;
β_T – коэффициент объемного термического расширения;
β_j – коэффициентами объемного расширения вследствие изменения объемной концентрации j-го компонента;
η и τ – нормаль и касательная к граничной поверхности;
θ – весовой параметр разностного уравнения;
λ – коэффициент теплопроводности;
ν – кинематический коэффициент вязкости;
ρ – плотность;
ψ – функция тока;
ω – функция вихря;
∇ – оператор Гамильтона.

Индексы:

гр –граничные точки;
н – начальные значения функций;
т – турбулентность;
э – эквивалентная величина;

эф – эффективные параметры;
i, m и n – порядковые номера шагов разностной сетки по координатам x, y и t;
j – порядковый номер компонента смеси;
k – порядковый номер итераций;
W – функция, принимающая значения u, v, T, C_j, ψ, ω.

Введение

Процессы тепломассообмена в каналах с пористыми стенками при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения представляют интерес для ряда отраслей современной техники в связи с процессами сушки, испарения, конденсации, горения, адсорбции, пористого охлаждения.

Численное моделирование течения и теплообмена в каналах с проницаемыми стенками обычно [1,2] проводится на базе уравнений пограничного слоя. В работе [3] предложен сеточный метод расчета ламинарного течения и теплообмена однокомпонентной вязкой несжимаемой жидкости в каналах при наличии вдува на базе уравнений Навье – Стокса и двухслойной пересчетной явной разностной схемы.

В настоящей работе излагается метод моделирования гидродинамики и тепломассообмена при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения в канале с пористыми стенками с использованием неусредненных уравнений Навье-Стокса и трехслойной пересчетной явной разностной схемы. Для расчета переходного и турбулентного режимов течения дополнительно привлекается метод торможения скоростей изменения компонентов вектора скорости, температуры и объемных концентраций в некоторых узловых точках области, идея которого сформулирована в [4] в связи с задачами естественной конвекции.

Математическая модель

Для моделирования течения и тепломассообмена во внутренних точках канала используется система двумерных уравнений Навье – Стокса в дивергентной безразмерной форме, которая в переменных функция тока ψ, функция вихря ω, температура T и объемная концентрация Cj компонентов смеси, $j = 1,2,\ldots,j_k$, имеет вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial u\omega}{\partial x}+\frac{\partial v\omega}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)+ \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{g_y}{g}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{g_x}{g}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+ \sum_j\frac{\mathrm{Gr}_{dj}}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{g_y}{g}\frac{\partial C_j}{\partial x}-\frac{g_x}{g}\frac{\partial C_j}{\partial y}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial uT}{\partial x}+\frac{\partial vT}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re\,Pr}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial t}+\frac{\partial uC_j}{\partial x}+\frac{\partial vC_j}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}\,Sc}\left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C_j}{\partial y^2}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\omega, \quad (4)$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}\ ,\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\ ,\quad \omega=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\ . \quad (5)$$

где $\mathrm{Re}=VL/\nu$; $\mathrm{Gr}=g\beta L^3\Delta T/\nu^2$; $\mathrm{Gr}_{dj}=g\beta_j L^3\Delta C_j/\nu^2$ – диффузионное число Грасгофа для j-го компонента смеси; $\mathrm{Pr}=\nu/a$; $\mathrm{Sc}=\nu/D$; $\beta_T=-(\partial\rho/\partial T)/\rho$; $\beta_j=-(\partial\rho_j/\partial C_j)/\rho_j$.

Уравнения переноса вихря (1), энергии (2), массы компонентов (3) и тока (4) записаны в предположении, что в каждый момент времени t относительное отклонение плотности смеси $\rho(t, x, y)$ и кинематической вязкости $\nu(t, x, y)$ от их средних значений для рассматриваемой области пространства в тот же момент времени являются малыми. Распределения давления жидкости в канале может быть найдено путем решения следующего уравнения типа Пуассона, вытекающего из уравнений Навье – Стокса:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+ \frac{Gr}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{g_y}{g}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{g_x}{g}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+$$

$$+\sum_j \frac{\mathrm{Gr}_{dj}}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{g_y}{g}\frac{\partial C_j}{\partial x}+\frac{g_x}{g}\frac{\partial C_j}{\partial y}\right). \qquad (6)$$

Для уравнений (1)–(3) требуется задание как начальных, так и граничных условий, а для (4) – только граничных. Начальное распределение скоростей, температуры и объемной концентрации в общем случае имеет вид

$$W(0, x, y) = W_{\text{н}}(x, y),\ W = u, \mathrm{v}, T, C_j. \qquad (7)$$

В том случае, когда требуется найти нестационарное решение системы уравнений (1)–(5), поле функции вихря в момент времени $t = 0$ приближенно может быть найдено путем решения уравнений (1) и (4) методом установления при условиях (7) и произвольном задании функции ω для первой итерации.

Ниже для простоты граничные условия тепло- и массообмена приводятся для щелевого канала $-X < x < X$.

Для входного сечения канала $y = 0$ задаются условия

$$W(t, x, 0) = W_0(t, x),\ W = u, \mathrm{v}, T, C_j. \qquad (8)$$

На проницаемой границе $x = X$ задаются плотности потоков $J'_j(t, X, y)$ вдуваемых компонентов, уравнения их состояния и условия теплообмена, которые могут быть первого, второго или третьего рода. Результирующая нормальная составляющая скорости потока $u\ (t, X, y)$ на этой границе связана с расходами и объемными концентрациями компонентов соотношением

$$u(t,X,y)=\sum_j J'_j(t,X,y)\Big/\sum_j C_j(t,X,y)\ , \qquad (9)$$

причем объемная концентрация $C_j(t, X, y)$ компонента j на границе $x = X$ находится из уравнения сохранения массы

$$J'_j(t,X,y)=C_j(t,X,y)u(t,X,y)-\frac{1}{\mathrm{ReSc}}\frac{\partial C_j}{\partial x}. \qquad (10)$$

В простейшем случае можно положить, что на этой границе продольная составляющая скорости равна нулю, а условия теплообмена – первого рода

$$v(t,X,y)=0\ ,\quad T(t,X,y)=T'(t,y)\ . \qquad (11)$$

Когда поля скоростей, температуры и объемной концентрации компонентов являются симметричными относительно средней плоскости канала $x = 0$, то на этой плоскости выполняются условия

$$v(t,0,y)=0\ ;\quad \frac{\partial u(t,0,y)}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial T(t,0,y)}{\partial y}=\frac{\partial C_j(t,0,y)}{\partial y}=0. \qquad (12)$$

В предположении, что длина канала Y достаточно велика ($Y / X >> 1$) и вблизи границы $y = Y$ течение и тепломассообмен стабилизируются, граничные условия при $y = Y$ принимаются в виде:

$$\frac{\partial W^s}{\partial x^s}\approx 0\ ,\ W = u, \mathrm{v}, T, C_j, \psi, \omega;\ s = 1,2,...\ . \qquad (13)$$

С целью обеспечения более высокой точности решения для периода установления течения и теплообмена целесообразно дополнительно использовать уравнения баланса массы для каждого из компонентов системы:

$$\int_0^Y C_j(t,0,y)u(t,0,y)dy\ -\int_0^X C_j(t,x,Y)v(t,x,Y)dx\ +$$

$$+\int_0^X C_j(t,x,0)v(t,x,0)dx\ -$$

$$-\int_0^Y C_j(t,X,y)u(t,X,y)dy\ =0. \qquad (14)$$

Если в некоторой граничной точке B_0 значение функции тока есть ψ_0, то ее значение ψ_1 в точке B_1 на той же границе определяется через интеграл по контуру области

$$\psi_1=\psi_0+\int_{B_0}^{B_1}\left(udy-vdx\right), \qquad (15)$$

где компоненты u и v вектора скорости на границах области считаются заданными.

Граничные условия для уравнения переноса вихря (1) в таком виде, как, например, для уравнения переноса энергии, отсутствуют. В работе [5] сделан анализ различных способов нахождения $\omega_{\text{гр}}$ в данной точке граничной поверхности через значения функции тока в отдельных точках нормали к этой поверхности. Ниже излагается способ нахождения $\omega_{гр}$ на граничных поверхностях, которые могут быть не координатными, а также для случая неортогональных сеток. В качестве граничного условия для (1) используется уравнение

$$\omega_{гр} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big|_{гр} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big|_{гр}\ , \tag{16}$$

которое вытекает из (4). Предполагается, что для произвольной точки граничной поверхности задан вектор скорости жидкости, а также для одной или нескольких внутренних точках, расположенных в ее окрестности, известны значения функции тока ψ. При этих условиях правая часть уравнения (16) определяется с использованием разложения функции ψ в указанных внутренних точках в ряд Тейлора. Для частного случая, когда нормаль к граничной поверхности параллельна оси x, $v_{гр} = v$, $u_{гр} = u$, $\psi_{гр} = \psi(x, y) = \psi_0$, $\psi(x + \Delta x_1, y) = \psi_1$, функция $\omega_{гр}$ может быть найдена с погрешностью порядка Δx_1 следующим образом. Согласно первому из условий (5) $\partial^2\psi/\partial y^2\big|_{гр} = \partial u/\partial y\big|_{гр}$. Производная $\partial^2\psi/\partial x^2\big|_{гр}$ находится из разложения функции $\psi(x+\Delta x_1, y)$ в ряд Тейлора по степеням Δx_1. Оставляя в ряду три первых члена и учитывая второе из условий (5), находим, что $\partial^2\psi/\partial x^2\big|_{гр} = 2\,(\psi_1 - \psi_0 + v_{гр}\Delta x_1)\,/\,\Delta x_1{}^2 + O\,(\Delta x_1)$. Таким образом, выражение для определения $\omega_{гр}$ с погрешностью порядка $O\,(\Delta x_1)$ принимает вид

$$\omega_{гр} = \frac{2(\psi_1 - \psi_0 + v_{гр})}{\Delta x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{гр}\ . \tag{17}$$

Для нахождения более точного значения $\omega_{гр}$ с погрешностью порядка $O\,(\Delta x^2)$ достаточно дополнительно задать еще для одной точки нормали значение функции тока $\psi(x + \Delta x_2, y) = \psi_2$. Тогда, удерживая в разложениях в ряд функций $\psi(x + \Delta x_1, y)$ и $\psi(x + \Delta x_2, y)$ четыре первых члена и комбинируя этими разложениями, получаем

$$\omega_{гр} = 2\,\frac{\varphi^3\psi_1 - \psi_2 - (\varphi^3 - 1)\psi_0 + (\varphi^2 - 1)\varphi v_{гр}\Delta x_1}{\varphi^2(\varphi - 1)\Delta x_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{гр},$$

$$\varphi = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\ . \tag{18}$$

Когда граничная поверхность не параллельна координатной плоскости или разностная сетка не является ортогональной, следует считать, что внутренние узловые точки, которые находятся в окрестности данной граничной точки, не лежат на нормали к граничной поверхности. В таких случаях нахождение значения $\omega_{гр}$ осуществляется в такой последовательности. Строится декартова система координат с началом в рассматриваемой граничной узловой точке P_0. Одна из осей координат направлена вдоль внутренней нормали η к граничной поверхности в точке P_0, а вторая – вдоль касательной . В окрестности P_0 выбирается некоторое число S узловых точек P_s с координатами η_s, τ_s ($_s = 1,2,...,S$), которые связаны с координатами x и y этих точек в исходной системе координат соотношениями:

$$\eta_s = \left[x(P_s) - x(P_0)\right]\cos(\eta,\mathrm{x}) + \left[y(P_s) - y(P_0)\right]\sin(\eta,\mathrm{x})\,,$$

$$\tau_s = -\left[x(P_s) - x(P_0)\right]\sin(\eta,\mathrm{x}) + \left[y(P_s) - y(P_0)\right]\cos(\eta,\mathrm{x})\,.$$

Для каждой из точек P_s функция тока ψ_s выражается через значения функции и ее производные по координатам η, τ в точке P_0 путем разложения в ряд Тейлора, в котором удерживается некоторое конечное число членов. Если вектор скорости V на границах области является заданным, то для точки P_0 его проекции V_η и V_τ, а также их производные вдоль касательной τ, следует считать известными величинами. Это позволяет при помощи соотношений $\partial\psi/\partial\eta = V_\tau$, $\partial\psi/\partial\tau = -V_\eta$, $\partial^2\psi/\tau\partial{}^2 = -\partial V_\eta\,/\,\partial\tau$, аналогичных (5), выразить часть из входящих в разложения производных от функции ψ в точке P_0 через компоненты скорости V_η и V_τ. Далее в результате варьирования преобразованных разложений находится выражение для производной $\partial^2\psi\,/\,\partial\eta^2\big|_{P_0}$, а затем по уравнению $\omega_{P_0} = \partial^2\psi\,/\,\partial\eta^2\big|_{P_0} + \partial^2\psi\,/\,\partial\tau^2\big|_{P_0}$ и значение $\omega_{гр} = \omega_{P_0}$. Для нахождения $\omega_{гр}$ с погрешностью порядка $O(\Delta\eta_1 + \Delta\tau_1)$ достаточно располагать значением функции тока $\psi(\eta + \Delta\eta_1, \tau + \Delta\tau_1) = \psi_1$ в одной точке с координатами $\eta + \Delta\eta_1$ и $\tau + \Delta\tau_1$. Из разложения функции ψ_1 в ряд Тейлора по степеням $\Delta\eta_1$ и $\Delta\tau_1$, в котором удерживаются члены, содержащие производные от функции ψ по координатам η и τ не выше второго порядка, после соответствующих преобразований находим выражение

$\partial^2\psi / \partial\eta^2|_{P_0}$ в функции от ψ_0, ψ_1, V_η и V_τ. После подстановки значений $\partial^2\psi / \partial\eta^2|_{P_0}$ и $\partial^2\psi / \partial\tau^2|_{P_0}$ в уравнение для функции тока находим

$$\omega_{P_0} = \frac{2}{\Delta\eta_1^2}\left[\psi_1 - \psi_0 + \Delta\eta_1 V_\tau\Big|_{P_0} - \Delta\tau_1 V_\eta\Big|_{P_0} - \frac{1}{2}\left(\Delta\eta_1^2 + \Delta\tau_1^2\right)\frac{V_\eta}{\partial\tau}\Big|_{P_0} + \Delta\eta_1\Delta\tau_1\frac{\partial V_\tau}{\partial\tau}\Big|_{P_0}\right]. \quad (19)$$

Для случая непроницаемой неподвижной стенки, когда $V_\eta|_{\text{гр}} = V_\tau|_{\text{гр}} = 0$, полученное выражение переходит в известную формулу Тома [5].

Для определения ω_{P_0} с погрешностью порядка $O(\Delta\eta^2 + \Delta\tau^2)$ в разложении функции ψ требуется удерживать члены, содержащие производные от функции ψ по координатам η и τ до третьего порядка. Такое разложение имеет три неизвестные функции – $\partial^2\psi / \partial\eta^2|_{P_0}$, $\partial^3\psi / \partial\eta^3|_{P_0}$ и $\partial^3\psi / (\partial\eta^2\partial\tau)|_{P_0}$, поэтому в окрестности точки P_0 необходимо выбрать три внутренних точки. В результате комбинирования разложений функции тока для этих точек вначале находится $\partial^2\psi / \partial\eta^2|_{P_0}$, а затем и ω_{P_0}.

$$\omega_{P_0} = \sum_{s=1}^{3} b_s\left[(\psi_s - \psi_0) + \Delta\eta_s V_\tau - \Delta\tau_s V_\eta - \frac{\Delta\tau_s^2}{2}\frac{\partial V_\eta}{\partial\tau} + \Delta\eta_s\Delta\tau_s\frac{\partial V_\tau}{\partial\tau} - \frac{\Delta\tau_s^3}{6}\frac{\partial^2 V_\eta}{\partial\tau^2} + \frac{\Delta\eta_s}{2}\Delta\tau_s^2\frac{\partial^2 V_\tau}{\partial\tau^2}\right],$$

где $b_1 = 1/\left[(a_{11} - a_{13}a_{31}/a_{33}) + (a_{12} - a_{13}a_{32}/a_{33}) \times (a_{21} - a_{23}a_{31}/a_{33})/(a_{32} - a_{23}a_{32}/a_{33})\right]$;

$b_2 = -b_1(a_{21} - a_{23}a_{31}/a_{33})/(a_{22} - a_{23}a_{32}/a_{33})$;

$b_3 = -b_1 a_{31}/a_{33} - b_2 a_{32}/a_{33}$;

$a_{1s} = \Delta\eta_s^2/2$; $a_{2s} = \Delta\eta_s^3/6$; $a_{3s} = \Delta\eta_s^2\Delta\tau_s/2$; s=1,2,3.

Разностный метод расчета тепломассообмена в канале

Реализация системы уравнений (1)–(5) возможна на базе численных методов. Решение уравнений переноса вихря (1), энергии (2) и массы (3), содержащих конвективные члены, проводится на основе явной трехслойной пересчетной разностной схемы [6]. В соответствии с этим каждому дифференциальному уравнению переноса ставится в соответствие два разностных, и искомая функция на каждом временном слое вычисляется в двух приближениях.

Разностные уравнения для первого приближения аппроксимируют неполное уравнение переноса, в котором сохраняются только конвективные члены и временная производная. Разностные уравнения для определения искомой функции во втором приближении строится путем аппроксимации всех членов исходного дифференциального уравнения переноса.

На сетке

$$\begin{aligned} &x_i = x_{i-1} + h_{x,i-1},\ i = 1,2,\ldots,I,\ x_0 = x',\ x_I = x'', \\ &y_m = y_{m-1} + h_{y,m-1},\ m = 1,2,\ldots,M,\ y_0 = y',\ y_M = y'', \quad (20) \\ &t_n = t_{n-1} + l_n,\ n = 1,2,\ldots,\ l_n > 0,\ t_0 = 0, \end{aligned}$$

разностные уравнения, которые служат для определения приближенных значений W_{im}^n функций $W(t_n, x_i, y_m)$, $W = \omega$, T, C_j, и аппроксимируют уравнения (1)–(3) с погрешностью $O(l_n + h_{xi}^2 + h_{ym}^2)$, имеют вид

$$\delta_t\bar{\omega} + \delta_x(u\omega) + \delta_y(v\omega) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\omega_{im}^{n+1} - \omega}{l_n}(1 + \theta_\omega) - \frac{\omega - \omega_{im}^{n-1}}{l_{n-1}}\theta_\omega + \delta_x(u\bar{\omega}) + \delta_y(v\bar{\omega}) = \frac{1}{\text{Re}}\left(\delta_{xx}\bar{\omega} + \delta_{yy}\bar{\omega}\right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}\left(g_y\delta_x\bar{T} - g_x\delta_y\bar{T}\right) + \sum_j \frac{\text{Gr}_{dj}}{\text{Re}^2}\left(\frac{g_y}{g}\delta_x\bar{C}_j + \frac{g_x}{g}\delta_y\bar{C}_j\right), \quad (22)$$

$$\delta_t\bar{T} + \delta_x(uT) + \delta_y(vT) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{T_{im}^{n+1} - T}{l_n}(1 + \theta_T) - \frac{T - T_{im}^{n-1}}{l_{n-1}}\theta_T + \delta_x(u\bar{T}) + \delta_y(v\bar{T}) = \frac{1}{\text{Re}\,\text{Pr}}\left(\delta_{xx}\bar{T} + \delta_{yy}\bar{T}\right), \quad (24)$$

$$\delta_t\bar{C}_j + \delta_x(uC_j) + \delta_y(vC_j) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{C_{jim}^{n+1}-C}{l_n}(1+\theta_j)-\frac{C_j-C_{jim}^{n-1}}{l_{n-1}}\theta_j+\delta_x(u\bar{C}_j)+$$

$$+\delta_y(v\bar{C}_j)=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Sc}}\left(\delta_{xx}\bar{C}_j+\delta_{yy}\bar{C}_j\right). \qquad (26)$$

В разностных уравнениях (21)–(26) сеточные функции W_{im}^n, $\bar{W}_{im}^{n+1}$ ($W=u$, v, T, C_j, ψ, ω) для узловой точки (x_i, y_m, t_n) записаны для простоты без индексов, т.е. $W = W_{im}^n$, $\bar{W} = \bar{W}_{im}^n$; θ – весовой множитель, который позволяет устранить ограничение на шаг по времени, обусловленное диффузионными членами в уравнениях (1)–(3), $\theta \ge 0$;

$$\delta_t\bar{W}=\frac{\bar{W}_{im}^{n+1}-W_{im}^n}{l_n};\ \delta_x W=\frac{W_{i+1,m}^n-W_{i-1,m}^n}{x_{i+1}-x_{i-1}};$$

$$\delta_{xx}W=\left[\frac{W_{i+1,m}^n-W_{im}^n}{x_{i+1}-x_i}-\frac{W_{im}^n-W_{i-1,m}^n}{x_i-x_{i-1}}\right]/\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right).$$

Необходимые условия устойчивости решения разностных уравнений (21)–(26) находятся при помощи метода условного задания некоторых искомых функций системы [1]. При $\theta_{\gamma im}^n=0$, $\gamma=\omega$, T, C, когда уравнения (22), (24), (26) являются двухслойными, шаг по времени l_n^0 выбирается исходя из следующего условия устойчивости численного решения

$$l_n^0 \le \min\{l_V, l_\omega, l_T, l_C\}, \qquad (27)$$

где $l_V=\left(u_{im}^n/h_{xi}+v_{im}^n/h_{ym}\right)^{-1}$;

$l_\omega=\left[2\left(1/h_{xi}^2+1/h_{ym}^2\right)/\mathrm{Re}\right]^{-1}$;

$l_T=\left[2\left(1/h_{xi}^2+1/h_{ym}^2\right)/(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr})\right]^{-1}$;

$l_C=\left[2\left(1/h_{xi}^2+1/h_{ym}^2\right)/(\mathrm{Re}\,Sc)\right]^{-1}$. Если $l_V > l_\gamma$, то благодаря параметру $\theta_{\gamma im}^n$ можно выбрать более крупный шаг $l_n > l_n^0$ в соответствии с условием $l_V \ge l_n > l_\gamma$, $\gamma=\omega$, T, U. При этом параметр $\theta_{\gamma im}^n$ находится по условиям, которые обеспечивают устойчивость решения уравнений (21)–(26):

$$\theta_{\gamma im}^n=(l_n/l_\gamma-1)/2,\ l_n/l_\gamma>1,$$
$$\theta_{\gamma im}^n=0,\ l_n/l_\gamma\le 1. \qquad (28)$$

Уравнение для функции тока (4) решается на каждом временном слое n методом установления с использованием явной трехслойной разностной схемы [6]. На сетке, отличающейся от (20) тем, что вместо реального времени t_n вводится дискретная переменная $t_k = t_{k-1} + l_k$ (k = 1,2,..., $l_k > 0$, $t_0 = 0$), разностная аппроксимация уравнения (4) с погрешностью порядка $l_k + h_{xi}^2 + h_{ym}^2$ записывается следующим образом:

$$\frac{\psi_{im}^{k+1}-\psi_{im}^k}{l_k}\left(1+\theta_{\psi im}^k\right)-\frac{\psi_{im}^k-\psi_{im}^{k-1}}{l_{k-1}}\theta_{\psi im}^k=$$

$$=\delta_{xx}\psi_{im}^k+\delta_{yy}\psi_{im}^k-\omega_{im}^{n+1}, \qquad (29)$$

где $\theta_{\psi im}^k$ – весовой параметр, $\theta_{\psi im}^k \ge 0$. После произвольного выбора шагов l_k, h_{xi}, h_{ym}, определяются значения весового параметра $\theta_{\psi im}^k$ в соответствии с условиями устойчивости уравнения (14)

$$\theta_{\psi im}^k=\left(l_k/l_\psi-1\right)/2,\quad l_k>l_\psi,$$
$$\theta_{\psi im}^k=0,\quad l_k\le l_\psi, \qquad (30)$$

причем $l_\psi=\left[2\left(1/h_{xi}^2+1/h_{ym}^2\right)\right]^{-1}$. Результаты численных экспериментов показали, что минимальные затраты машинного времени на установление решения для функции тока достигаются при значении параметра $\theta_{\psi im}^k$ = 2...2,5. Ему отвечает пяти-шестикратное увеличение временного шага по сравнению с максимальным шагом для обычной явной двухслойной разностной схемы. Процесс установления решения (14) считается завершенным, если удовлетворяется условие $\sum_i\sum_m\left(\psi_{im}^{k+1}-\psi_{im}^k\right)/l_k\le\Delta$, где – малое положительное число. В этом случае полагается, что $\psi_{im}^{n+1}=\psi_{im}^k$. Следует отметить, что поскольку изменение последнего члена в правой части уравнения (29) в течение одного временного шага имеет порядок l_k, число итераций для установления решения уравнения (29) является незначительным. В качестве начального приближения, отвечающего значению $k=0$, принимается $\psi_{im}^k=\psi_{im}^n$.

Составляющие вектора скорости u_{im}^{n+1} и v_{im}^{n+1} определяются по разностным уравнениям, вытекающим из соотношений (5):

$$u_{im}^{n+1} = \delta_y \psi_{im}^{n+1}, \quad v_{im}^{n+1} = -\delta_x \psi_{im}^{n+1}. \tag{31}$$

Численное решение задачи течения и тепломассопереноса в канале проводится в такой последовательности. На временном слое $n = 0$ значения искомых сеточных функций u, v, T, C_j, ψ, ω определяются условиями (7) и соотношениями (5). Если для момента $t = 0$ функции $u_н$, $v_н$, $\psi_н$, $\omega_н$ равны нулю, а $T_н$ и $C_{jн}$ постоянные величины, то

$$u_{im}^0 = v_{im}^0 = \psi_{im}^0 = \omega_{im}^0 = 0, \; T_{im}^0 = T_н,$$

$$C_{j\,im}^{\,0} = C_{jн}. \tag{32}$$

Предположим, что значения сеточных функций для временных слоев $1,2,...,n$ уже найдены и требуется определить их для слоя n. Вначале по разностным уравнениям (21), (23), (25) вычисляются предварительные значения функций $\overline{\psi}_{im}^{n+1}$, $\overline{T}_{im}^{n+1}$ и $\overline{C}_{j\,im}^{\,n+1}$ во внутренних узловых точках $i = 1,2,...,I-1$; $m = 1,2,...,M-1$, причем $x_0 = 0, x_I = X$, $y_0 = 0$, $y_M = Y$. В граничных узловых точках принимается

$$\overline{\psi}_{im}^{n+1} = \psi_{im}^n, \quad \overline{T}_{im}^{\,n+1} = T_{im}^n, \quad \overline{C}_{jim}^{\,n+1} = C_{jim}^n. \tag{33}$$

Далее по уравнениям (22), (24) и (26) находятся окончательные значения сеточных функций ψ_{im}^{n+1}, T_{im}^{n+1} и C_{jim}^{n+1} во внутренних узловых точках.

Функции u_{0m}^{n+1}, v_{0m}^{n+1}, T_{0m}^{n+1}, C_{j0m}^{n+1} в узловых точках входного сечения ($m = 0$) канала определяются согласно (8) и (25):

$$W_{i0}^{n+1} = W_0(t_{n+1}, x_i), \quad W = v,\ T,\ C_j; \;\; u_{0m}^{n+1} = 0;$$

$$\psi_{i+1,0}^{n+1} = \psi_{i,0}^{n+1} - (v_{i+1,0}^{n+1} + v_{i,0}^{n+1}) h_{xi}/2. \tag{34}$$

В узлах на проницаемой стенке ($i = I$) сеточные функции определяются по разностным аппроксимациям уравнений (9)–(11), (15):

$$v_{I,m}^{n+1} = 0; \; u_{I,m}^{n+1} = \sum_j G'^{n+1}_{j,m}) / \sum_j C_{j,I,m}^n, \; C_{j,I,m}^{n+1} =$$

$$\left(C_{j,I-1,m}^{n+1} + G'^{n+1}_{jm} h_{xI} \operatorname{Re} Sc\right) / \left(1 + u_{I,m}^{n+1} h_{xI} \operatorname{Re} Sc\right),$$

$$T_{I,m}^{n+1} = T'^{n+1}_{m}, \quad \psi_{I,m+1}^{n+1} = \psi_{I,m}^{n+1} + (u_{I,m+1}^{n+1} + u_{I,m}^{n+1}) h_{ym}/2,$$

$$m = 1,2,...,M. \tag{35}$$

В узлах, лежащих в плоскости симметрии канала $(i = 0)$, согласно (12)

$$W_{0,m}^{n+1} = W_{1,m}^{n+1}, \quad W = v,\ T,\ C_j; \; u_{0,m}^{n+1} = \omega_{0,m}^{n+1} = 0. \tag{36}$$

В узлах выходного сечения ($m = M$) сеточные функции находятся на базе условий (12) при $s = 1$ и (15):

$$W_{i,M}^{n+1} = W_{i,M-1}^{n+1}, \quad W = u,\ v,\ T,\ C_j;$$

$$\psi_{i+1,M}^{n+1} = \psi_{i,M}^{n+1} - (v_{i+1,M}^{n+1} + v_{i,M}^{n+1}) h_{xi}/2, \; i = 1,2,...,I-1. \tag{37}$$

Повышение точности решения на основе уравнения баланса массы (14) может быть достигнуто следующим образом. Найденные согласно (37) значения продольных скоростей v рассматриваются как их первое приближение $\overline{v}_{i,M}^{n+1}$, $i = 1,2,...,I$. Они используются для нахождения (с использованием, например, формулы трапеций) приближенного расхода жидкости $\overline{G}_M$ через сечение $m = M$. Точное значение расхода через это сечение находится по уравнению (14). Окончательные значения скоростей $v_{i,M}^{n+1}$ находятся по уравнению

$$v_{i,M}^{n+1} = \overline{v}_{i,M}^{n+1} \frac{G_M}{\overline{G}_M}. \tag{38}$$

Значение $\psi_{i,M}^{n+1}$ определяется по последнему уравнению системы (37).

Нахождение искомых функций на слое $n + 1$ завершается вычислением функции вихря ω в граничных узловых точках по соотношениям, которые получены путем аппроксимации уравнений вида (13) и (17):

$$\omega_{i,0}^{n+1} = -(v_{i+1,0}^{n+1} - v_{i-1,0}^{n+1}) / (h_{i-1} + h_i) +$$

$$+ 2(\psi_{i,1}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n+1} - u_{i,0}^{n+1} h_{y0}) / h_{y0}^2,$$

$$\omega_{i,M}^{n+1} = 2\omega_{i,M-1}^{n+1} - \omega_{i,m-2}^{n+1}, \quad \omega_{0,m}^{n+1} = 0, \tag{39}$$

$$\omega_{I,m}^{n+1} = -(u_{I,m+1}^{n+1} - v_{I,m-1}^{n+1}) / (h_{y,m-1} + h_{y,m-1}) +$$

$$+ 2(\psi_{I-1,m}^{n+1} - \psi_{I,m}^{n+1} - u_{I,m}^{n+1} h_{I-1}) / h_{I-1}^2.$$

Для задач естественной конвекции в областях с непроницаемыми стенками алгоритм решения упрощается, поскольку в этом случае для граничных узловых точек $u = v = \psi = 0$.

Как показали численные эксперименты, начиная с некоторого числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}'$, после переходных фаз начального периода возникает нестационарность решения. Если не применять процедуру сглаживания численного решения, то при дальнейшем увеличении числа Re, когда его значение превысит предельную величину $\mathrm{Re}^* > \mathrm{Re}'$, происходит нарушение устойчивости решения. Последнее выражается в том, что скорость и другие характеристики процесса стремятся к бесконечности. Значение Re* при достаточно большом числе узловых точек пространственной разностной сетки находится в соответствии с критическим числом Рейнольдса, начиная с которого режим течения и тепломассообмена становится турбулентным.

При изучении турбулентных режимов конвекции обычно мгновенные значения скорости, температуры концентрации представляются суммами их средних значений и отклонений от средних значений, называемых пульсациями.

Исследования турбулентных режимов конвекции обычно базируются на предложении Рейнольдса об усреднении уравнений Навье-Стокса, в соответствии с которым мгновенные значения скорости, давления, плотности и температуры представляются суммами их средних и пульсационных значений.

При этом исходные уравнения Навье-Стокса с использованием некоторых дополнительных условий, называемых постулатами Рейнольдса, преобразуются в уравнения относительно осредненных значений искомых функций. В последних в выражения для тензора напряжений включаются члены, зависящие от пульсационных составляющих скорости, давления, плотности и температуры. Эти уравнения оказываются незамкнутыми. Чтобы их замкнуть требуется установление взаимосвязи между характеристиками осредненного и пульсационного переносов. Обычно вместо истинных значений кинематических коэффициентов вязкости, теплопроводности и диффузии D в уравнения течения и тепломассообмена подставляются их эффективные значения $\nu_{эф} = \nu + \nu_т$, $\lambda_{эф} = \lambda + \lambda_т$ и $D_{эф} = D + D_т$, причем $\nu_т \geq 0$, $\lambda_т \geq 0$ и $D_т \geq 0$ и их определение связано с необходимостью использования большого объема эмпирической информации. Это обстоятельство приводит к снижению достоверности и универсальности получаемых результатов расчетов турбулентной конвекции.

Для численного решения задач естественной конвекции при значительных числах Re ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$) в работе [4] предлагается другой подход. Он базируется непосредственно на уравнениях Навье-Стокса с константами переноса, которые не зависят от режима течения, и методе торможения скоростей изменения искомых функций ω, T, C в некоторых узловых точках области, в которых эти скорости превышают допустимые значения с физической точки зрения и по условиям устойчивости решения. Необходимость операции торможения скоростей обусловлена следующим обстоятельством. Проблемы возникновения неустойчивости при численном решении уравнений Навье-Стокса и при протекании физического процесса конвекции, когда значения чисел Пекле или Рейнольдса достаточно велики, имеют общие черты. Однако, при возникновении численной неустойчивости значение, например, скорости жидкости стремится к бесконечности, тогда как во всех реальных процессах течения и тепломассообмена все физические параметры потока (скорость, температура, концентрация компонентов), как и их временные производные, остаются ограниченными (например, скорость течения не может достигнуть скорости света). Устранение указанного несоответствия в характере развития неустойчивости может быть достигнуто путем наложения на временные производные от функций ω, T, C, ψ в некоторых узловых точках области, в которых эти скорости превышают допустимые по условиям устойчивости значения, ограничения следующего вида:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A_W \frac{\partial W}{\partial t} \Big/ \left|\frac{\partial W}{\partial t}\right|, \quad \text{если} \quad \left|\frac{\partial W}{\partial t}\right| > A_W,$$
$$W = \omega, \psi, T, C. \tag{40}$$

Здесь A_W – положительная величина, которая может быть выбрана исходя из требования минимизации числа узловых точек B_W, в которых на временном слое в момент установления решения реализуется согласно (40) коррекция скорости $\partial W / \partial t$, $W =, \psi$, T, C.

Процедура торможения скоростей может рассматриваться как отвод избыточной энергии в некоторых точках рассматриваемой области. Эта энергия в реальных системах переходит в энергию турбулентных пульсаций, масштаб которых меньше масштаба разностной сетки, и поэтому они не могут проявиться при численном решении. Таким образом, можно считать, что процедура торможения скоростей изменения функций ω, ψ, T, C позволяет исключить из рассмотрения мелкомасштабные турбулентные пульсации.

Результаты численного моделирования

Результаты численного решения непосредственно уравнений Навье-Стокса при числах Рейнольдса, отвечающих ламинарному режиму течения, хорошо согласуются с известными экспериментальными данными. При более высоких значениях Re возникает необходимость применения процедуры торможения скоростей изменения искомых функций в соответствии с условием (40).

Как показали численные эксперименты, величина A_W слабо зависит от числа узловых точек пространственной сетки $B = I \cdot M$ и числа Re. Это обстоятельство позволяет выбирать A_W неизменной в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса. С увеличением числа Re при прочих неизменных условиях величина B_W возрастает, причем практически во всех случаях выполняется условие $B_\omega > B_T > B_C$. При расчете турбулентного переноса относительное число $b_W = B_W / B$ узлов, в которых осуществляется коррекция скорости, вначале достаточно быстро растает, а затем, достигнув максимума, монотонно снижается и в дальнейшем стабилизируется. Как видно из таблицы, при дроблении шагов разностной сетки величина b_ω, отвечающая моменту стабилизации решения, монотонно снижается. По мере уменьшения шагов разностной сетки все более мелкомасштабные вихри оказываются учтенными при численном решении уравнений (1)–(5) и это дает основание полагать, что способ торможения скоростей на достаточно мелкой сетке позволяет получать решение уравнений Навье - Стокса для турбулентного течения и тепломассообмена с высокой степенью точности.

На базе изложенного численного метода проведено решение задачи течения и тепломассообмена парогазовой смеси в плоском щелевом канале $-X < x < X$ и вдуве пара через проницаемые стенки в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса. Условия однозначности были приняты симметричными относительно средней плоскости щели. Вдоль оси y разностная сетка принималась равномерной. В поперечном направлении сетка сгущается вблизи стенок канала. Сгущение носит ступенчатый характер. На каждой ступени размер шага остается неизменным. В направлении к стенке канала на каждой последующей ступени шаг вдвое меньше, чем на предыдущей. Это позволяет сохранить второй порядок погрешности аппроксимации относительно шагов пространственной разностной сетки для всех узловых точек.

На рис. 1 представлены для сопоставления зависимости Nu от Re при Pr = 1 для каналов с непроницаемыми стенками, построенные на базе численного решения, по эмпирическому уравнению [2]

Значения b_ω в зависимости от числа Re и минимального относительного шага $\bar{h}_{\min} = \min(h_i)/X$.

Re	$\bar{h}_{\min} \cdot 10^3$		
	0,567	0,2835	0,14175
$1 \cdot 10^4$	0,0024	0,0008	0
$5 \cdot 10^4$	0,0332	0,0184	0,0021
$1 \cdot 10^5$	0,3917	0,0824	0,0042
$5 \cdot 10^5$	0,5153	0,0119	0,0049
$1 \cdot 10^6$	0,772	0,5086	0,0084
$2 \cdot 10^6$	0,8956	0,6723	0,5210
$1 \cdot 10^7$	0,9680	0,9421	0,9242

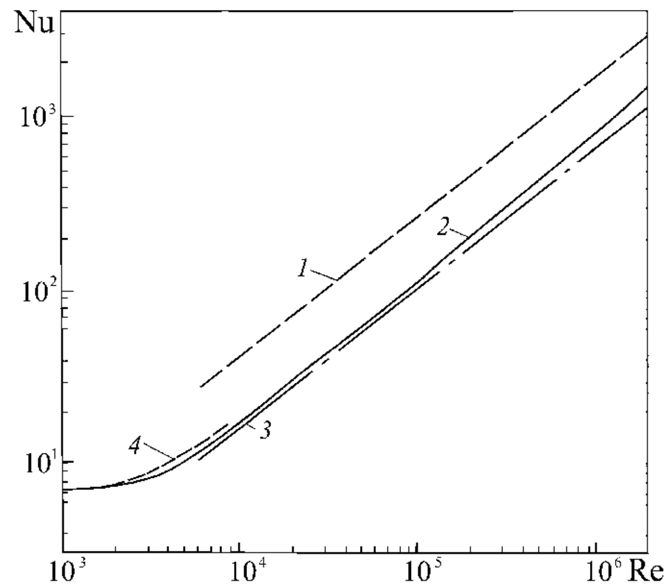

Рис. 1. Зависимость числа* Nu *от числа* Re *при* Pr = 1 *для каналов с непроницаемыми стенками: 1 – расчет по формуле (34) для круглой трубы; 2 – результаты численного решения для плоского щелевого канала; 3 – расчет по (35) для кольцевого канала; 4 – расчет по (36) для щелевого канала.

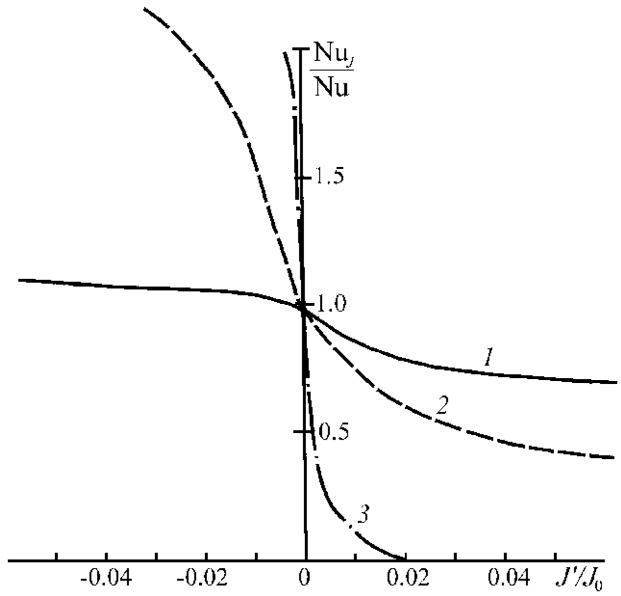

***Рис. 2. Зависимости относительного числа Нуссельта* $\mathrm{Nu}_J / \mathrm{Nu}$ *от относительной плотности потока массы* J' / J_0 *через проницаемую стенку при различных числах Рейнольдса: 1 –* Re = 10^3; *2 –* 10^4; *3 –* 10^5.**

$$\mathrm{Nu} = 0{,}021\mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}^{0,43}, \qquad (41)$$

для круглой трубы, по эмпирическому уравнению [2]

$$\mathrm{Nu} = 0{,}017\mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}^{0,4}(d_2 / d_1)^{0,18} \text{ при } d_э = d_2 - d_1 \text{ и } d_2 / d_1 \to 1 \qquad (42)$$

для кольцевого канала, по приближенному аналитическому решению для щелевого канале с непроницаемыми стенками при заданном параболическом профиле скорости [7]:

$$\mathrm{Nu} = 1{,}85(\mathrm{Pe}\, d_э/Y_к)^{1/3}, \quad \mathrm{Pe}d_э/L > 70;$$
$$\mathrm{Nu} = 7{,}50, \quad \mathrm{Pe}d_э/L < 70, \qquad (43)$$

где Pe = RePr; $d_э = 4X$ – эквивалентный диаметр щели. Как видно из рисунка, представленные зависимости удовлетворительно согласуются. Исходя из результатов численного моделирования на рис. 2 показано, как изменяется относительное число Нуссельта $\mathrm{Nu}_J / \mathrm{Nu}$ (где Nu_J – число Нуссельта при $J' = \sum_j J'_j \neq 0$, а Nu – при $J' = 0$) в зависимости от относительной плотности потока массы J'/J_0 через проницаемую стенку. Видно, что возрастание плотности вдуваемого пара приводит к уменьшению числа Nu_J, а возрастание плотности отсасываемого газа – к его увеличению.

Выводы

1. Результаты проведенных вычислительных экспериментов свидетельствуют о том, что разработанные математическая модель и численный метод расчета позволяют рассчитать процессы течения и тепломассообмена в канале с проницаемыми стенками при различных режимах течения жидкости.

2. Сопоставление результатов численных и физических экспериментов свидетельствуют о том, что применяемая в работе процедура торможения скоростей изменения функции вихря, функции тока, температуры и концентрации компонентов дает возможность непосредственно на базе уравнений Навье-Стокса с константами переноса, которые не зависят от режима течения, удовлетворительно описать тепломассоперенос при переходном и турбулентном режимах течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никитенко Н.И.* Теория тепломассопереноса. Киев: Наук. думка, 1983.
2. *Теория* тепломассообмена. Под редакцией А. И. Леонтьева. М.: МГТУ им. Баумана. 1997.
3. *Никитенко Н.И.* Сеточный метод расчета течения и теплообмена вязкой несжимаемой жидкости. // ИФЖ. 1986. Т. 50, N 3. С. 476 – 482.
4. *Никитенко Н.И., Кольчик Ю.Н., Сороковая Ю.Н.* Метод канонических элементов для моделирования гидродинамики и тепломассообмена в областях произвольной формы. // ИФЖ. 2002. Т. 75, N 6. С. 74–80.
5. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
6. *Никитенко Н.И.* Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. Киев: Наук. думка, 1988.
7. *Исаченко В.П., Осипова В.А, Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981.

Получено 15.11.2005 г.

УДК 536.24:697.32

Басок Б.И., Демченко В.Г., Мартыненко М.П.

Институт технической теплофизики НАН Украины

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АЭРОДИНАМИКИ В ТОПКЕ ВОДОГРЕЙНОГО КОТЛА СО ВТОРИЧНЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ

Розглянуто числове моделювання аеродинаміки в топці водогрійного котла. Наведено поля векторів швидкості та тиску в різні моменти часу. Обговорено результати проведеного числового дослідження.

Рассмотрено численное моделирование аэродинамики в топке водогрейного котла. Представлены поля векторов скорости и давления в различные моменты времени. Обсуждены результаты проведенного численного исследования.

The numerical modeling of aerodynamic at hot-water boiler furnace is considered. Fields of magnitude velocity and pressure at different time moment are presented. The results of relevant numerical data are discussed.

C – константы;
D – диаметр топочной камеры;
d – диаметр;
G_k – генерация турбулентной кинетической энергии, обусловленная градиентом средней скорости;
H – длина топочной камеры;
h – глубина погружения горелки;
K – отношение расхода газов, идущих на повторный дожог к расходу газа в горелке;
k – кинетическая энергия турбулентности;
L – геометрический параметр, включающий перемещение огневой трубы относительно жаровой, изменение глубины погружения горелки и ширину плоскости выхода;
l – расстояние от трубы излучателя до фронтальной стенки котла;
p – статическое давление;
t – время;
u – скорость;
x –координата;
α – коэффициент избытка воздуха;
ε – скорость диссипации;
μ – коэффициент эффективной вязкости;
ρ – плотность;
σ – число Прандтля;
τ – касательное напряжение.

Индексы

k – обусловленное кинетической энергией турбулентности;