

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ВО ВНУТРЕННИХ СИСТЕМАХ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ВТОРЫХ ОДНОТОЧЕЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МОМЕНТОВ

Рассматриваются несколько версий моделей переноса рейнольдсовых напряжений (ПРН-моделей), предназначенных для расчета развивающихся течений вязких сред в трубах и каналах с малыми числами Рейнольдса (Сима, Ханжалика-Лаундера, Элгобаши), а также ПРН-L - модель с уравнением для интегрального масштаба турбулентных пульсаций L. Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными показывает, что учет влияния стенки в членах высшего порядка модели турбулентности обеспечивает приемлемую точность решения. Отмечаются достоинства и недостатки представленных ПРН - моделей. Расчеты показывают, что наиболее эффективными в описании внутренних течений выступают ПРН-L- и ПРН-ε- модели (версия Элгобаши).

Some versions of Reynolds Shear Stresses models (RSS-models) intended for calculation of developing flows of viscous media in pipes and channels with low-Reynolds-number (Shima, Hanjalic-Lauder, Elghobashi), and also RSS-L - model with the equation for integrated scale of turbulent pulsations L are considered. Comparison of results of calculation to experimental data shows, that the account of influence of a wall in members of the supreme order of turbulent model provides acceptable accuracy of the decision. Advantages and shortcomings of the given RSS-models are marked. Calculations show that the most effective in the description of internal flows appear RSS-L and Elghobashi's models.

$c_s, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_{\varepsilon 3}$ – постоянные модели турбулентности;

$C_{ij} = U_j \frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_j}$ – конвекция в RSS-модели турбулентности;

D – диаметр канала;

$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} [v \frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_j}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [c_s f_\mu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_l}]$ – диф-

фузия в RSS-модели турбулентности (формулировка Daly, Harlow);

f_μ, f_s – демпфирующие функции модели турбулентности;

k – кинетическая энергия турбулентности;

L – интегральный масштаб турбулентности;

$\overline{U_i}$ – осредненные компоненты вектора скорости;

$\overline{u'_i u'_k}$ – напряжения Рейнольдса;

U, V, u', v' – осевая и радиальная осредненная и пульсационная компоненты вектора скорости соответственно;

$P_{ik} = -(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}), P = -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l}$ – скорость

порождения напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности соответственно;

R_{ij} – член перераспределения в RSS-модели турбулентности;

Re, Re_t – молекулярное и турбулентное число Рейнольдса соответственно;

Tu – интенсивность турбулентности;

x, y, z – декартовы координаты;
 ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2\varepsilon}{3k} [(1-f_s)\sigma_{ik}k + \frac{3}{2}(\overline{u'_i u'_k})f_s] - \text{ скорость диссипации в RSS- модели турбулентности. (формулировка Элгобаши);}$$

пации в RSS- модели турбулентности. (формулировка Элгобаши);

ρ, ν – плотность, кинематическая вязкость соответственно;

RSS – Reynolds Shear Stresses;

ПРН-модель – модель переноса рейнольдсовых напряжений;

Введение

Предсказание структуры турбулентного потока в элементах технических систем представляет актуальную задачу для различных отраслей промышленности. Анализ литературы показывает [1-7], что в расчете реальных внутренних течений с тепломассообменом наиболее популярны многопараметрические ПРН- модели турбулентности. Однако такие модели недостаточно апробированы для широкого диапазона изменений условий течения, включающих отрыв, присоединение, реламинаризацию, химические реакции в среде и нуждаются в предварительном тестировании на точность и эффективность моделирования явлений переноса. В связи с этим в настоящей работе поставлены цели: 1) адаптировать различные версии моделей замыкания рейнольдсовых напряжений к оценке развивающихся турбулентных течений в каналах; 2) утвердиться в достоинствах представленных ПРН-моделей в расчете анизотропных пристеночных течений; 3) оценить их замыкающие аппроксимации с целью развить универсальную форму модели. Для анализа выбраны хорошо известные в расчетах внутренних течений версии ПРН-моделей турбулентности с ε -базой (Ханжалика [5], Сима [6], Элгобаши [7]) и редко используемая ПРН-модель с L-уравнением Г.С. Глушко [10].

Математическая модель течения

Общая система уравнений, описывающая турбулентный теплообмен при движении вязких

M1 – модель Ханжалика-Лаундера;

M2 – модель Сима;

M3-модель Элгобаши.

Индексы:

0 – характерные значения для входного сечения;

w – величины на стенке;

k – параметры в области выхода;

t – турбулентный режим;

' – пульсационная величина;

– – временное осреднение по Рейнольдсу;

i, j, k – соответствуют направлению декартовой системы координат.

сред в каналах произвольного поперечного сечения, включает уравнения: неразрывности, осредненные уравнения Навье-Стокса, энергии, переноса рейнольдсовых напряжений ε -базой. Из соображений простоты и ограниченности формулировки задачи используется тензорная и символическая форма записи определяющих уравнений [10]. Общий вид ПРН-модели турбулентности следующий:

$$C_{ik} = D_{ik} + P_{ik} + R_{ik} - \varepsilon_{ik} \quad (1)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [c_s f_\mu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + c_{\varepsilon 3} \nu \frac{k}{\varepsilon} f_\mu \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_l} \quad (2)$$

Особенности формулировок замыкающих соотношений для модели турбулентности. M1-модель Ханжалика-Лаундера [5]

Данная модель – обобщенная версия модели [8], рекомендованная для потоков с высокими числами Рейнольдса – имеет следующие представления:

$$R_{ik} = R_{ik,1} + R_{ik,2} + R_{ik,w}, \quad R_{ik,1} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} a_{ij}, \quad (3)$$

$$R_{ik,2} = -\frac{(c_2 + 8)}{11} (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) - \frac{(8c_2 - 2)}{11} (D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) -$$

$$-\frac{(30c_2 - 2)}{55} k (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}); \quad (4)$$

$$R_{ik,w} = [c_3 \frac{\varepsilon}{k} a_{ij} + c_4 (P_{ij} - D_{ij})] f_w \left(\frac{l}{x_n} \right), \quad (5)$$

$$f_w = \frac{k^{1.5}}{\varepsilon x_n}, c_1 = 1,5, c_2 = 0,4, c_3 = 0,125, c_4 = 0,015,$$

$$a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k, D_{ij} = -(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}). \quad (6)$$

Для диссипативного уравнения принято:

$$f_s = (1 + 0,1 \text{Re}_t)^{-1}, \text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, c_\varepsilon = 0,15, \\ c_{\varepsilon 1} = 1,275, c_{\varepsilon 2} = 1,8, c_{\varepsilon 3} = 2,0, \quad (7)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right)^2, f_\varepsilon = 1,0 - \left(\frac{0,4}{1,8} \right) \exp\left(-\frac{\text{Re}_T^2}{36}\right), \\ f_\mu = \exp\left(-\frac{3,4}{(1 + \text{Re}_t/50)^2}\right). \quad (8)$$

М2-модель Сима [6]

С целью улучшения возможностей М1 в предлагаемой модели модифицирована постоянная c_1 в (3):

$$R_{ik,1} = -c_1^* \frac{\varepsilon}{k} a_{ij}, c_1^* = c_1 [1 - (1 - \frac{1}{c_1}) f_w], \\ f_w = \exp[-(c_w \text{Re}_{ts})^4], \quad (9)$$

где $c_w = 0,015$, $\text{Re}_{ts} = \frac{\sqrt{k} x_n}{\nu}$. Член “быстрых изменений” $R_{ij,2}$ оставлен согласно (4). Член, определяющий влияние стенки на перераспределение, определяется следующим образом:

$$R_{ij,w} = [c_{s1} (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) + c_{s2} k (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})] f_w, \quad (10)$$

где $c_{s1} = 0,45$, $c_{s2} = 0,08$. Моделирование турбулентной диффузии представляется, как и М1, согласно [5] ($c_s = 0,11$). В качестве замыкающего уравнения в М2 используется уравнение (2) вида

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}) +$$

$$+ c_{\varepsilon 1} (1 + c_{\varepsilon 3} f_w) \frac{\varepsilon}{k} P - \\ - c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + [(-2 + \frac{7}{9} c_{\varepsilon 2}) \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2k}] f_w, \quad (11)$$

где $c_\varepsilon = 0,15$, $c_{\varepsilon 1} = 1,8$, $c_{\varepsilon 2} = 1,35$, $c_{\varepsilon 3} = 1,0$, $f_\varepsilon = 1 - 0,22 \exp(-0,028 \text{Re}_t^2)$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i^2}$.

М3-модель Элгобаши [7]

Здесь диффузия турбулентности определяется по [9] ($c_s = 0,22$). При аппроксимации ε_{ij} особенности реального поведения нормальных напряжений учитываются видом

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\varepsilon}{k} f_s (1 - \delta_{ij}). \quad (12)$$

ε – уравнение в М3 имеет вид (2) со следующими постоянными и демпфирующими функциями:

$$c_\varepsilon = 0,15, c_{\varepsilon 1} = 1,45, c_{\varepsilon 2} = 1,9, c_{\varepsilon 3} = 2,0, \\ f_\varepsilon = 1 - a_1 \exp(-a_2 \text{Re}_t^2), \\ a_1 = 1 - \frac{1,4}{c_{\varepsilon 2}}, a_2 = 0,028, f_\mu - \text{определяется по (8)} \quad (13)$$

Моделирование перераспределяющего члена выполнено аналогично (3)-(5), где для $R_{ij,w}$ принято $c_3 = 0, c_4 \cong 0,123, c_5 = 0,003, f_\mu = \exp(-c_5 \text{Re}_{ts})$.

В случае ПРН-L-модели замыкание системы определяющих уравнений проводится с привлечением уравнений переноса кинетической энергии турбулентности k и интегрального масштаба турбулентных пульсаций L вида [10]:

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \frac{\partial k}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} [c_s f_\mu \frac{L}{\sqrt{k}} \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial k}{\partial x_i}] + \\ + P - c_d \frac{k^{1.5}}{L}; \quad (14)$$

$$U_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [\nu \frac{\partial L}{\partial x_j}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [c_s f_\mu \frac{L}{\sqrt{k}} \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial L}{\partial x_i}] + \\ + \left(c'_{L1} \frac{L}{k} P^{(r)} + c''_{L1} \frac{L}{k} P^{(i)} \right) + c_{Lf} c_{L2} k^{0.5} \left(1 - \frac{L^2}{s^2} \right), \quad (15)$$

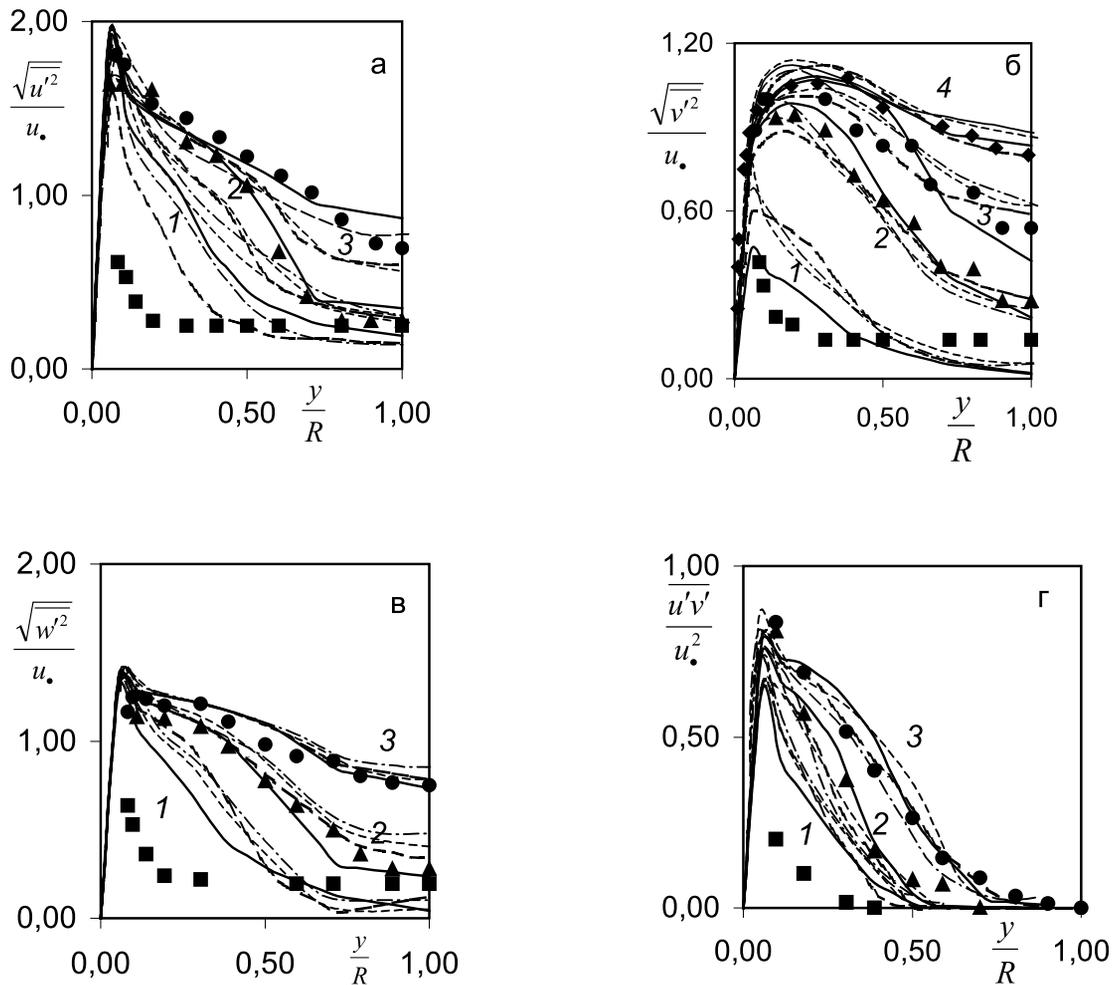


Рис. 1. Радиальные распределения реинольдсовых напряжений во входной области. Здесь линия- расчет (— — — — ПРН-L, — — — — M1, - - - - M2, — - - - — — M3), значки — данные[1,2]: 1- $x/D=20$, 2-30, 3-50, 4-150.

где $P = P^{(r)} + P^{(i)}$; $P^{(r)}$, $P^{(i)}$ — касательная и нормальная составляющая P .

Значения постоянных ПРН-L-модели турбулентности можно найти в [10]. Численное интегрирование проводится с использованием экономичных неявных конечно-разностных схем, схем расщепления по физическим процессам и независимым переменным со вторым порядком точности аппроксимации производных относительно шагов по пространственным переменным на неравномерных сетках со сгущением узлов в пристеночной области по логарифмическому закону.

Обсуждение результатов

Расчеты выполнены при следующих параметрах: $Re = (0,1...8) \cdot 10^5$, $D = 0,007...0,1m$, $x_k = 150D$,

$Tu = (0,4...10)\%$, рабочее тело — воздух, вода. Отдельные результаты расчетов и сравнения с опытными данными [1-3, 11, 12] представлены на рис.1. Расчет поля осредненной скорости показывает незначительное отличие данных, полученных по различным моделям. Это неудивительно, т.к. все они предназначены для предсказания развивающихся внутренних течений. Однако в области $40 \leq x/D \leq 80$ как у оси, так и у стенки имеется некоторое рассогласование, связанное с большей чувствительностью ПРН- ϵ -моделей к возмущениям. Кроме того, ни одна из ПРН- ϵ -моделей не предсказывает большой максимум k/u_*^2 достаточно точно, что является их общим недостатком в описании течений с малыми числами Рейнольдса.

Отличие с опытными данными в области непосредственного входа связано с ограниченнос-

тью экспериментальных данных (отсутствуют значения ε , k , $u'_i u'_j$ на входе). В расчетах предпочтительнее выглядят модели ПРН-L, ПРН- ε (М3). Модель М1 весьма груба в определении нормальных компонент у стенки (особенно $\overline{u'^2}$). Модель М2 занижает большой максимум на участке стабилизированного течения на 12%, завышает максимум $\overline{v'^2}$ на 40% относительно данных [1]. Использование L-уравнения [10] в ПРН-модели позволяет наиболее точно раскрыть пристеночную зону течения.

Выводы

Из результатов следует, что отличие моделей в ядре канала незначительно. Это говорит о слабом влиянии способа аппроксимации $R_{ij,2}$ в данных моделях. У стенки М2, М3 близки, поэтому аппроксимация $R_{ij,w}$ в таких моделях достаточно успешна в описании прямоочных течений. В сравнении с ПРН-L- моделью все модели с ε -уравнением имеют недостаток в оценке $\overline{u'^2}$. Последняя характеристика имеет определяющее значение в пристеночном распределении кинетической энергии турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Laufer J.* The structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow // *NACA*. – 1954. Rep. 1174. P. 1–18
2. *Веске Д.Р., Стуров Г.Е.* Экспериментальное исследование турбулентного закрученного потока в цилиндрической трубе// *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н.* – 1972. – Вып.3. №13. – С. 3–7.
3. *Richman J.W., Azad R.S.* Developing Turbulent Flow in Smooth Pipes// *Appl. Sci. Res.* – 1973. – V.28. – P. 419–426.

4. *Турбулентные сдвиговые течения 1/* Под ред. Ф. Дурста и др. М.: Машиностроение. 1982. – 432с.

5. *Hanjalic K., Launder B.E.* Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence// *Journal of Fluid Mechanics.* – 1976. – V.74. – P. 593–610.

6. *Сума Н.* Модель напряжений Рейнольдса для течения в пристеночных областях с низкими числами Рейнольдса// *Теоретические основы инженерных расчетов.* – 1988. – №4. – С. 241–251.

7. *Prudhomme M., Elghobashi S.* Prediction of Wall-Bounded Turbulent Flows with an Improved Version of a Reynolds-Stress Model // *Proceedings 4th Symposium on Turbulent Shear Flows, Karlsruhe.* – 1987. – P. 1.7–1.12

8. *Launder B.E., Reece G.J., Rodi W.* Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure// *Journal of Fluid Mechanics.* – 1975. – V. 68. – P. 573–566.

9. *Daly B.J., Harlow F.H.* Transport Equations of Turbulence// *Physics of Fluids.* – 1970. – V. 13. – P. 2634–2649.

10. *Бубенчиков А.М., Харламов С.Н.* Математические модели неоднородной анизотропной турбулентности во внутренних течениях. – Томск: Изд.-во ТГУ, 2001. – 448с.

11. *Grutzner H.* Über einige Ergebnisse der Untersuchung einer turbulenten Rohreinlaufstromung bei ungestörter und gestörter Zustromung. Beitrage zur theoretischen und experimentellen Untersuchung der Turbulenz. Herausgeg.V.M.Hoffmeister. Akademic- Verlag Berlin. 1976.

12. *Барбин, Джоунс.* Турбулентное течение на начальном участке гладкой трубы// *Техническая механика.* – 963. – №1. – С. 34–41.