УДК 621.926

Авдеева Л.Ю.[1], Драганов Б.Х.[2]

[1]*Институт технической теплофизики НАН Украины*
[2]*Национальный аграрный университет*

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА СМЕШЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

Наведено метод аналізу якості змішування двох компонентів, що грунтується на положеннях теорії випадкових процесів.

Приведен метод анализа качества смешения двух компонентов, основанный на положениях теории случайных процессов.

We propose a method for the analysis of the quality of mixing of two components, based on the postulates of the theory of random processes.

σ^2 – предельная величина дисперсии;
S^2 – опытные значения дисперсии;
$P_{x1}(t)$ – переходная вероятность того, что через промежуток времени t случайная величина $X_1(t)$ примет значение $x_1(t)$;
$F(t, x, y)$ – переходная плотность вероятностей, учитывающая время и координаты диффундирующих частиц;
μ – коэффициент пропорциональности, характеризующий максимальное количество частиц составляющего A, которое к моменту времени t не вошло в ассоциаты смеси AB;
$m_{x1x2}(t)$ – первый начальный момент (математическое ожидание) совместного распределения двух дискретных случайных величин $x_1(t)$ и $x_2(t)$;
$m_{x1}(t, l), m_{x2}(t, l)$ – математическое ожидание числа объединений частиц A и B в смеси в момент t в сечении смесителя на расстоянии l;
$F(m_{x1}, m_{x2})$ – изменение математического ожидания распределения двух дискретных случайных величин x_1 и x_2 под действием некоторого силового поля.

Смешение нескольких сред представляет собой случайный процесс, заключающийся в перераспределении компонентов с целью получения определенного рода смеси.

В большинстве случаев при исследовании процесса смешения исходят из случайного характера распределения компонентов. Поэтому мерой качества полученной системы должны быть параметры, характеризующие распределение случайных величин – концентраций компонентов. Как правило, используют числовые характеристики законов распределения концентрации: дисперсию, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации и т.д. Некоторые авторы [1, 2] для оценки качества смешения используют критерий, основанный на сравнении величины статистической вариации, полученной экспериментальным путем, с вариацией системы со случайным распределением определяющего признака. При этом принимается, что характер распределения концентраций в случайной смеси определяется предельной величиной дисперсии σ^2. Полученные опытные значения дисперсии S^2 сравниваются с σ^2. Если отношение $M = \sigma^2/S^2$, называемое модулем смешения, близко к единице, считается, что рассматриваемая смесь является гомогенной.

Как указывается в [3, 4], для оценки качества смешения предпочтительны те методы, которые основываются на отношениях дисперсий и среднеквадратичных отклонений. Заметим, что в теории случайных процессов [4–6] выборочные статики в виде моментов распределений играют решающую роль.

Рассмотрим двухкомпонентную смесь, образующуюся в результате взаимодействий двух объединений частиц компонентов А и В по схеме:

$$A + B \to AB. \qquad (1)$$

Примем, что образование смеси соответствует случайному марковскому процессу. Обозначим через $X_1(t)$ и $X_2(t)$ случайные величины, характеризующие количество объединений из составляющих A и B в момент времени t в объеме смесителя, а через $x_1(t)$ и $x_2(t)$ те целочисленные значения ($x_i \geq 1$), которые эти случайные величины могут принимать. Вероятность того, что случайная величина $X_1(t)$ примет значение $x_1(t)$, обозначим через $P_{x1}(t)$. Следовательно $P_{x1}(t) = P\,\{X_1(t) = =x_1(t)\}$, где $x_1 = 1, 2, \ldots .$

Примем предположение, что при наличии иммиграции и эмиграции смешиваемых частей (частиц) компонентов образование смеси соответствует марковскому простому процессу гибели частиц. В таком случае вероятность P_{x1} перехода в состояние $x_1 - 1$ за счет гибели популяции за время t, $t+\Delta t$ пропорциональна произведению чисел объединений частиц A и B в момент времени t, равному $h_{x1} = x_1\, x_2$, с коэффициентом пропорциональности μ. Отсюда следует

$$\frac{d}{dt}\sum_{x_1=1}^{x^*} x_1 P_{x1}(t) = -\mu \sum_{x_1=1}^{x^*} h_{x1} P_{x1}(t)\ . \qquad (2)$$

В этом уравнении сумма в левой части выражает математическое ожидание дискретной случайной величины $x_1(t)$ — число объединений частиц A, т.е.

$$\sum_{x_1=1}^{x^*} x_1 P_{x1}(t) = m_{x1}(t)\ . \qquad (3)$$

Учитывая, что по определению $h_{x1} = x_1\, x_2$ и случайные величины $x_1(t)$ и $x_2(t)$ характеризуются одним законом распределения вероятностей, уравнение (3) преобразуется к виду:

$$\sum_{x_1=1}^{x^*} h_{x1} P_{x1}(t) = \sum_{x_1,x_2=1}^{x^*} x_1 x_2 P_{x1}(t) = m_{x1x2}(t)\ . \qquad (4)$$

Первый начальный момент $m_{x1\ x2}\ (t)$ можно выразить через математические ожидания $m_{x1}\ (t)$, $m_{x2}\ (t)$ и корреляционный момент $x_1(t)$ и $x_2(t)$ [7]:

$$\operatorname{cov}[x_1(t)x_2(t)] = \sum_{x_1x_2=1}^{x^*} [m_{x1}(t) -$$
$$- x_1(t)][m_{x2}(t) - x_2(t)]P_{x1}(t)\ . \qquad (5)$$

Корреляционный момент (ковариация) x_1 и x_2 характеризует их совместное распределение в момент времени t.

При работе смесителя наблюдать за изменением числа групп частиц невозможно. Представляли интерес изменения моментов распределения, через которые выражается качество смеси:

$$\frac{\partial m_{x1}(t,l)}{\partial t} = -\frac{\lambda \partial^2 m_{x1}(t,l)}{\partial t^2} + F(m_{x1}, m_{x2})\ . \qquad (6)$$

Условием, гарантирующим существование случайного процесса $X(t)$ с непрерывной вероятностью 1 реализации, имеющего заданные конечномерные распределения, является условие Колмогорова [8], которое формируется следующим образом: для случайного процесса $X(t)$, определенного на интервале $[a, b]$, условия таковы, что при некоторых $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $C < \infty$ для всех довольно малых τ выполняется неравенство

$$E\,|\,X(t+\tau) - X(t)\,|^{\alpha} < C\,|\,\tau\,|^{1+\delta}\ . \qquad (7)$$

Дальнейшее развитие условия Колмогорова получило в процессе Орнштейна-Уленбека, являющимся однородным по времени марковским процессом диффузионного типа [9]. Процесс Орнштейна-Уленбека является одновременно стационарным случайным процессом, гауссовским процессом и марковским процессом. Используя теорию марковских процессов, возможно характеризовать переходную плотность вероятности $F(t, x, y)$, учитывающую случайные изменения рассматриваемой системы в зависимости от некоторого числа непрерывно меняющихся параметров (времени, координат и т. п.).

Изложенное представляет один из вариантов анализа процессов смешения двух компонентов. Особенностью анализа является то, что он основывается на методе случайных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vallentin F.N.* // Chem. – Ing. – Techn. – 1960. – Bd.32, № 5. – P. 343–349.

2. *Valdenbaum S.S.* Advances in Chimical Enginering 7 th. ed.N.Y.: Acad. press, 1958.

3. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Высш. школа, 1975. – 320 с.

4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 656 с.
5. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
6. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 225 с.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1977. – 832 с.
8. *Колмогоров А.Н.* // Успехи матем. наук. – 1938. – Т. 5. – С. 5–41.
9. *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.* // Phys. Rew., 1936. – V. 36. – P. 823–841.

Получено 12.05.2008 г.