

УДК 536.244

**БУРКА А.Л., ЕМЕЛЬЯНОВ А. А.***Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН***ТЕПЛООБМЕН В КОМПОЗИТНОМ ПОЛУПРОЗРАЧНОМ МАТЕРИАЛЕ С ПЛОТНОУПАКОВАННЫМИ МИКРОСФЕРАМИ**

Пропонується математична модель розрахунку температурного поля в напівпрозорому композитному матеріалі, що складається з поліметилметакрилата і щільноупакованих кварцових мікросфер. Дані за комплексним показником заломлення композиту використовуються для розрахунку за теорією *Mi* коефіцієнтів поглинання, розсіювання та ослаблення щільноупакованих частинок, які використовуються при вирішенні рівняння переносу для визначення інтенсивності випромінювання.

Предложена математическая модель расчета температурного поля в полупрозрачном композитном материале, включающем матрицу из полиметилметакрилата и плотноупакованные кварцевые микросферы. Данные по комплексному показателю преломления композита используются для расчета по теории *Mi* коэффициентов поглощения, рассеяния и ослабления плотноупакованных частиц, которые используются при решении уравнения переноса для определения интенсивностей излучения.

The mathematical model for calculation of the temperature field in a semi-transparent material of polymethylacrylate and close-packed hollow quartz microspheres is suggested. Data on the complex refractive index of the composite allow derivation of absorption, scattering and attenuation coefficients by the *Mie* theory for the close-packed particles depending on particle concentration in the matrix.

$c$  – эффективная теплоемкость композита, Дж/кг·К;

$c_1$  – теплоемкость кварца, Дж/кг·К;

$c_2$  – теплоемкость полиметилметакрилата, Дж/кг·К;

$E$  – плотность потока излучения, Вт/м<sup>2</sup>;

$I_{\rho\nu}$  – функция Планка, Вт/м<sup>3</sup>стер;

$I_{\nu}^{\pm}$  – интенсивность излучения в прямом и обратном направлениях, Вт/м<sup>3</sup>стер;

$L$  – толщина слоя, м;

$N$  – число частиц в единице объема, 1/м<sup>3</sup>;

$p$  – индикатриса рассеяния;

$qR$  – радиус ядра сферической частицы, м;

$R$  – радиус сферической частицы, м;

$T$  – время, с;

$T^*$  – характерная температура, К;

$T_1^*, T_2^*$  – температуры внешних источников излучения, К;

$\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи на граничных поверхностях слоя, Вт/м<sup>2</sup>К;

$\gamma$  – поляризуемость вещества, м<sup>3</sup>;

$\varepsilon$  – степень черноты слоя композита;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – приведенные степени черноты границ слоя композита;

$\varepsilon_{1,2}''$  – степени черноты внешних источников излучения;

$\zeta$  – комплексная диэлектрическая проницаемость композита;

$\eta_1, \eta_2, \eta_m$  – диэлектрические проницаемости частицы, ядра и матрицы;

$\lambda$  – коэффициент эффективной теплопроводности композита;

$\lambda_E$  – коэффициент теплопроводности кварца, Вт/мК;

$\lambda_g$  – коэффициент теплопроводности полиметилметакрилата, Вт/мК;

$\rho$  – эффективная плотность композита, кг/м<sup>3</sup>;

$\rho_1$  – плотности кварца соответственно, кг/м<sup>3</sup>;

$\rho_2$  – плотности полиметилметакрилата, кг/м<sup>3</sup>;

$\sigma$  – объемный коэффициент рассеяния композита, 1/м;

$\sigma_s$  – постоянная Стефана – Больцмана, Вт/м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>;

$\vartheta$  – объемная концентрация частиц (фактор заполнения);

$\chi$  – объемный коэффициент поглощения композита, 1/м.

Полупрозрачные композиты относятся к числу перспективных современных материалов. Особую значимость такие материалы приобретают в изделиях, где важную роль имеет перенос энергии за счет теплопроводности и излучения. Поэтому исследования влияния параметров составляющих композита на тепловые процессы являются актуальными. Одним из способов повышения, например, эффективности теплозащитных свойств является использование материалов содержащих малые частицы, рассеивающие тепловое излучение.

Композитный материал, состоящий из полых или сплошных кварцевых микросфер с характерным размером 10...50 мкм, введенный в полупрозрачную связующую матрицу, является эффективным средством теплозащиты в условиях радиационно-кондуктивного переноса тепловой энергии [1]. Тепловые потери с поверхности композитного материала включают в себя кондуктивную, конвективную и радиационную составляющие. Учет указанных потерь возможен при известном температурном распределении в слое этого материала. Решение задачи проводится в приближении сплошной среды с эффективными теплофизическими и оптическими свойствами. Температурные поля в слое материала находятся из решения краевой задачи для уравнения энергии и системы уравнений переноса излучения. Для решения системы уравнений переноса необходимо иметь данные о коэффициентах поглощения и рассеяния. В зависимости от концентрации частиц в матрице возникает взаимодействие между ними при прохождении радиационного потока энергии. Хорошо известно, что для невзаимодействующих частиц коэффициенты сечения поглощения и рассеяния рассчитывают по теории Ми с использованием комплексных показателей преломления частиц и матрицы [2]. В случае ансамбля взаимодействующих частиц теория Ми приводит к ошибочным результатам расчетов этих коэффициентов. Для определения оптических свойств композитной среды при наличии взаимодействий используются ряд приближенных решений. В работе [1] расчет коэффициентов поглощения и рассеяния слоя композита осуществляется на основе приближения для двух взаимодействующих сферических частиц, расположенных на расстоянии равном диаметру частицы. Для ансамбля взаимодействующих частиц оптические свойства компо-

зита могут быть получены на основе приближений эффективной среды. В настоящей работе, используется приближение Максвелл-Гарнетта. Формула для расчета диэлектрической проницаемости композита  $\zeta$ , содержащего матрицу с диэлектрической проницаемостью  $\eta_m$  и сферических частиц с диэлектрической проницаемостью  $\eta_1$  записывается в виде [3].

$$(\zeta - \eta_m) / (\zeta + 2\eta_m) = \mathfrak{G} \gamma / R^3,$$

$$\text{где} \quad \mathfrak{G} = 4\pi R^3 N / 3, \quad \gamma = R^3 Z_1 / Z_2,$$

$$Z_1 = [(\eta_2 - \eta_m)(\eta_1 + 2\eta_2) + q^3(2\eta_2 + \eta_m)(\eta_1 - \eta_2)],$$

$$Z_2 = [(\eta_2 + 2\eta_m)(\eta_1 + 2\eta_2) + q^3(2\eta_2 - 2)(\eta_1 - \eta_2)].$$

Здесь рассматриваются сферические частицы с наружным радиусом  $R$  и ядром из другого вещества радиусом  $qR$  с диэлектрической проницаемостью  $\eta_2$ . Комплексный показатель преломления и комплексная диэлектрическая проницаемость композита связаны между собой на основании существующих фундаментальных закономерностей [4]. Полученные данные по комплексному показателю преломления композита используются для расчета коэффициентов поглощения и рассеяния ансамбля частиц, находящихся в матрице по теории Ми. Рассмотрим плоский слой композитного теплозащитного полупрозрачного материала из связующего полиметилметакрилата, содержащего кварцевые микросферы. При моделировании радиационного переноса в материале учитываются процессы поглощения, испускания и рассеяния теплового излучения.

Уравнение энергии с граничными условиями записывается в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - \frac{L}{\lambda_g T^*} \frac{\partial E}{\partial \xi}, \quad 0 < \xi < 1, \tau > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - N_1(\theta - \theta_1) = \varepsilon_1 S_t (\theta_1^{*4} - \theta^4), \quad \xi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + N_2(\theta - \theta_2) = \varepsilon_2 S_t - (\theta^4 - \theta_2^{*4}), \quad \xi = 1, \quad (3)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi), \quad (4)$$

$$S_i = \frac{\sigma T^3 L}{\lambda}$$

$$\theta = \frac{T}{T^*}; \xi = \frac{x}{L}; \tau = \frac{\lambda_g t}{\rho c L^2},$$

$$\theta_1^* = \frac{T_1^*}{T^*}; \theta_2^* = \frac{T_2^*}{T^*}; N_1 = \frac{\alpha_1 L}{\lambda_g}, N_2 = \frac{\alpha_2 L}{\lambda_g}.$$

Дивергенция плотности радиационного потока  $\frac{dE}{d\xi}$ , которая находится в уравнении (1), определяется из решения системы интегродифференциальных уравнений переноса энергии излучения [5] относительно интенсивностей  $I^+(\xi, \mu), I^-(\xi, \mu)$

$$\begin{aligned} I^+(\xi, \mu) &= \left[ I^+(0, \mu) + \frac{\chi L}{\mu} \int_0^\xi e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} I_b(T) dy + \frac{\sigma}{2} \frac{L}{\mu} \int_0^\xi e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} \int_0^1 F_1(y, \mu') d\mu' dy \right] \cdot e^{-\frac{\beta L \xi}{\mu}} \\ I^-(\xi, -\mu) &= \left[ I^-(1, \mu) + \frac{\chi L}{\mu} \int_\xi^1 e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} I_b(T) dy + \frac{\sigma}{2} \frac{L}{\mu} \int_\xi^1 e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} \int_0^1 F_2(y, \mu') d\mu' dy \right] \cdot e^{-\frac{\beta L \xi}{\mu}} \end{aligned} \quad (5)$$

имеет вид 
$$\frac{dE}{d\xi} = \chi \left[ 4\pi I_{\rho V} - 2\pi \int_0^1 (I^+(\xi, \mu) + I^-(\xi, \mu)) d\mu \right],$$

где 
$$F_1 = p(\mu, \mu') I^+(y, \mu) + p(\mu, -\mu') I^-(y, \mu'),$$
  

$$F_2 = p(-\mu, \mu') I^+(y, \mu') + p(-\mu, -\mu') I^-(y, \mu').$$

С помощью функции Грина

$$G(\xi, z) = -\frac{e^{F(\xi)}}{\lambda \Delta} \begin{cases} \left( 1 + N_1 \int_0^z e^{-F(z)} dz \right) \left( e^{-F(1)} + N_2 \int_\xi^1 e^{-F(z)} dz \right), & z \leq \xi \\ \left( 1 + N_1 \int_0^\xi e^{-F(z)} dz \right) \left( e^{-F(1)} + N_2 \int_z^1 e^{-F(z)} dz \right), & z \geq \xi \end{cases}$$

$$\Delta = N_2 + N_1 (e^{-F(1)} + N_2 \int_0^1 e^{-F(z)} dz),$$

являющейся решением однородной краевой задачи

$$\lambda(\xi) \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi} - N_1 G = 0, \quad \xi = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi} + N_2 G = 0, \quad \xi = 1.$$

Начально-краевая задача (1) – (4) о совместном переносе тепла теплопроводностью и радиацией в полупрозрачной среде свелась к нелинейному интегральному уравнению относительно безразмерной температуры  $\theta(\xi, \tau)$ , которое на каждом временном шаге решается итерационным методом Ньютона-Канторовича [6]

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \tau) &= G(\xi, 0) W_1(\tau) - \\ &- G(\xi, 1) w_2(\tau) + \int_0^1 W(z, \tau) G(\xi, z) dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь 
$$W(z, \tau) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{L}{T_*} \frac{\partial E}{\partial z},$$

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\lambda}{dz} \frac{dz}{\lambda};$$

$$W_1(\tau) = \varepsilon_1 S_t (\theta_1^{*4} - \theta^4) - N_1 \theta_1;$$

$$W_2(\tau) = -\varepsilon_2 S_t (\theta^4 - \theta_2^{*4}) + N_2 \theta_2;$$

$$\varepsilon_{1,2} = \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_{1,2}''} - 1 \right).$$

Степень черноты слоя композита  $\varepsilon$  определялась по формулам [7] с учетом зависимости комплексного показателя преломления от фактора заполнения  $\vartheta$ .

Эффективные значения плотности и коэффициента теплопроводности композита определялись по формулам [8].

$$\lambda = (1 - \vartheta) \frac{\lambda_E}{\lambda_g} + \vartheta$$

$$\rho = \rho_1(1 - \vartheta) + \rho_2 \vartheta,$$

$$c = c_1(1 - \vartheta) + c_2 \vartheta.$$

Расчеты проведены для композита, содержащего матрицу из полиметилметакрилата и кварцевые микросферы с наружным диаметром  $d=35\text{ мкм}$  и  $d=3,5\text{ мкм}$  и внутренними полостями диаметром  $qd$ , где  $q$  принимает значения 0; 0,5; 0,9. Спектральные данные по комплексному показателю преломления кварца и полиметилметакрилата взяты из [9,10]. Коэффициенты поглощения  $\chi$  и рассеяния  $\sigma$  композита рассчитаны по теории Ми с использованием комплексного показателя преломления, полученного из приближения Максвелл-Гарнетта, усреднялись по длинам волн и использовались для расчета интенсивностей. Расчеты нестационарных температурных полей в слое композита проводились при следующих значениях параметров:

$$\varepsilon_{1,2}'' = 1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К},$$

$$T^* = 1000 \text{ К},$$

$$L = 0,1 \text{ м},$$

$$\chi = 0,61316 \text{ м}^{-1},$$

$$\theta_0(\zeta) = 0,333,$$

$$\sigma = 1,994 \text{ м}^{-1},$$

$$\beta = \chi + \sigma,$$

$$\lambda_g = 0,196 \text{ Вт/м} \cdot \text{К},$$

$$\lambda_E = 0,343 \text{ Вт/м} \cdot \text{К},$$

$$c_1 = 783 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К},$$

$$c_2 = 1465 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К},$$

$$\rho_1 = 118,5 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_2 = 2200 \text{ кг/м}^3,$$

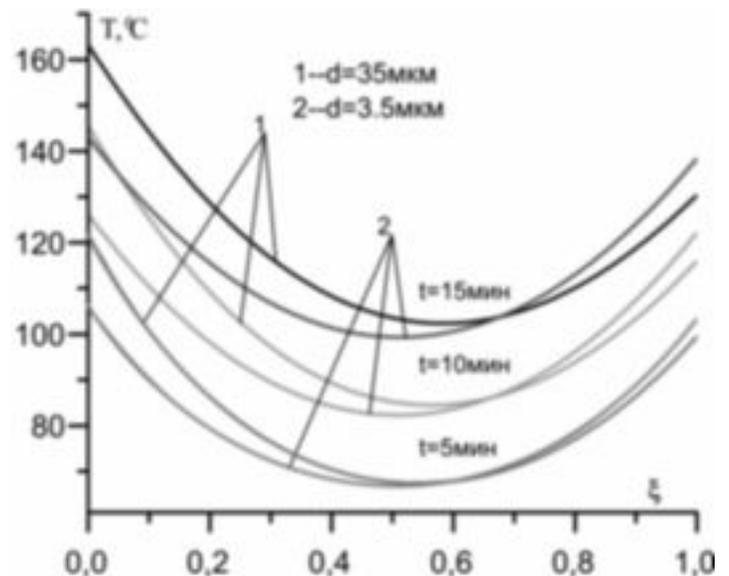
температуры источников внешнего излучения:

$$T_1^* = 500^0 \text{ C}, T_2^* = 300^0 \text{ C}.$$

При решении уравнения переноса использовался направленный вперед индикатор рассеяния Хеньи-Гринштейна [11] при  $b=0,5$

$$p(\mu\mu') = (1 - b^2) / \left\{ 1 + b^2 - 2b \left[ \mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \right] \right\}^{\frac{3}{2}}.$$

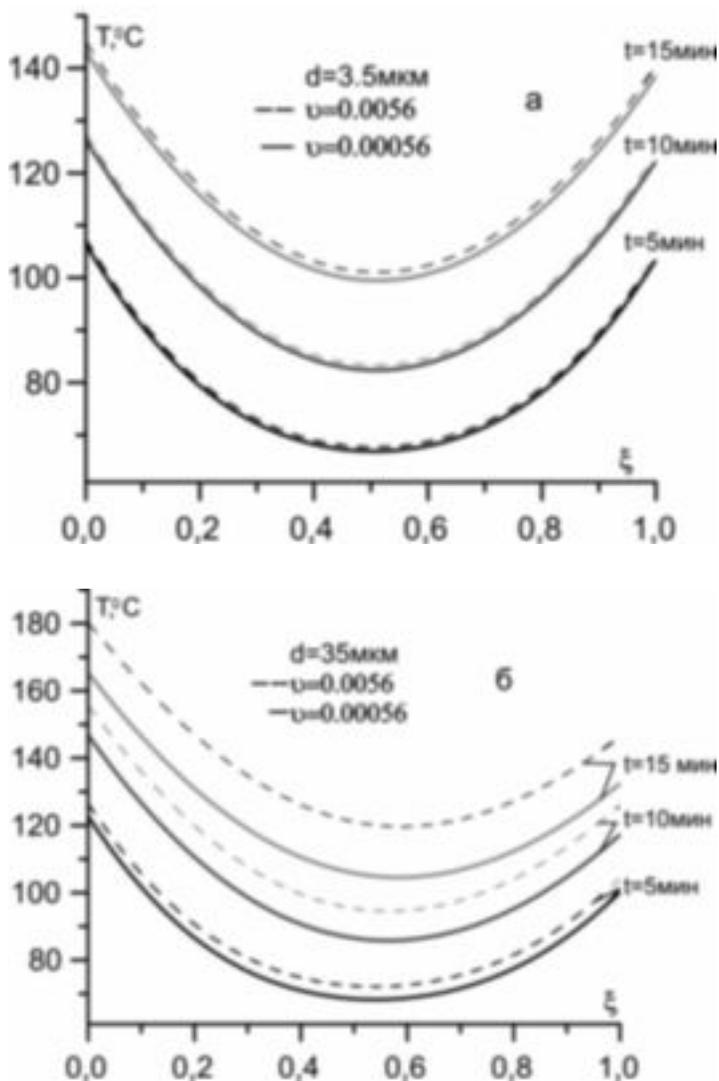
Основные результаты расчетов представлены на рисунках.



**Рис. 1. Температурное распределение в композитах, содержащих полые ( $q=0,9$ ) не взаимодействующие микросферы с внешними диаметрами  $d=3,5 \text{ мкм}$  и  $d=35 \text{ мкм}$ .**

Из рис. 1 видно, что величина внешнего диаметра микросферы заметно влияет на температурное распределение. В композите с малыми микросферами (кривые 2) практически отсутствует температурный перепад между горячей ( $\xi = 0$ ) и холодной ( $\xi = 1$ ) границами слоя, а в композите с большими микросферами (кривые 1) температурный перепад заметен и растет при нагреве. Кривые на рис.1

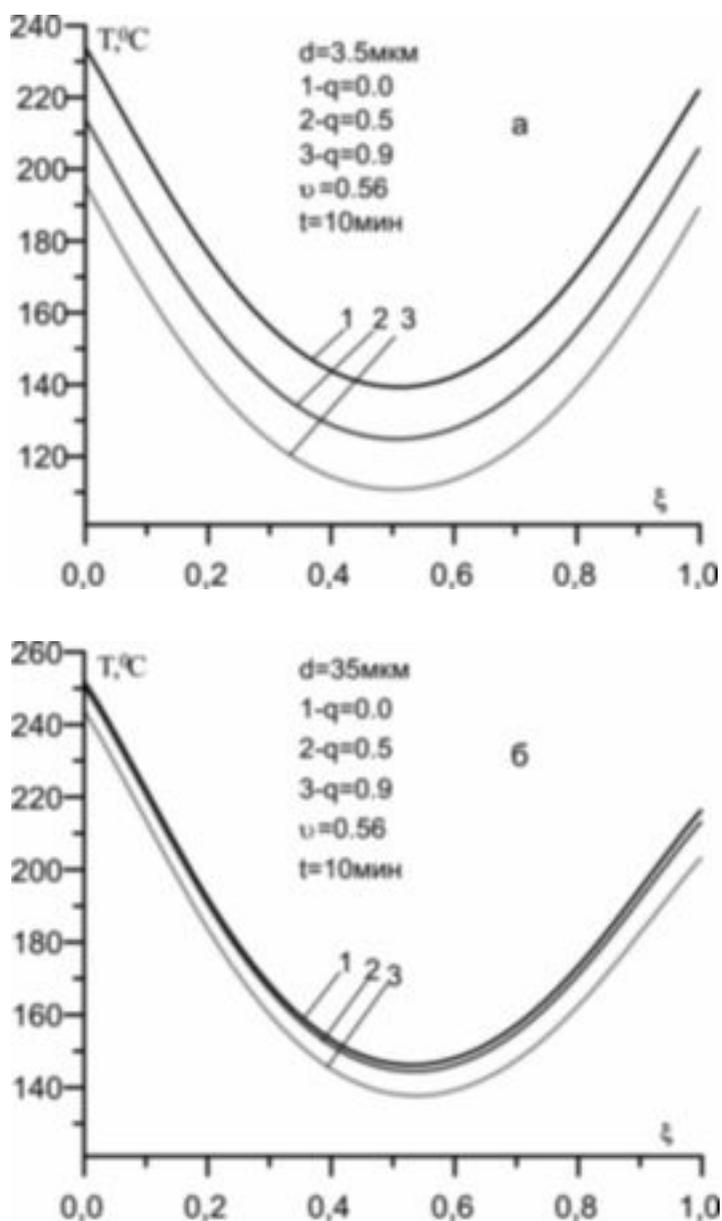
получены для факторов заполнения  $\vartheta = 5,6 \times 10^{-9}$ ;  $5,6 \times 10^{-8}$  видно, что фактор заполнения для таких концентраций не оказывает заметного влияния на температурное распределение в слое композита. Это означает, что микросферы в композите являются не взаимодействующими.



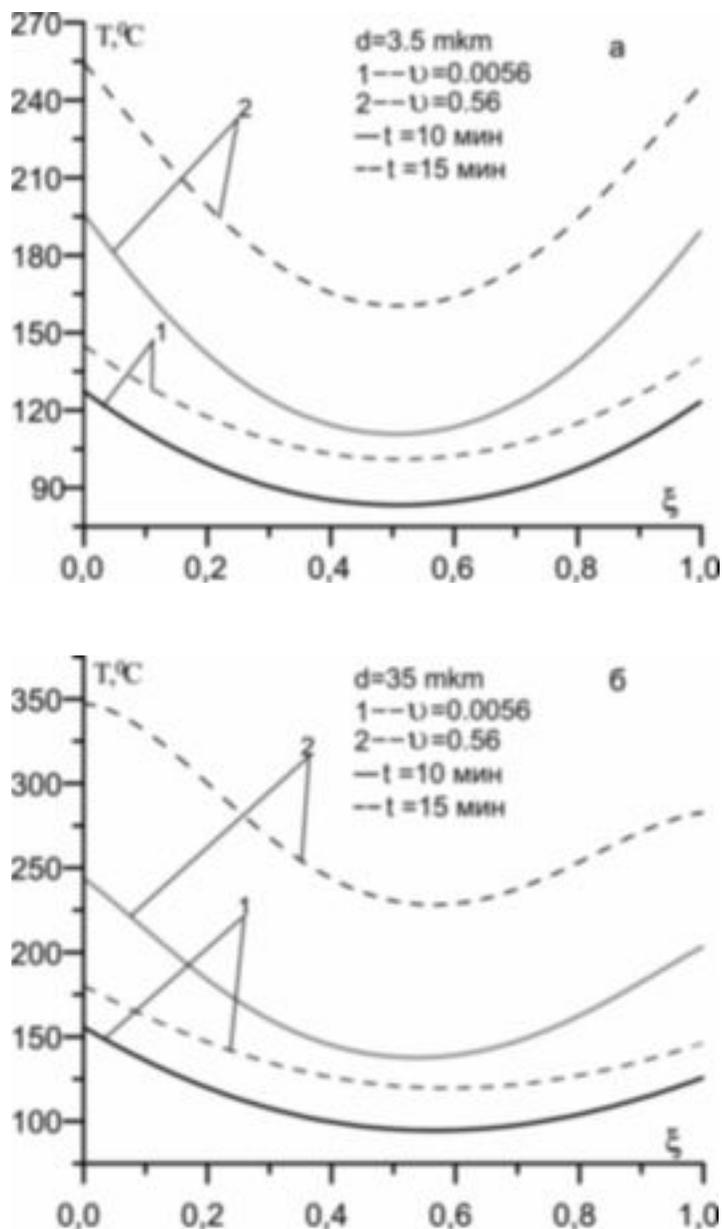
**Рис.2. Температурное распределение в композитах, содержащих полые ( $q=0.9$ ) взаимодействующие микросферы с внешними диаметрами  $d=3,5$  мкм и  $35$  мкм.**

Из рис. 2 видно, что при увеличении фактора заполнения до величины  $\vartheta=0,00056$  проявляется расслоение температурных кривых (рис. 2, б). Это связано с увеличением концентрации микросфер в композите, при которых возникает взаимодействие между ними. При более низких концентрациях влияние взаимодействия между частицами ослаб-

ляется в результате чего температурное расслоение практически не проявляется, что показано на рис. 1. Следует отметить, что влияние фактора заполнения заметно возрастает с увеличением размера частиц. Для микросферы с диаметром  $3,5$  мкм при концентрациях  $\vartheta=0,00056 \dots 0,0056$  отсутствует расслоение температурных кривых, а для микросферы  $35$  мкм расслоение заметно.



**Рис. 3. Температурное распределение при нагреве слоя композита ( $\vartheta = 0.56$ ), содержащим микросферы с внешними диаметрами (а–  $d=3,5$  мкм и б–  $d = 35$  мкм) и диаметрами ядра  $qd$  ( $q=0; 0,5; 0,9$ ).**



**Рис. 4. Влияние фактора заполнения на кинетику нагрева композита, содержащим микросферы с внешним диаметром 3,5 мкм и 35 мкм ( $q=0.9$ ).**

Из рисунков 3, а, б видно, что при нагреве композита, содержащего микросферы, влияние ядра на температурное распределение наиболее заметно для микросфер малого диаметра. Величина ядра микросферы замедляет темп нагрева слоя композита в большей степени для малых микросфер. Перепад температур между холодной и горячей границами существенно больший в композите с микросферами большого диаметра.

Из рисунков 4, а, б видно, что скорость нагрева композита, содержащего микросферы большего диаметра (рис. 4, б) заметно выше, чем для композита с малыми микросферами (рис. 4, а). Здесь также заметно, что для композита с микросферами малого диаметра перепад температур между горячей ( $\xi = 0$ ) и холодной ( $\xi = 1$ ) границами почти отсутствует, чего нельзя сказать о композите с микросферами большого диаметра. У композита, содержащего микросферы с внешним диаметром  $d = 3,5$  мкм с большим фактором заполнения ( $\vartheta = 0,56$ ) через 15 минут прогрева на температурной кривой отмечается минимум, который составляет примерно  $T = 165^\circ\text{C}$ , а у композита с микросферами большого диаметра ( $d=35$  мкм) за это же время минимум температурной кривой повышается примерно на  $80^\circ\text{C}$  больше.

Композит с большими микросферами при факторе заполнения  $\vartheta = 0,56$  содержит  $N = 2.5 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}$  частиц, а композит с малыми микросферами с таким же фактором заполнения уже имеет на три порядка больше частиц  $N = 2.5 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$  (центры рассеяния). Слой композита с микросферами диаметром  $d=35$  мкм и такой концентрации имеет степень черноты  $\varepsilon = 0,07$ , а слой композита, содержащий микросферы с  $d=3,5$  мкм имеет степень черноты  $\varepsilon = 0,01$ . Из приведенных данных следует, что степень нагрева композита существенно зависит от степени черноты слоя композита.

### Выводы

С помощью предложенной математической модели расчета температурного поля в полупрозрачном композитном материале из полиметилметакрилата и кварцевых микросфер исследовано влияние факторов заполнения и параметров микросфер на тепловой процесс. Выяснено, что при уменьшении внешнего диаметра микросферы происходит снижение температурного перепада на холодной и горячей границах. При увеличении фактора заполнения в композите происходит усиление процесса нагрева, при этом его влияние в композитах, содержащих крупные микросферы, проявляется при меньших значениях величин. Влияние величины

радиуса пустотелого ядра микросферы проявляется в формировании температурного поля при существенном снижении размера частиц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Герман М.Л., Гринчук П.С.. Математическая модель для расчета теплозащитных свойств композиционного покрытия «керамические микросферы – связующее» // Инж.-физ. журнал. – 2002. – Т.75.– №6. – С.43-52.
2. Дейерменджан. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. – 165с.
3. Петров Ю.И.. Физика малых частиц. М.: Наука, 1982. – 359с.
4. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н.. Теплообмен излучением. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
5. Бурка А.Л., Великанов Е.В.. Нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с учетом рассеяния // Ползуновский вестник. – 2004. – №1. – С.46-48.
6. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Труды Математического института АН СССР. – 1949. – Т. 28. – С.135-139.
7. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Журавлев Л.Н.. Теплообмен излучением. М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432с.
8. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. – 390с.
9. Золотарев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В.. Оптические постоянные природных и технических сред. Л.: Химия. – 1984. – 375с.
10. Гуревич М.М., Ицко Э.Ф., Середенко М.М.. Оптические свойства лакокрасочных покрытий. Л.: Химия. – 1984. – 120с.
11. Ку-Наи Лиоу. Основы радиационных процессов в атмосфере. Л.: Химия, 1984.

Получено 12.08.2009 г.