

УДК 536.24:533:532.526:533.001.16

РЕПУХОВ В. М.<sup>1</sup>, СИГОРСКИХ С. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт технической теплофизики НАН Украины*

<sup>2</sup> *Украинская академия наук*

## РАДИАЦИОННЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Облік неоднорідності середовища проводиться за допомогою тензора заломлення з відповідними діагональною матрицею та вектором заломлення. Узагальнюються умови термодинамічної рівноваги, транспортні рівняння спектральної яскравості уздовж променя світла і густини енергії випромінювання. Одержані для регулярного променя рівняння кривизни та кручення, а також встановлений однозначний зв'язок властивості середовища (тензора) з формою променів та полем швидкостей світла в безперервному середовищі. Розглянуті методи розрахунку граничних умов на поверхні розриву регулярності променів, а також часткові випадки форми променів.

Учет неоднородности среды ведется при помощи тензора преломления с соответствующими диагональной матрицей и вектором преломления. Обобщаются условия термодинамического равновесия, транспортные уравнения спектральной яркости вдоль луча света и плотности энергии излучения. Получены для регулярного луча уравнения кривизны и кручения, а также установлена однозначная связь свойств среды (тензора) с формой лучей и полем скоростей света в непрерывной среде. Рассмотрены методы расчета граничных условий на поверхности разрыва регулярности лучей, а также частные случаи формы лучей.

The nonuniform of medium is compensated by using the refraction tensor corresponding with the diagonal matrix and the refraction vector. The conditions of the thermodynamics equilibrium, the transport equations the spectral intensity of radiation along of light ray and the radiant energy density. The curvature and twist equations for regular ray are obtained and allow the mutually unambiguous connection between the medium properties (tensor) and the form of ray and velocity field of light in the continuous medium are established. The calculation methods of the boundary conditions on the surface discontinuity of the ray regularity and allow in the particular cases of the ray forms are considered.

$a_*$  и  $f(a_*)$  – транспортируемая величина и ее скалярная функция;

$\vec{b}_{*T}(b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$  и  $\vec{b}_*(b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$  – четырех- и трехмерные векторы переноса транспортируемой величины с их проекциями, определяемые законами переноса величины  $a_*$ ;

$Bo \equiv \tilde{\alpha} T_* / E_*$  – число Больцмана, равное отношению характерных плотностей конвективного и радиационного потоков ( $E_* = \sigma T_*^4$ ,  $T_* = T_\delta^o$ ,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана);

$\vec{e}(n, s = \tau, v, \beta)$  – трехмерные единичные векторы;

$I_{vt}$  и  $H_{vt}$  – спектральная яркость (интенсивность) транспортируемого и рассеянного излучения в направлении луча света;

$k_1(s)$  и  $k_2(s)$  – кривизна и кручение луча в виде функций его длины  $s$  (натуральное уравнение);

$k_v = k_{vp} + k_{vq}$ ,  $\sigma_v$  и  $\beta_v = k_v + \sigma_v$  – спектральные коэффициенты объемного поглощения, рассеяния и ослабления (экстинкция) с учетом превращения энергии излучения в механическую работу  $k_{vp}$  и теплоту  $k_{vq}$ ;

$L_V(a_*)$  и  $R_D(a_*)$  – функционалы левой и правой части транспортно уравнения;

$N_v, \vec{LN}_v, LN_{vt}, LN_{vv}, LN_{v\beta}$  ( $LN_{vx}, LN_{vy}, LN_{vz}$ ) и  $LN_n$  – спектральные тензор второго ранга и трехмерный вектор преломления с проекциями в ортонормированном базисе Френе (Декарта) и его полная

проекция по направлениям и частотам;

$p_{v,\tau \rightarrow \tau}$  – нормированная индикатриса рассеяния;

$t, x, y$  и  $z$  – координаты четырехмерной ортонормированного базиса Декарта;

$\vec{V}_T(1, u, v, w)$  и  $\vec{V}(u, v, w)$  – четырех- и трехмерный векторы скорости с проекциями на координатные оси (скорости света в среде  $\vec{V} \equiv \vec{c}_v$  и вакууме  $\vec{V}_0 \equiv \vec{c}_0$ );

$u_v$  и  $u_c$  – спектральная и полная (по частотам) плотности энергии излучения;

$\alpha$  и  $\alpha_*$  – координаты, принимающие  $t, x, y, z$ , причем вторая в соответствии с индексом  $*$  ( $1$  и  $h$ ),  $u, v, w$  и  $a_1 = 1$  в молекулярном континууме и  $\alpha_* = s$  в фотонном;

$\varphi = \angle \vec{i}, \vec{\xi}$ ,  $\phi = \angle \vec{\xi}, \vec{\tau}$  и  $\chi = \angle \vec{k}, \vec{\beta}$  – углы Эйлера для ортонормированных базисов текущего Френе ( $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ ) и абсолютного Декарта ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ );

$\rho$  – плотность;

$\eta_T \equiv \frac{T_{CT.a}^0 - T_{\delta}^0}{T_{CT.as}^0 - T_{\delta}^0}$  – температурная эффективность завесы на адиабатной стенке;

$\eta$ ,  $\eta_v$  и  $\eta_{\text{евт}}$  – полная, спектральная и эффективная спектральная плотность объемного излучения (эмиссия) в направлении  $\vec{\tau}$ ;

$\Sigma_v = c_{vn} u_v$  и  $\Sigma = c_n u_c$  – спектральная и полная (по частотам) падающая энергия на единице площади границы элемента объема.

### Индексы нижние:

$*$  =  $\rho, u, v, w, m_j, h, \dots, I_{v\tau}, u_c, \dots$  – индексы величин (плотность, проекции вектора скорости, относительная массовая концентрация, энтальпия и другие), являющихся решением транспортных уравнений, а индекс  $T$  – четырехмерных градиентов и дивергенций.

## 1. Введение

Известно, что излучение (свет) имеет волновую природу, а частота волны (цвет) является параметром, определяющим распространение света в средах с оптическими свойствами, зависящими от частоты. В вакууме свет распространяется прямолинейно с независимой от цвета постоянной скоростью  $c_0$ , а в материальных средах при постоянной частоте  $\nu$  и энергии кванта  $h\nu$  уменьшение скорости распространения света до значения  $c_v$  характеризуется показателем преломления  $n_v$  в равенстве  $c_0 = n_v c_v$ , который в общем случае зависит от координат, направления и частоты. В однородных изотропных средах лучи – прямые линии; в неоднородных – нормальные конгруэнции линий с направлением, совпадающим с нормалью к волновому фронту. В анизотропных средах линии могут со-

ставлять угол к нормали фронта, а их распространение описывается принципом Ферма с экстремальным (максимальным, минимальным) значением оптической длины пути. Для последовательности однородных сред длина пути суммируется, а волновая природа света учитывается в виде поправок к результатам [1].

В физической оптике распространение света рассматривают на основе волнового уравнения, которое более полно отражает физическую картину и позволяет описать, в частности, такие явления как дифракция, рассеяние и поглощение, при этом интерференцию света, можно объяснить лишь волновой теорией распространения света. Понятие луча используется только в качестве указателя направления распространения энергии излучения, ввиду электромагнитной природы света, согласно вектору

Умова-Пойтинга  $\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$  с яркостью

$I_0 = \frac{1}{4\pi} E_0^2$  неполяризованного излучения в вакууме при  $E = H$  и амплитуде  $E_0$  [1].

Методы геометрической оптики широко используются в астрофизике, теплофизике, динамике излучающего газа и других областях. Гипотезы молекулярного и фотонного континуума (сплошная среда) и транспортные уравнения радиационно-конвективного тепломассопереноса, в частности, спектральной яркости  $I_\nu$  и полной плотности энергии излучения  $u_c$  следуют при статистическом осреднении характерных свойств материальных частиц, использовании законов их движения, условия сохранения энергии ансамблей частиц и аддитивности характерных величин на основе уравнений механики, термодинамики и электродинамики. Вводится коэффициент преломления лучей и тензор напряжений сил излучения; в уравнениях сохранения энергии континуумов появляются члены полезной работы и диссипации механической энергии за счет напряжений сил излучения, а также непосредственного превращения излучения в тепло. При упрощенном подходе используются методы классической механики, представления о квантах излучения, напряжениями сил излучения в уравнении импульсов пренебрегают, ввиду малости, а их работу относят в коэффициент поглощения энергии излучения, который оказывается единственным связывающим звеном в уравнениях сохранения энергий континуумов [1–4].

В настоящей работе для учета свойств неоднородности среды предлагается использовать тензор преломления, который учитывает изменение показателя преломления и скорости света в зависимости от положения точки и направления на криволинейном луче (в малой окрестности простая дуга). Изменение энергии излучения с изменением скорости света и искривлением луча считается дополнительным рассеиванием, наряду с общепринятым учетом потери энергии в среде, а тензору неоднородной изотропной среды соответствует произведение единичной матрицы на скалярную функцию, а одно-

родной изотропной среды – на постоянную величину [5, 6].

## 2. Основные результаты

### 2.1. Тензор и вектор преломления, уравнение неразрывности луча и закон Кирхгофа

В трехмерном поле полная производная по времени от количества в объеме  $\Delta V$  транспортируемой величины  $a_*$  или ее функции  $f_V(a_*)$ , отнесенной к единице объема, для удобства записи представляется с помощью четырехмерной скорости и четырехмерной дивергенции в виде

$$\frac{d[f_V(a_*)\Delta V]}{dt} = \left\{ \frac{\partial f_V(a_*)}{\partial t} + \right. \quad (1)$$

$$\left. + \text{div}[f_V(a_*)\vec{V}]\right\}\Delta V = \{\text{div}_T[f_V(a_*)\vec{V}_T]\}\Delta V$$

$$\text{при } \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = \text{div}\vec{V},$$

где  $\vec{V}_T(1, u, v, w)$  и  $\vec{V}(u, v, w)$  – соответственно четырех- и трехмерная скорость с их проекциями, а индекс  $T$  – относится к упрощающим запись условным четырехмерным характеристикам [5].

В фотонном континууме тензор преломления второго ранга  $N_\nu$  с матрицей  $[n_{\nu ij}]$ , трехмерные единичные векторы  $\vec{e}(n, s = \tau, v, \beta)$ , скорости в среде  $\vec{V} \equiv \vec{c}_\nu$  и вакууме  $\vec{V}_0 \equiv \vec{c}_0$  позволяют записать связи скоростей, условия постоянства поля скорости света в вакууме и закон Кирхгофа соответственно

$$N_\nu \vec{c}_\nu = E \vec{c}_0, \text{ или } \vec{n}_\nu \equiv \vec{c}_0 / c_{\nu\tau} = N_\nu \vec{\tau}, \quad (2)$$

$$\text{div}(N_\nu \vec{c}_\nu) = \text{div}\vec{c}_0 = 0 \text{ и } \frac{\eta_\nu}{k_\nu} = (\text{mod } N_\nu \vec{\tau})^2 I_{b\nu 0},$$

где в общем случае опорный луч в вакууме отличается от луча в неоднородной среде. Обобщаются понятия плотности объемного излучения  $\eta_\nu$ , показателя преломления  $n_\nu$  и коэффициента поглощения  $k_\nu$ , а локальное термодинамическое равновесие рассматривается вдоль каждого луча.

Из этих уравнений следуют вектор преломления, уравнение неразрывности спектрального луча в неоднородной среде (транспортное уравнение) и матричные равенства соответственно

$$E \vec{L} N_v \equiv N_v^{-1} \text{Div} N_v, N_v^{-1} \text{Div} N_v \vec{c}_v + E \text{div} \vec{c}_v = 0$$

и  $E(\vec{L} N_v \circ \vec{c}_{ve}) + E \text{div} \vec{c}_v = 0,$  (3)

где тензор преломления и произведение вектора-столбца на вектор скорости представляются диагональной матрицей, ввиду согласования с единичной матрицей при дивергенции скорости, что строго следует из аналогичных четырехмерных векторов и тензора третьего ранга с диагональной матрицей, имеющей единичный первый элемент, и ввиду связи четырехмерных скоростей среды и вакуума. Тогда возможен переход к трехмерным векторам и тензору второго ранга с элементами, имеющими параметр – время, так как  $(N_{vT} c_{vT})_t = 1$  и

$$\text{div}_T(N_{vT} c_{vT}) = \text{div}(N_v c_v) = 0.$$

$$\frac{d e I_{vt} \Delta V}{dt} = [e \text{div}_T(c_{veT} I_{vt}) + c_{ve} I_{vt} \frac{d e}{ds_e}] \Delta V \Big|_{e \rightarrow \tau}^{\tau \rightarrow e} \{ \tau (c_{vT} \circ \text{grad}_T I_{vt}) - c_{vT} I_{vt} [\tau \vec{L} N_{vt} + \vec{v} (LN_{vv} - k_1)] \} \Delta V$$
 (4)

в пределе на соприкасающейся плоскости и аналогично на плоскости с бинормалью, то есть допускает  $k_2 LN_{vv} = k_1 LN_{v\beta}$ , что согласуется с последним равенством (3) и кинематической интерпретацией кривизны  $k_1$  и кручения  $k_2$  в базисе  $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$  на основе трех уравнений Френе с дополнительным равенством для радиус-вектора точки  $P$  на луче (без индекса частоты  $\nu$ ) [1,6]

$$\frac{d \vec{\tau}}{ds} = k_1 \vec{v}, \frac{d \vec{v}}{ds} = -k_1 \vec{\tau} + k_2 \vec{\beta}, \frac{d \vec{\beta}}{ds} = -k_2 \vec{v}$$

и  $\frac{d \vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$  (5)

Во всех континуумах следуют обобщенные транспортные уравнения величины  $a_*$  вида [5]

$$L_\nu(a_*) \equiv \rho(\vec{V}_T \circ \text{grad}_T a_*) = \text{div}_T \vec{b}_{*T} \equiv R_D(a_*)$$
 (6)

## 2.2. Полная производная по времени и уравнения переноса транспортируемой величины

Малое смещение в направлении  $\vec{e}$  луча света вместе с текущим вдоль луча ортонормированным базисом Френе  $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$  происходит согласно проекциям скорости  $c_{ve}$ , причем скорости  $c_{vt}$ ,  $c_{vv}$  и  $c_{v\beta}$  связаны  $c_{vt} LN_{vt} = c_{vv} LN_{vv} = c_{v\beta} LN_{v\beta} = -\text{div} \vec{c}_v$ , а в пределе  $e \rightarrow \tau$  движение базиса вдоль луча света можно рассматривать как сумму поступательного переносного в направлении луча  $\vec{\tau}$  и двух относительных с угловыми скоростями вращения  $\vec{\Omega}_\beta = k_1 \vec{\beta}$  и  $\vec{\Omega}_\tau = k_2 \vec{\tau}$  [1,5,6].

Если, как обычно, луч света предельный пучок гомоцентрических линий с малым различием его характеристик в поперечном сечении и спектральной яркостью  $I_{vt}(P, s, t)$  вдоль луча в элементарном объеме  $\Delta V$ , то его смещение в направлении  $\vec{e}$  с координатой  $s_e$  дает равенства

и сохранения энергии в уравнениях кривизны и кручения при  $LN_{vv} \Delta p_{v,\tau \rightarrow \beta} = LN_{v\beta} \Delta p_{v,\tau \rightarrow v}$  в виде

$$k_1 = LN_{vv} + \sigma_v \Delta p_{v,\tau \rightarrow v} \quad \text{и} \quad k_2 = LN_{v\beta} + \sigma_v \Delta p_{v,\tau \rightarrow \beta} \quad \text{при}$$

$$\Delta p_{v,\tau \rightarrow e} = p_{v,e} \begin{matrix} \vec{\tau} \rightarrow \vec{e} \\ \vec{\tau} \rightarrow -\vec{e} \end{matrix},$$
 (7)

где  $a_* = u, v, w, m_j^0, h^0, \dots,$   $f(a_*) = \rho a_*$  и  $* = \rho, u, v, w, m_j, h, \dots$  – транспортируемая величина, отнесенная к единице массы, ее функция и индекс в уравнениях молекулярного континуума импульсов, полных концентраций, полной энтальпии и других;  $a_* = I_{vt}, u_c, \dots,$   $f(a_*) = a_*$  и  $* = I_{vt}, u_c, \dots$  – транспортируемая величина, отнесенная к единице объема, ее функция и индекс при условной плотности  $\rho = 1$  в уравнениях фотонных континуумов спектральной яркости, полной плотности энергии излучения и других, причем уравнение для

плотности энергии получается интегрированием уравнения спектральной яркости в точке пространства по всем направлениям и частотам;  $k_1(s)$  и  $k_2(s)$  – кривизна и кручение, которые в виде функций длины луча  $s$  (натуральное уравнение кривой) однозначно задают форму луча;

$$L_V(I_{vt}) = (c_{vtT} \circ \text{grad}_T I_{vt}), \quad L_V(u_v) \equiv (c_{vtT} \circ \text{grad}_T u_v),$$

$$L_V(u_c) \equiv (c_{ctT} \circ \text{grad}_T u_c) \quad \text{и}$$

$$R_D(I_{vt}) = c_{vt} \{ [LN_{vt} - (k_v + \sigma_v)] I_{vt} + \eta_{evt} \},$$

$$R_D(u_v) = 4\pi\eta_v + (LN_{nv} - k_{av})\Sigma_v \text{ и}$$

$R_D(u_c) = 4\pi\eta + (LN_n - k_a)\Sigma$  – обычно используемые функционалы левой части транспортного уравнения и функционалы правой части, уточненные проекциями вектора преломления, плотностями и коэффициентами, соответственно для спектральной яркости в направлении луча  $s$ , спектральной и полной плотности энергии излучения;  $\vec{V}_T(1, u, v, w)$ ,  $\vec{V}(u, v, w)$ ,  $\vec{b}_{*T}(b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$  и  $\vec{b}_*(b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$  – четырех- и трехмерные скорости и векторы переноса, определяемые законами переноса величин, с их проекциями;  $\Delta e_v = \eta_v \Delta V \Delta \Omega \Delta v \Delta t$ ;

$$I_V(P, s, t) \equiv \lim_{\Delta A, \Delta \Omega, \Delta v, \Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta e_v}{\cos \theta \Delta A \Delta \Omega \Delta v \Delta t} \right| \quad \text{и}$$

$$H_{vt}(P, s, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_{v, \tau' \rightarrow \tau} I_{v\tau'} d\Omega' \quad - \text{ спектральные}$$

поток энергии излучения, яркость (интенсивность) транспортируемого излучения и рассеянного с нормированной индикатрисой рассеяния  $p_{v, \tau' \rightarrow \tau}$  излучения в объеме  $\Delta V$  за время  $\Delta t$  при пространственном угле  $\Delta \Omega = \sin \theta \Delta \theta \Delta \varphi$  и направлении луча

с единичным вектором  $\vec{s}$  в точке  $P$  на поверхности  $\Delta A$  с внешним единичным нормальным вектором  $\vec{n}$ , направленным под углом  $\theta$  к вектору  $\vec{s}$  при углах  $\theta$  и  $\varphi$  сферической системы координат;  $\eta$ ,  $\eta_v$  и  $\eta_{evt} = \eta_v + \sigma_v H_{vt}$  – полная, спектральная и эффективная спектральная плотность объемного излучения (эмиссия) в направлении  $\vec{\tau}$ ;

$$u_v = \frac{1}{c_{vn}^2} \int_{\Omega'=4\pi} c_{vt'} I_{vt'} d\Omega' \quad \text{и} \quad p_c = \frac{1}{c_n} \iint_{v; \Omega'} I_{vt'} \cos^2 \theta d\Omega' -$$

спектральная объемная плотность энергии и полное давление излучения;  $\Sigma_v = c_{vn} u_v$  и  $\Sigma = c_n u_c$  – спектральная и полная падающая энергия на единице площади границы элемента объема;  $N_v$ ,  $\vec{LN}_v$ ,  $LN_{vt}$

$$\text{и} \quad LN_n = \frac{1}{c_n \Sigma} \iint_{v; \Omega'=4\pi} LN_{vt'} c_{vt'} I_{vt'} dv d\Omega' -$$

спектральные тензор второго ранга, трехмерный вектор преломления с проекциями;  $k_v = k_{vp} + k_{vq}$ ,  $\sigma_v$  и  $\beta_v = k_v + \sigma_v$  – спектральные коэффициенты объемного поглощения, рассеяния и ослабления (экстинкция) с учетом превращения энергии излучения в механическую работу  $k_{vp}$  и теплоту  $k_{vq}$ ;  $*$  =  $\rho, u, v, w, m_j, h, \dots, I_{vt}, u_c, \dots$  – индексы в левой части сочетаются с координатами  $\alpha = t, x, y, z$  и правой  $\alpha = \alpha_*, x, y, z$  при  $\alpha_* = t, x, y, z$  согласно с индексом  $*$  = (1 и  $h$ ),  $u, v, w$  и  $a_1 = 1$  в молекулярном континууме и  $\alpha_* = s$  в фотонном, а индекс  $T$  четырехмерных градиентов и дивергенций часто опускается [5].

В уравнениях (6) и (7) принято, что изменение вектора скорости света в среде происходит без изменения формы движения фотонов и энергия изменения рассеивается в виде излучения.

Влияние рассеяния на модуль скорости света и направление луча учитывается элементами тензора преломления, которые равны при изотропном рассеянии; а при равномерном рассеянии на нейтральных частицах с отсутствием указанного влияния учитывается сферической индикатрисой рассеяния ( $p_{v, \tau' \rightarrow \tau} = 1$ ) в транспортных уравнениях (6) и должна отсутствовать разность значений индикатрис ( $\Delta p_{v, \tau' \rightarrow \tau} = 0$ ) в уравнениях кривизны и кручения (7), что позволяет ниже рассматривать уравнения (7) без членов с разностью индикатрис.

### 2.3. Проекция вектора преломления в базисе Декарта и Френе

При углах Эйлера  $\varphi = \angle \vec{i}, \vec{\xi}$ ,  $\phi = \angle \vec{\xi}, \vec{\tau}$  и  $\chi = \angle \vec{k}, \vec{\beta}$  ортонормированные базисы трехгранника текущего Френе  $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$  и абсолютного Декарта  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  имеют матрицу преобразования базиса [A]

при  $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}) = (i, j, k)[A]$  и  $[B] = ([A]')^{-1}$ , что соответствует трехмерной группе вращения и проверяется непосредственно, где  $\vec{\xi}$  – орт на пересечении плоскостей  $(i \ 0 \ j)$  и  $(\tau \ 0 \ \nu)$ ;

$$[A] = [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\chi - \sin\phi\sin\phi\cos\chi, & -(\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi\cos\chi), & \sin\phi\sin\chi \\ \sin\phi\cos\phi + \cos\phi\sin\phi\cos\chi, & -(\sin\phi\sin\phi - \cos\phi\cos\phi\cos\chi), & -\cos\phi\sin\chi \\ \sin\phi\sin\chi, & \cos\phi\sin\chi, & \cos\chi \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$(\vec{\tau} \circ \vec{\nu}) = (\vec{\nu} \circ \vec{\beta}) = (\vec{\beta} \circ \vec{\tau}) = 0 \text{ и } \tau^2 = \nu^2 = \beta^2 = 1 -$$

матрица и шесть соотношений ортогональности, причем для оставшихся трех из девяти связей углов ортов можно, дифференцируя уравнения Френе (третьи проекции  $\tau$  и  $\nu$ , вторая проекция  $\beta$ ), написать три уравнения [1,6]:

$$\frac{d\phi}{ds} \cos\phi \sin\chi + \frac{d\chi}{ds} \sin\phi \cos\chi = k_1 \cos\phi \sin\chi,$$

$$-\frac{d\phi}{ds} \sin\phi \sin\chi + \frac{d\chi}{ds} \cos\phi \cos\chi = -k_1 \sin\phi \sin\chi + k_2 \cos\chi$$

и

$$\frac{d\phi}{ds} \sin\phi \sin\chi - \frac{d\chi}{ds} \cos\phi \cos\chi = k_2 (\sin\phi \sin\phi - \cos\phi \cos\phi \cos\chi) \quad (9)$$

Тогда следуют шесть известных уравнений интегрирования натурального уравнения кривой с единственным решением задачи Коши для проекций орта  $\vec{\tau}$  и углов Эйлера в виде [1,6]:

$$LN_{\nu\tau} = LN_{\nu x} (\cos\phi\cos\chi - \sin\phi\sin\phi\cos\chi) + LN_{\nu y} (\sin\phi\cos\phi + \cos\phi\sin\phi\cos\chi) + LN_{\nu z} \sin\phi\sin\chi,$$

$$LN_{\nu\nu} = -LN_{\nu x} (\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi\cos\chi) - LN_{\nu y} (\sin\phi\sin\phi - \cos\phi\cos\phi\cos\chi) + LN_{\nu z} \cos\phi\sin\chi \text{ и}$$

$$LN_{\nu\beta} = LN_{\nu x} \sin\phi\sin\chi - LN_{\nu y} \cos\phi\sin\chi + LN_{\nu z} \cos\chi, \quad (12)$$

и наоборот, причем  $LN_{\nu\tau}, LN_{\nu\nu}, LN_{\nu\beta}$  меняются местами соответственно с  $LN_{\nu x}, LN_{\nu y}, LN_{\nu z}$  [7].

В базисе Декарта  $i, j, k$  равенства для тензора с диагональной матрицей, его дивергенции, обратной

$$\frac{dx}{ds} = \cos\phi \cos\phi - \sin\phi \sin\phi \cos\chi, \quad (10)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\phi \cos\phi + \cos\phi \sin\phi \cos\chi,$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin\phi \sin\chi$$

(проекции  $\vec{\tau}$  с учетом  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} c_{\nu\tau} = \vec{\tau} c_{\nu\tau}$ ;

начальные углы Эйлера в точке  $P_0$  и  $s = s_0$ ) и

$$\frac{d\phi}{ds} = k_2 \frac{\sin\phi}{\sin\chi}, \quad \frac{d\phi}{ds} = k_1 - k_2 \sin\phi \operatorname{ctg}\chi, \quad \frac{d\chi}{ds} = k_2 \cos\phi$$

(решения уравнений проекций (9) - третьего и первого, обращаясь в тождество второе);

или в виде направления луча в точке  $P$  в базисе Декарта (углы без индекса частоты  $\nu$ )

$$\frac{c_{\nu x}}{c_{\nu\tau}} = \cos\phi \cos\phi - \sin\phi \sin\phi \cos\chi,$$

$$\frac{c_{\nu y}}{c_{\nu\tau}} = \sin\phi \cos\phi + \cos\phi \sin\phi \cos\chi, \quad (11)$$

$$\frac{c_{\nu z}}{c_{\nu\tau}} = \sin\phi \sin\chi,$$

а с учетом матрицы  $[A]$  однозначная связь проекций вектора преломления обоих базисов

матрицы, вектора-столбца преломления и дивергенции скорости принимают вид:

$$N_v \equiv [n_{vij}] = [n_{vxx}, n_{vyy}, n_{vzz}], \text{Div} N_v = \left( \frac{\partial n_{vxx}}{\partial x}, \frac{\partial n_{vyy}}{\partial y}, \frac{\partial n_{vzz}}{\partial z} \right), N_v^{-1} = \left[ \frac{1}{n_{vxx}}, \frac{1}{n_{vyy}}, \frac{1}{n_{vzz}} \right], \quad (13)$$

$$E \vec{L} N_v = \left[ \frac{1}{n_{vxx}}, \frac{1}{n_{vyy}}, \frac{1}{n_{vzz}} \right] \left( \frac{\partial n_{vxx}}{\partial x}, \frac{\partial n_{vyy}}{\partial y}, \frac{\partial n_{vzz}}{\partial z} \right)' = \left( \frac{\partial \ln n_{vxx}}{\partial x}, \frac{\partial \ln n_{vyy}}{\partial y}, \frac{\partial \ln n_{vzz}}{\partial z} \right)' \text{ и} \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial \ln n_{vxx}}{\partial x} c_{vx} + \frac{\partial \ln n_{vyy}}{\partial y} c_{vy} + \frac{\partial \ln n_{vzz}}{\partial z} c_{vz} \right) = -\text{div} \vec{c}_v, \quad (15)$$

а при неоднородном изотропном излучении, как отмечалось выше, тензор излучения скаляр

$$N_v = E n_v, \text{ то есть } n_v = n_{vaa}, \vec{L} N_v = \text{grad} \ln n_v, \\ (\text{grad} \ln n_v \circ \vec{c}_v) = -\text{div} \vec{c}_v \text{ и } n_v \vec{c}_v = \vec{c}_0$$

(конгруэнтные, включая прямые, лучи в неоднородной изотропной среде), что позволяет непосредственно использовать существующие методы расчета излучения [2, 4].

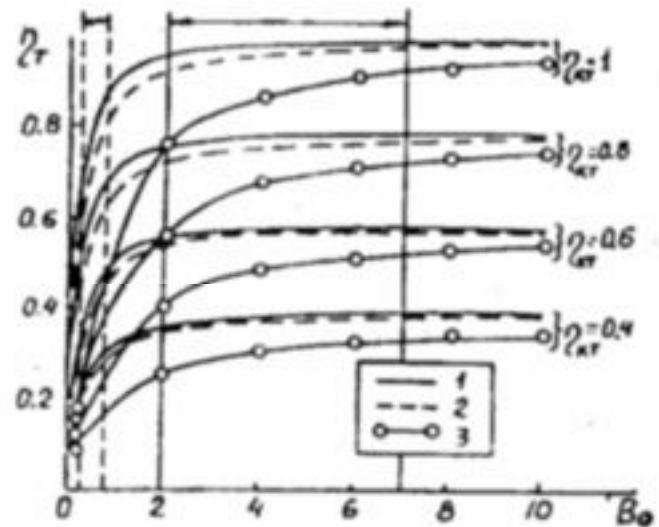
В результате следует, что поле скорости света в неоднородной среде задается тензором преломления второго ранга и связанного с ним вектором преломления в абсолютном базисе Декарта (уравнения (2), (3), (13), (14)); а связанная с ними трехмерная группа вращения с матрицей (8) дает однозначное решение линейной системы уравнений (12), то есть проекциям вектора преломления в базисе Декарта однозначно соответствуют проекции в базисе Френе, и наоборот.

Однозначность определения трехмерной группы вращения с матрицей (8) следует из однозначности формы луча, представленного натуральным уравнением кривой, и однозначности связи такой кривой с углами Эйлера и проекциями касательного орта в базисе Декарта (уравнения (10), (11)). В конечном счете, последовательное задание проекций касательного орта на луче позволяет определить углы Эйлера и проекции вектора преломления в базисе Френе по его проекциям в базисе Декарта, включая кривизну и кручение, а также первую проекцию вектора преломления в базисе Френе с уточнением по первому уравнению (2) заданных проекций орта; то есть задание трех независимых характерных функций на луче позволяет разрешить транспортные уравнения (6, 7) переноса энергии излучения в неоднородной среде.

Изложенное выше служит базой для доказательного переноса расчетных данных по радиационно-

конвективному тепломассопереносу, полученных в простейших условиях, на течения в сложных условиях при больших скоростях течения и высоких температурах среды, а также проверки непротиворечивости принятых упрощающих решение задачи допущений и, в частности, нестационарного эффекта неопознанных летающих объектов (НЛО).

При этом расширение решения системы мгновенных транспортных уравнений радиационно-конвективного тепломассопереноса обеспечивается: во-первых, существованием взаимосвязи таких систем переноса, которая реализуется путем преобразования сложных систем к простейшим; во-вторых, наличием относительных законов переноса и состояния среды [5].



На рисунке представлен такой пересчет эффективности тепловой защиты адиабатной стенки вдувом при наличии излучения  $\eta_T$  в зависимости от числа Больцмана  $Bo$  и эффективности чисто конвективной  $\eta_{Tk}$  абсолютно черной (1), серой (2) и диатермической (3) завесы, где эффективности прообраза и образа равны ( $\epsilon_s = \epsilon_{CT} = 0,67$ ;

$\varepsilon_g^{cep} = 0,85$ ;  $\tau_\delta = 0,10$ ;  $\tau_{CT} = 0$ ;  $\tau_g^{cep} = 0,15$  – соответственно поглощательные и пропускательные способности границы пограничного слоя, стенки и завесы).

В современных технологиях, когда основной поток имеет температуру 2000 К, низким коэффициентам теплоотдачи порядка 300 Вт/м<sup>2</sup> К (камеры сгорания) и высоким 3000 Вт/м<sup>2</sup> К (лопатки турбины) соответствуют числа Больцмана 0,7 и 7 (вертикальные линии). В технологиях завтрашнего дня, когда основной поток будет иметь температуру 3000 К, соответствующие числа Больцмана будут 0,2 и 2 (вертикальные линии). Отличия  $\Delta\eta_p$  у диатермической завесы при числах Больцмана 7; 2; 0,7 и 0,2 для  $\eta_{TK} = 1$  соответственно 0,1; 0,25; 0,60 и 0,85, что указывает на необходимость учета в расчетах влияния излучения при оценке защитных свойств завесы, а также сопряженности конвективного и радиационного тепломассопереноса [5, 8, 9].

#### 2.4. Граничные условия двух различных неоднородных непрерывных сред

При наличии тензора преломления и регулярности криволинейных лучей света точки разрыва регулярности, где луч теряет свойства простой дуги (топологическая эквивалентность отрезку прямой и непрерывное вращение касательной [1, 6]), относятся к граничным поверхностям.

Характерные свойства в точке границы с касательной плоскостью и нормалью (скольжение луча вдоль касательной плоскости, включая принцип Ферма; изотропная симметрия), а также уравнения (2, 3) с индексом  $n$  падающего 1, преломленного 3 и отраженного 2 лучей вида

$$\begin{aligned} (n_{vzz} \frac{c_{vz}}{c_0})_{n=1;2;3}^2 &= \text{idem}, \quad \text{mod}(N_v c_v) \Big|_{n=1;2;3} = c_0 = \text{const} \text{ и} \\ [(LN_v \circ c_v) \Big|_{n=1;2;3}] &= -(\text{div } \vec{c}_v) = \text{idem}, \end{aligned} \quad (16)$$

позволяют определить скорость на отраженном и преломленном лучах с углами сферической системы координат, отсчитываемыми от проекции скорости падающего луча на касательную плоскость  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_n$  и этой плоскости  $\theta$ , ввиду их однозначной связи в соответствующих лучах базисах Френе (общее начало всех базисов, ось  $z$  совпадает с нормалью).

Решение уравнений (16) на каждой стороне границы с различными опорными лучами в вакууме дается для двух пар точек пересечением сферы и соответственно двух плоскостей, а его согласование с двух сторон обобщает существующие методы задания разделяющихся лучей [1].

#### 2.5. Геодезический, плоский криволинейный и прямолинейный лучи света

В общем случае прямолинейный луч имеет нулевую кривизну и любое кручение ( $k_1 = 0$ ,  $LN_{vv} = 0$ ), а также постоянное направление в базисе Декарта с условиями из уравнений (10)

$$\sin \chi \frac{d\varphi}{ds} = \text{tg} \phi \frac{d\chi}{ds} = -\text{tg} \chi \frac{d\phi}{ds}. \quad (17)$$

В пучке прямых лучей каждый луч имеет постоянные углы Эйлера ( $\varphi = \varphi_0$ ,  $\phi = \phi_0$ ,  $\chi = \chi_0$ ), включая возможные лучи с углами  $\chi_0 = n\pi$  ( $n = 0,1,2,\dots$ ), когда луч расположен в одной плоскости с координатной осью  $z$ , а также углами  $\phi_0 = 0$  и  $\chi_0 = n\pi$ , когда луч еще и в плоскости  $z = 0$  с ортами  $\vec{i}$  и  $\vec{\tau}$ , угол между которыми  $\phi_0$ ; причем лучи с кручением имеют отличные от нуля проекции  $LN_{v\beta}$ , что исключает равенство диагональных элементов матрицы тензора преломления и совпадение направлений лучей в уравнении (2), а лучи без кручения имеют  $LN_{vv} = LN_{v\beta} = 0$  и  $LN_{v\tau} = LN_{v\chi}$ , включая постоянные и даже равные элементы матрицы.

В общем случае плоский луч имеет нулевое кручение и любую кривизну ( $k_2 = 0$ ,  $LN_{v\beta} = 0$ ), чему соответствуют постоянные углы плоскости  $\varphi = \varphi_0$  и  $\chi = \chi_0$ , в которой он расположен, а также переменный угол  $\phi = \int k_1(s)ds + \phi_0$  и в пределе прямой луч без кручения ( $k_1 = 0$ ,  $\phi = \phi_0$ ).

В пучке плоских лучей (плоскостей) каждый луч имеет отличную от нуля проекцию  $LN_{vv}$ , которая связана с углами  $\phi$ , и аналогичные предыдущему особенности матрицы преломления.

В общем случае пространственный луч можно представлять мгновенной суммой двух лучей: прямого с кручением ( $LN_{v\beta} \neq 0$ ) и плоского с кривиз-



ной ( $LN_{vw} \neq 0$ ) при соблюдении заданной суммарной матрицы тензора преломления и трехмерной группы вращения с ее матрицей (8).

В частности, трехмерный луч при  $k_1 = \lambda k_2$ ,  $\lambda = \text{ctg}\alpha = \text{const}$  и постоянном единичном векторе  $\vec{n} = \tau \vec{\text{cosa}} + \beta \vec{\text{sina}}$  является геодезической линией на цилиндрической поверхности (прямая, модифицированный принцип Ферма), так как касательная к лучу и параллельная единичному вектору образующая поверхности имеют постоянный угол пересечения  $\alpha$ , а постоянство вектора следует из линейной комбинации первого и третьего уравнения Френе с исключенным вектором  $\vec{v}$  [6].

### 3. Выводы

Влияние неоднородной сплошной среды на вектор скорости распространения излучения (свет) учитывается с помощью тензора преломления второго ранга с параметром время в обычной форме связи скоростей среды и вакуума, причем тензору соответствует вектор преломления, а направлению скорости в общем случае – отличный опорный прямой луч в вакууме.

Тензор преломления имеет диагональную матрицу, ее элементы (равные в изотропной среде, различные постоянные в анизотропной с постоянной скоростью) определяют проекции скорости в среде и вектора преломления, а в законе Кирхгофа отношение величин излучения и поглощения имеет направленный характер, причем локальное термодинамическое равновесие рассматривается вдоль каждого луча.

Проекция вектора преломления в относительном базисе Френе соответственно дополняют и обобщают транспортные уравнения спектральной яркости, спектральной и полной плотности энергии излучения, а также позволяют записать уравнения кривизны и кручения луча в среде, когда энергия изменения вектора скорости сохраняется в виде энергии рассеянного излучения.

Показана взаимно однозначная связь натурального уравнения криволинейного луча в относительном базисе Френе, скорости света вдоль луча и других характеристик луча с тензором преломления в абсолютном базисе Декарта при задании исходной точки с направлением луча в обоих базисах, а также возможная последо-

вательность расчета излучения путем уточнения касательного орта на луче.

Рассмотрены граничные условия на поверхности разрыва регулярности двух различных неоднородных сред, частные случаи криволинейного плоского и прямолинейного луча с переменной скоростью света, трехмерного луча в виде геодезической (прямой) линии на цилиндрической поверхности, а также возможность представления пространственного луча мгновенной суммой прямого и плоского при сохранении суммарной матрицы тензора преломления.

Представленный подход исследования излучения в неоднородных средах с использованием тензора преломления носит обобщающий характер и позволяет получить новые и интерпретировать существующие представления в различных разделах физики и инженерной практике.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Основные формулы физики// Под редакцией Мензела Д. – М.: ИЛ, 1957. – 658 с.
2. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
4. Бай-Ши-И. Динамика излучающего газа. – М.: Мир, 1968. – 350 с.
5. Репухов В. М. Система уравнений-условий преобразования общих транспортных уравнений сложного (радиационного и конвективного) тепло-массо-переноса к простейшему виду// Проблемы газодинамики и теплообмена в ракетно-космической технике: Тр. XVII школы-семинара молодых ученых и специалистов – М.: МЭИ, 2009. – Т. 1. – С. 34 – 37.
6. Фиников С. П. Дифференциальная геометрия. – М.: Изд. МГУ, 1961. – 158 с.
7. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 280 с.
8. Репухов В. М., Кудрявцева Г. В. Радиационно-конвективный тепло-массо-перенос при наличии защитных завес// Радиационный и сложный теплообмен: Тр. Первой Рос. нац. конф. по теплообмену. – М.: МЭИ, 1994. – Т. 9. – С. 169 – 174.
9. Репухов В. М. Радиационно-конвективный тепло-массо-перенос при термохимической защите с помощью завес различной модификации// Пром. теплотехника. – 1997. – вып. 19, № 2-3. – С. 27 – 42.

Получено 15.04.2009 г.