УДК 517.5

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Ю. Трохимчук**

Аналитические функции с особенностями и N-свойство

It is proved that if the image of the eventual singular set of an analytic function of measure zero is also of measure zero, and the function is zero-dimensional on it, then it is analytic everywhere.

Известно уже много примеров аналитических функций с совершенным множеством особых точек, которые непрерывно продолжаются на это множество [1]; при этом такое множество может иметь и нулевую (плоскую) меру, а сама функция быть даже однолистной в его окрестности. Но в последнем случае образ множества ее особенностей всегда оказывался уже положительной меры.

Мы покажем, что это не случайно, а именно, что имеет место следующая теорема:

Теорема. *Пусть функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в области D и $P \subset D$ — замкнутое множество (плоской) меры нуль. Если f аналитична в $D \setminus P$, нульмерна на P*[1] *и образ множества P также меры нуль, то она аналитична всюду в D.*

Перед доказательством напомним определение линейной меры Хаусдорфа.

Пусть $\mathcal{E}$ — плоское точечное множество и пусть σ_ε — система кругов, содержащих все точки $\mathcal{E}$, причем радиус каждого круга из σ_ε не превышает ε. Через $\nu(\sigma_\varepsilon)$ обозначим сумму диаметров всех кругов σ_ε. Положим $\nu_\varepsilon(\mathcal{E}) = \inf \nu(\sigma_\varepsilon)$, где нижняя грань берется по всевозможным системам σ_ε. Монотонно возрастающая функция $\nu_\varepsilon(\mathcal{E})$ имеет (конечный или бесконечный) предел $\nu(\mathcal{E}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \nu_\varepsilon(\mathcal{E})$, который называется внешней линейной мерой Хаусдорфа.

Известные условия меры Каратеодори выполняются для внешней линейной меры Хаусдорфа, поэтому всякое B-множество линейно измеримо по Хаусдорфу и для него $\nu(\mathcal{E})$ называется просто линейной мерой $\mathcal{E}$. Иногда линейную меру множества называют его длиной.

Доказательство теоремы. Так как замкнутые множества меры нуль нигде не плотны на плоскости, то из условий теоремы следует, что функция f осуществляет внутреннее отображение области D [1], а потому при нашем доказательстве мы можем предположить f однолистной в этой области, а саму область — замкнутым прямоугольником $[a, b; c, d]$ со сторонами, параллельными осям координат.

Мы докажем, что $f(z)$ обладает N-свойством почти на всех сечениях этого прямоугольника прямыми, параллельными его сторонам. Этим, как известно, и будет доказана вся теорема: ведь тогда в силу суммируемости (даже с квадратом) производной $f'(z)$ однолистной функции f она оказывается абсолютно непрерывной на этих сечениях, значит, справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \iint\limits_{(\Gamma)} f_{\overline{z}} d\overline{z} \wedge dz,$$

равенство нулю соответствующих контурных интегралов, а значит, и аналитичность f.

[1]Т.е. ни один подконтинуум из P не стягивается в точку.

Достаточно провести доказательство N-свойства на прямолинейных сегментах $\overline{z_1(y)z_2(y)}$, соединяющих точки $z_1(y) = a + iy$, $z_2(y) = b + iy$, для почти всех $y \in [c, d]$. Предположим, что этого свойства нет; тогда для каждого значения y из некоторого множества $e \subset [c, d]$ положительной внешней меры: $\overset{*}{\mathrm{mes}}\, e = d > 0$, существует на сегменте $\overline{z_1(y)z_2(y)}$ совершенное множество $\pi(y)$ меры нуль, образ которого $q(y)$ при отображении $w = f(z) = u + iv$ имеет положительную длину. Так как вне $P \subset D$ функция $f(z)$ аналитична и, следовательно, обладает N-свойством, то $\pi(y) \subset P$, $y \in e$.

Нетрудно убедиться, что найдутся такие $\lambda > 0$ и $e' \subset e$, что

$$\overset{*}{\mathrm{mes}}\, e' > \frac{d}{2},$$

$$\text{длина } q(y) > \lambda \quad \text{для всех } y \in e'.$$

Идея дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы, покрывая "достаточно большую" часть множества $\bigcup\limits_{y \in e'} q(y) \subset f(P)$ попарно непересекающимися кругами и оценивая совокупную их площадь, получить для последней значение, всегда ограниченное снизу фиксированным положительным числом, зависящим только от d и λ, что приведет к противоречию с нулевой мерой образа P.

Образ сегмента $\overline{z_1(y)z_2(y)}$ есть простая дуга $L(y)$, которая представляет собой уровень мнимой части обратной функции $f^{-1}(w) = x(u, y) + iy(u, v)$ и $q(y) \subset L(y)$. Для каждой точки $w \in q(y)$ и каждого $\delta > 0$ при $|z' - z''| \leqslant \delta$ имеет место $|f(z') - f(z'')| \leqslant \omega(\delta)$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности f в D; напомним, что $\omega(\delta)$, $\delta \geqslant 0$, — монотонно возрастающая непрерывная функция и $\omega(0) = 0$.

Пусть δ столь мало, что $\nu_{4\rho}(q(y)) > \lambda/2$ при $\rho = \max\{\omega(\delta), \delta\}$. Опишем вокруг каждой из точек $q(y)$, как вокруг центра, круг радиуса ρ. Здесь максимальная подсистема $\sum(y)$ непересекающихся кругов имеет сумму диаметров $\geqslant \lambda/12$. Действительно, если утроить радиус каждого из кругов системы $\sum(y)$, то такая система покроет все $q(y)$ и радиусы кругов будут $\leqslant 3\rho < 4\rho$, поэтому сумма их диаметров превышает $\lambda/2$, а сумма диаметров первоначальных кругов превышает, следовательно, $\lambda/6$. Оценим площадь объединения кругов из $\sum(y)$. Она составит $S_y = n\pi\rho^2$, где n — число кругов, и, очевидно, $n \geqslant \lambda/(12\rho)$. Поэтому $S_y \geqslant \pi\rho^2\lambda/(12\rho) > \lambda\rho/4$. Так как $\rho = \max\{\omega(\delta), \delta\}$, то все точки из $\sum(y)$ принадлежат уровням интервала $I_y = [y - \delta, y + \delta]$.

Проделав такое построение для каждого $y \in e'$, выберем из интервалов I_y конечную систему непересекающихся с суммой длин не менее $d/4$. Пусть эти интервалы будут $I_{y_1}, \ldots, I_{y_k}$. Сумма S площадей кругов по всем $\sum(y_s)$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ оценивается теперь так:

$$S \geqslant \sum_{s=1}^{k} \frac{\lambda\rho_s}{4} \geqslant \frac{\lambda}{4} \sum_{s=1}^{k} \rho_s.$$

Но ρ_s не меньше полудлины δ_s интервала I_{y_s}, поэтому

$$S \geqslant \frac{\lambda}{4}\frac{d}{8} = \frac{\lambda d}{32}.$$

Другими словами, как и указывалось выше, любое конечное покрытие образа $f(P)$ системой непересекающихся кругов дает для их совокупной площади величину, большую некоторого фиксированного числа, чего нет, так как мера $f(P)$ по условию равна нулю.

Теорема доказана.

Приведем еще пару замечаний.

Во-первых, можно заметить из доказательства теоремы, что мы фактически нигде (кроме последнего момента) не пользовались тем, что само множество P имеет меру нуль. Другими словами, доказанное нами N-свойство вдоль почти всех координатных прямых имеет место всегда при условии, что образ $f(P)$ имеет меру нуль. И все же, если P положительной меры, функция f может не быть абсолютно непрерывной на этих прямых, хотя ее производная суммируема по объединению смежных интервалов на пересечении этих прямых с P.

Во-вторых, по поводу условия теоремы о нульмерности f на P рассмотрим пример. Пусть Ω — дополнение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ к канторовому "гребешку" $P_0 \times I$ над отрезком $I_0 \equiv [0,1]$ действительной оси (P_0 — канторово совершенное множество на этом отрезке). Пусть, далее, $w = f(z) = u + iv$ конформное отображение Ω на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Легко видеть, что f непрерывно продолжается на "гребешок", при этом каждый граничный отрезок его над концом смежного к P_0 интервала (так сказать, "открытый" с одной стороны) отображается на некоторый отрезок действительной оси Ou, все же остальные — стягиваются в точку. Из нашей теоремы легко следует, что образ P_0 на оси Ou есть нульмерное совершенное множество P_1 на оси Ou, причем линейной положительной меры — иначе функция f была бы аналитической всюду в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, чего нет, хотя бы в силу отсутствия нульмерности на $P_0 \times I$. Кстати, это следует и из других соображений; именно, функция f по принципу симметрии продолжается через "открытые" отрезки "гребешка" и притом бесконечно кратным образом, так как при такой симметрии возникают все новые отрезки. Так что однозначной и аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ она и не могла бы быть.

1. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 223 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 06.05.2008