УДК 519.859

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник**

Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений

The problem of construction of formal descriptions of combinatorial sets based on primary combinatorial sets and proposed mappings is considered. A concept of composition k-image of combinatorial sets is introduced. A class of the composition k-images of combinatorial sets, k-compositions of permutations, is chosen and investigated. Some its properties are researched, and an example is given.

Актуальной проблемой перечислительной комбинаторики является генерация и подсчет количества комбинаторных конфигураций, имеющих заданные свойства [1]. Специфика многих прикладных комбинаторных задач требует отражения в математических моделях их комбинаторной структуры [2], которая часто является сложной и не может быть адекватно описана известными комбинаторными множествами [3–5]. Значит, для математического моделирования и решения указанных задач необходимо введение новых комбинаторных множеств с требуемыми свойствами. Классические подходы к формализации определения комбинаторных множеств связаны с конфигурациями К. Бержа [5] и теорией перечисления Дж. Пойа [5, 6]. Являясь универсальными, классические методы дают эффективные решения для простых классов комбинаторных множеств. Использование их для сложных комбинаторных конфигураций дает громоздкие результаты, неприменимые на практике [5].

Постановка задачи. Рассмотрим построение формальных описаний комбинаторных множеств, имеющих сложную структуру, на основе описаний базовых комбинаторных множеств, к которым отнесем перестановки, сочетания и размещения [3–5]. Результаты должны быть не громоздкими и пригодными для использования в математических моделях комбинаторных задач различных классов, а построенные множества — обладать свойством транзитивности.

Базовые комбинаторные множества. Базовые отображения. Пусть $M_i = \{z^i_1, z^i_2, \ldots, z^i_{n_i}\}$, $i \in J^0_n = \{0, 1, \ldots, n\}$, — множества произвольных элементов. Построим множества $\mathbf{Z}_i$, каждое из которых представляет собой множество всех подмножеств множества M_i, $i \in J^0_n$. Возьмем произвольные $z^i = (z^i_{\beta_1}, z^i_{\beta_2}, \ldots, z^i_{\beta_{k_i}}) \in \mathbf{Z}_i$, $\beta_l \in J_{n_i}$, $l \in J_{k_i}$, $J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \in J^0_n$. Сформируем комбинаторные множества Y_i, порожденные кортежами z^i, где $y = (z^i_{j_1}, z^i_{j_2}, \ldots, z^i_{j_{m_i}}) \in Y_i(z^i)$, $\{j_1, j_2, \ldots, j_{m_i}\} \subset \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_i}\}$. Построение Y_i представим с помощью отображения $\Gamma_{Y_i}\colon \mathbf{Z}_i \to \mathbf{Y}$, $\mathbf{Y} = \bigcup\limits_{z^i \in \mathbf{Z}_i, i \in J^0_n} Y_i(z^i)$.

Множествами $Y_i \subset \mathbf{Y}_i$, $i \in J^0_n$, являются базовые комбинаторные множества. Соответствующие отображения Γ_{Y_i}, $i \in J^0_n$, назовем базовыми отображениями.

Композиционные k-образы комбинаторных множеств. Введем операцию n-композиции комбинаторных множеств, основанную на операции композиции, описанной в [1]. Пусть комбинаторное множество Y_0 порождено элементами $z^0_1, z^0_2, \ldots, z^0_n$, комбинаторные множества $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ порождены элементами $z^1, z^2, \ldots, z^n$, $z^i = \{z^i_1, z^i_2, \ldots, z^i_{n_i}\}$, $i \in J_n$. Операция n-замещения для комбинаторных множеств $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ состоит в замене каждого порождающего элемента $z^0_1, z^0_2, \ldots, z^0_n$ множества Y_0 элементами множеств Y_1,

$Y_2, \ldots, Y_n$ соответственно, в результате чего получается элемент некоторого множества W_z. Каждый элемент z_i^0 может быть замещен любым элементом множества Y_i, $i \in J_n$.

Операцию n-композиции множеств Y_0, Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_n представим с помощью базовых отображений. Поскольку $y = (z_{t_1}^0, z_{t_2}^0, \ldots, z_{t_n}^0) \in Y_0$, $z_{t_j}^0 \in Y_i(z^i)$, $t_j \in J_n$, $i \in J_n$, $j \in J_n$, то W_z представляется на основе отображений

$$W_z = \Gamma_W \circ \Gamma_Y(x), \tag{1}$$

где $\Gamma_Y \colon \mathbf{Z}_0 \to \mathbf{Y}$, $\Gamma_W \colon \mathbf{Y} \to \mathbf{W}$, $\mathbf{W} = \bigcup\limits_{z^i \in \mathbf{Z}_i, z_i^0 \in Y_i(z^i)} W_z$. Для любого $Y_0 \subset \mathbf{Y}$ справедливо $\Gamma_W(Y_0) = W_z \subset \mathbf{W}$, $w = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_{n_1}^1, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_{n_2}^2, \ldots, z_1^n, z_2^n, \ldots, z_{n_n}^n) \in W_z$.

Выполним операцию n-композиции для порождающих элементов множества W_z, замещая их элементами других базовых комбинаторных множеств. В результате k шагов получим обобщение множества W_z вида (1).

Пусть $z^{\mathrm{A}_i} = \{z_1^{\mathrm{A}_i}, z_2^{\mathrm{A}_i}, \ldots, z_{n_{\mathrm{A}_i}}^{\mathrm{A}_i}\} \in \mathbf{Z}_{\mathrm{A}_i}$, $\mathbf{Z}_{\mathrm{A}_i}$ — множество всех подмножеств множества

$$M_{\mathrm{A}_i} = \{a_1^{\mathrm{A}_i}, a_2^{\mathrm{A}_i}, \ldots, a_{m_{\mathrm{A}_i}}^{\mathrm{A}_i}\}, \quad \Gamma_{\mathrm{A}_i} \colon \mathbf{Y}^{i-1} \to \mathbf{Y}^i, \quad \mathbf{Y}^i = \bigcup_{z^{\mathrm{A}_i} \in \mathbf{Z}_{\mathrm{A}_i}} Y_{\mathrm{A}_i}, \quad Y_{\mathrm{A}_i} = \Gamma_{\mathrm{A}_i}(z^{\mathrm{A}_i}),$$

где

$$\begin{gathered} y = (z_{l_1}^{\mathrm{A}_i}, z_{l_2}^{\mathrm{A}_i}, \ldots, z_{l_{\mathrm{A}_i}}^{\mathrm{A}_i}) \in Y_{\mathrm{A}_i}, \qquad \mathbf{\Gamma}_i = \{\Gamma_{\mathrm{A}_i}\}, \qquad z_{\alpha_{i+1}}^{\mathrm{A}_i} \in Y_{\mathrm{A}_{i+1}}, \\ \mathrm{A}_i = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i), \qquad \alpha_1 \in J_n,\ \alpha_2 \in J_{n_{\alpha_1}},\ \ldots,\ \alpha_{i+1} \in J_{n_{\alpha_1 \ldots \alpha_i}}, \qquad \mathrm{A}_0 = \{0\}, i \in J_k, \\ m_i = m_0 \cdot m_{\mathrm{A}_1} \cdot \ldots \cdot m_{\mathrm{A}_{i-1}}, \quad \eta = \sum_{\alpha_1=1}^{n} \sum_{\alpha_2=1}^{n_1} \cdots \sum_{\alpha_{k-1}=1}^{n_{1\ldots k-2}} n_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}; \quad \Gamma_i \in \mathbf{\Gamma}_i, \quad i \in J_k. \end{gathered} \tag{2}$$

Определение. Комбинаторное множество W_z называется композиционным k-образом комбинаторных множеств Y_0, Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_n, Y_{11}, Y_{12}, $\ldots$, Y_{1n_1}, $\ldots$, $Y_{\underbrace{1\ldots1}_{k}}$, $\ldots$, $Y_{nn_1 \ldots n_{k-1}}$, порожденным множествами z^{k1}, z^{k2}, $\ldots$, $z^{k\eta}$, если

$$W_z = \Gamma_k \circ \Gamma_{k-1} \circ \ldots \circ \Gamma_0(z). \tag{3}$$

Y_0 называется множеством нулевого порядка, Y_{A_i} — множествами i-го порядка. Отображения $\Gamma_i \in \mathbf{\Gamma}_i$, $i \in J_k$, строятся на основе операции n-композиции. W_z вида (3) — базовое комбинаторное множество при $k = 0$.

Теорема 1. *Отображения $\Gamma_i \in \mathbf{\Gamma}_i$, $i \in J_k$, в (3) являются надъективными.*

Теорема 2. $\operatorname{Card} W_z = \sum\limits_{\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\} \subset J_n} \alpha_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r} \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{\mathrm{A}_i = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i)} c(Y_{\mathrm{A}_i})$, *где* $c(Y_{\mathrm{A}_i}) = \operatorname{Card}(Y_{\mathrm{A}_i})$, *$\mathrm{A}_i$ удовлетворяет (2), $\alpha_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r}$ — количество различных элементов $y \in Y_0$, порождаемых набором $z = \{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\} \in \mathbf{Z}_0$.*

Пусть композиционный k-образ комбинаторных множеств

$$Y_0 = P_{nm}, \tag{4}$$

$$Y_1 = P_{n_1 m_1}, \qquad Y_2 = P_{n_2 m_2}, \qquad \ldots, \qquad Y_n = P_{n_n m_n}, \tag{5}$$

$$Y_{11} = P_{n_{11}m_{11}}, \qquad Y_{12} = P_{n_{12}m_{12}}, \qquad \ldots, \qquad Y_{1n_1} = P_{n_{1n_1}m_{1n_1}},$$

$$Y_{21} = P_{n_{21}m_{21}}, \qquad Y_{22} = P_{n_{22}m_{22}}, \qquad \ldots,$$

$$Y_{2n_2} = P_{n_{2n_2}m_{2n_2}}, \qquad \ldots, \qquad Y_{nn_1} = P_{n_{n1}m_{n1}},$$

$$Y_{nn_2} = P_{n_{n2}m_{n2}}, \qquad \ldots, \qquad Y_{nn_n} = P_{n_{nnn}m_{nnn}}, \qquad \ldots, \tag{6}$$

$$Y_{\underbrace{1\ldots1}_{k}} = P_{n_{\underbrace{1\ldots1}_{k}}m_{\underbrace{1\ldots1}_{k}}}, \qquad \ldots, \qquad Y_{nn_1\ldots n_{k-1}} = P_{n_{nn_1\ldots n_{k-1}}m_{nn_1\ldots n_{k-1}}} \tag{7}$$

порожден множествами

$$B_1 = z^{k1} = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a^1_{n_{\underbrace{1\ldots1}_{k}}}\}, \qquad \ldots, \qquad B_\eta = z^{k\eta} = \{a_1^\eta, a_2^\eta, \ldots, a^\eta_{n_{nn_1\ldots n_{k-1}}}\}. \tag{8}$$

Здесь P_{nm} — множество перестановок с повторениями из n элементов, m из которых различны, $a_i^j \in R^1$, $i \in J_{n_{\mathrm{A}_k}}$, A_k, η удовлетворяют (2). Такой композиционный k-образ комбинаторных множеств назовем k-композицией перестановок и обозначим W_P^k. Здесь P_{nm} вида (4) является множеством нулевого порядка, множества (5)–(7) — множествами первого, второго, $\ldots$, k-го порядка. W_P^k состоит из элементов $w = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_\eta) \in W_P^k$, где $\overline{w}_i = (a^j_{s_1}, a^j_{s_2}, \ldots, a^j_{s_{n_{\mathrm{A}_k}}})$, $i, j \in J_\eta$, $(s_1, s_2, \ldots, s_{n_{\mathrm{A}_k}}) \in L_{n_{\mathrm{A}_k}}$, L_k — множество перестановок элементов J_k. В силу теоремы 2

$$V = \operatorname{Card} W_P^k = n! \cdot \prod_{i=1}^{k} \prod_{\mathrm{A}_i = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i)} n_{\mathrm{A}_i}!. \tag{9}$$

Из построения множества W_P^k следует, что его элементы являются также элементами P_{Nm^0}, порожденного $G = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a^1_{n_{\underbrace{1\ldots1}_{k}}}, \ldots, a_1^\eta, a_2^\eta, \ldots, a^\eta_{n_{nn_1\ldots n_{k-1}}}\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$, т. е. $W_P^k \subset P_{Nm^0}$, где

$$N = \sum_{\alpha_1=1}^{n} \sum_{\alpha_2=1}^{n_1} \cdots \sum_{\alpha_k=1}^{n_{1\ldots k-1}} n_{\alpha_1\ldots\alpha_k}. \tag{10}$$

Согласно [4] $f\colon W_P^k \to R^N$ $\forall w = (w_1, w_2, \ldots, w_N) \in W_P^k$, $x = f(w) = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^N$, $x_i = w_i$, $i \in J_N$. Образ W_P^k в R^N обозначим $E_{W_P^k}$. Элементы $E_{W_P^k} = f(W_P^k)$ — это векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = (e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_\eta})$, где $(i_1, i_2, \ldots, i_\eta) \in L_\eta$, $e_i = (a^j_{s_1}, a^j_{s_2}, \ldots, a^j_{s_{n_{\mathrm{A}_k}}})$, $(s_1, s_2, \ldots, s_{n_{\mathrm{A}_k}}) \in L_{n_{\mathrm{A}_k}}$, $i, j \in J_\eta$. Так как $W_P^k \subset P_{Nm^0}$, то $E_{W_P^k} \subset E_{Nm^0} = f(P_{Nm^0})$. Значит, $E_{W_P^k}$ обладает рядом свойств, справедливых для множества E_{Nm^0} [4], а именно:

1) точки $E_{W_P^k}$ принадлежат гиперплоскости $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i = \sum\limits_{i=1}^{\eta} \sum\limits_{a_j^i \in B_i} a_j^i$ в пространстве R^N. Здесь B_i — множества вида (8);

2) точки $E_{W_P^k}$ принадлежат $(N-1)$-сфере S_{N-1} $\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - \tau)^2 = r^2$, где $\tau = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{\eta} \sum\limits_{a_j^i \in B_i} a_j^i$, $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{\eta} \sum\limits_{a_j^i \in B_i} (a_j^i - \tau)^2$;

3) $E_{W_P^k}$ лежит на семействах параллельных плоскостей $\sum\limits_{t=1}^{s} x_{i_t} = \sum\limits_{t=1}^{s} g_{j_t}$, где $g_j \in G$, i_t, $j_t \in J_N$, $i_q \neq i_p$, $j_q \neq j_p$ при $q \neq p$; $q, p \in J_s$, $s, t \in J_N$;

4) $E_{W_P^k}$ симметрично относительно плоскостей вида $x_i - x_j = 0$, $i, j \in J_{m_0}$, или $i, j \in J_N \setminus J_{N-m_0}$, $i \neq j$, $m_0 = \min\limits_{l \in J_\eta} \operatorname{Card} B_l$.

Пример. Рассмотрим композиционный k-образ комбинаторных множеств $Y_0 = P_3$; $Y_1 = P_3$, $Y_2 = P_2$, $Y_3 = P_4$; $Y_{11} = P_2$, $Y_{12} = P_3$, $Y_{13} = P_2$, $Y_{21} = P_2$, $Y_{22} = P_3$, $Y_{31} = P_2$, $Y_{32} = P_2$, $Y_{33} = P_2$, $Y_{34} = P_2$, порожденный множествами $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4, 5\}$, $B_3 = \{6, 7\}$, $B_4 = \{8, 9\}$, $B_5 = \{10, 11, 12\}$, $B_6 = \{13, 14\}$, $B_7 = \{15, 16\}$, $B_8 = \{17, 18\}$, $B_9 = \{19, 20\}$. Это k-композиция перестановок при $k = 2$ — множество W_P^2. Элементами W_P^2 являются (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20), (2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20), (4, 5, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) и т. д. Согласно (9) $\operatorname{Card} W_P^2 = (2!)^8 \cdot (3!)^4 \cdot 4! = 7962624$. При отображении W_P^2 в R^{20} получим $E_{W_P^2} = f(W_P^2)$. Точки $E_{W_P^2}$ принадлежат плоскости $\sum\limits_{i=1}^{20} x_i = 210$ и лежат на сфере $\sum\limits_{i=1}^{20} (x_i - 10{,}5)^2 = 25{,}79^2$. Множество $E_{W_P^2}$ принадлежит семействам параллельных плоскостей: $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $\ldots$, $x_1 = 20$, $x_2 = 1$, $\ldots$, $x_2 = 20$; $x_{20} = 20$; $\ldots$; $x_1 + x_2 = 1 + 2$, $x_1 + x_2 = 1 + 3, \ldots$; $x_{19} + x_{20} = 19 + 20, \ldots$; $\sum\limits_{i=1}^{20} x_i = 210$. $E_{W_P^2}$ симметрично относительно плоскостей $x_1 - x_2 = 0$, $x_{19} - x_{20} = 0$.

Таким образом, введение композиционных k-образов комбинаторных множеств позволяет формально описывать широкие классы комбинаторных множеств на основе базовых комбинаторных множеств с известными описаниями и построенных отображений. Предложенный способ, с одной стороны, обладает достаточной универсальностью за счет использования в результирующем множестве комбинаторных свойств базовых комбинаторных множеств. С другой стороны, композиционные k-образы комбинаторных множеств можно весьма просто реализовать конструктивно, что позволяет применять их при математическом моделировании и решении различных комбинаторных задач.

1. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. – Москва: Наука, 1990. – 504 с.
2. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.
3. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. – Москва: Мир, 1982. – 558 с.
4. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
5. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. – Москва: Наука, 1977. – 320 с.
6. *Пойа Дж.* Комбинаторные вычисления для групп, графов и химических соединений // Перечислительные задачи комбинаторного анализа. – Москва: Мир, 1979. – С. 36–138.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступило в редакцию 03.03.2008