

тельного воздуха. Из рисунка видно, что с ростом отношения  $G_d/G_{вх}$  относительные потери давления в канале увеличиваются, причём особенно заметно при  $G_d/G_{вх} > 0,06...0,08$ .

### Выводы

Выполненное исследование показывает, что закономерности течения закрученного потока в цилиндрическом канале при наклонно-тангенциальной закрутке потока ( $\beta = 60^\circ$ ) и дополнительной подаче воздуха в торцевую область канала отличаются от результатов, полученных при классической схеме тангенциальной закрутки ( $\beta = 0^\circ$ ). Можно отметить следующие особенности гидродинамики исследованного способа закрутки потока:

- ◆ при больших значениях отношения  $G_d/G_{вх}$ , подача дополнительного воздуха в торцевую (донную) область канала уменьшает угол закрутки потока в области около тангенциального завихрителя и способствует снижению несимметричности радиального профиля полного давления;

- ◆ закрученный поток в канале является азимутально-неравномерным; подача дополнительного потока может служить эффективным средством гидродинамического воздействия на

поток, изменения степени закрутки потока и теплообмена в канале;

- ◆ с увеличением расхода дополнительного воздуха потери полного давления в тангенциальном завихрителе и в канале возрастают; по длине канала относительные потери полного давления особенно заметно снижаются во второй половине канала.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Шукин В.К., Халатов А.А.* Теплообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. — М.: Машиностроение, 1982. — 200 с.
2. *Халатов А.А.* Теория и практика закрученных потоков. — К.: Наук. думка, 1989. — 192 с.
3. *Hedlund C.R., Ligrani P.M.* Local swirl chamber heat transfer and flow structure at different Reynolds numbers // *Journal of Turbomachinery*. — 2000. — Vol. 122. — P. 375–385.
4. *Хэй Н., Вест П.Д.* Теплообмен в трубе с закрученным потоком // *Теплопередача*. Сер. С. — 1975. — № 3. — С.100–106.

Получено 14.01.2009 г.

УДК 539.19

ДРЕМОВ В.В.

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры*

## ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛОТЫ НА ЗАТВЕРДЕВАНИЕ ПЛОСКОГО СЛИТКА

Варіаційним за методом розв'язано задачу твердіння металу у плоскій клиноподібній виливниці при наявності внутрішніх джерел теплоти з визначенням положення фронту кристалізації у будь-який момент часу.

Вариационным методом решена задача затвердевания металла в плоской клинообразной изложнице при наличии внутренних источников теплоты с определением положения фронта кристаллизации в любой момент времени.

The problem of metal solidification in a flat wedge-shaped mould influenced by internal heat sources was solved using variational method. The time dependence of the front of crystallization was obtained.

$A_1, B, D_1, E, G_1, K_1, A_2, B_2, D_2, G_2, K_2$  – константы интегрирования по радиусу;

$a_1$  и  $a_2$  – коэффициент температуропроводности жидкого и твердого металла;

$c_{v1}$  и  $c_{v2}$  – удельные теплоемкости жидкого и твердого металла;

$f'$  и  $f''$  – первая и вторая производные;

$Q_1, M_1, N_1, P_1, S_1, W_1, Q_2, M_2, P_2, N_2, W_2$  – константы интегрирования по  $r$  и  $\varphi$ ;

$q$  – теплота, выделяемая при прохождении тока;

$j$  – плотность тока;

$L$  – функционал или лагранжиан;

$L_1$  – теплота кристаллизации;

$R_1$  и  $R_2$  – нижний и верхний радиусы изложницы;

$r, z$  – радиальная и продольная координаты точек внутри изложницы;

$t$  – время;

$t_\phi$  – время на фронте затвердевания;

$T_1$  и  $T_2$  – температуры жидкого и твердого металла;

$T_k$  – температура кристаллизации;

$T_n$  – начальная температура жидкого металла;

$T_\pi$  – температура боковой поверхности и дна изложницы;

Различные воздействия на жидкий металл в момент его затвердевания могут привести к существенному улучшению структуры металла и качества отливки. Поэтому большое число экспериментальных работ посвящено изучению этой проблемы, например [1–3]. Теоретических работ, исследующих эту проблему, намного меньше, и они в основном рассматривают выделение теплоты при фазовом переходе в твердое состояние [4]. Задачи с посторонними источниками и стоками теплоты возникают при рассмотрении процессов кристаллизации в электрошлаковой ванне при электродуговом переплаве [5]. В упомянутой работе описана методика численного решения уравнений теплопроводности с учетом выделения Джоулевой теплоты и вычислены положения границ линий ликвидуса и солидуса в цилиндрической области на фиксированный момент времени.

В предлагаемой работе теоретически решается задача о влиянии внутренних источников теплоты (электрический ток, химические добавки) на кристаллизацию металла в плоской клинообразной изложнице [6], образованной двумя плоскостями, расположенными под малым углом  $2\alpha$ .

$T_r^0$  и  $T_t^0$  – неварьируемые производные от температуры по радиусу и по времени;

$T_r, T_{rr}, T_\varphi, T_{\varphi\varphi}, T_t$  – первые и вторые производные по радиусу, углу и времени;

$\alpha$  – угол конусности боковых стенок изложницы;

$\delta L$  – вариация функционала;

$\varepsilon$  – толщина затвердевшего металла;

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности жидкого и твердого металла;

$\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности жидкого и твердого металла;

$\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – электропроводности жидкого и твердого металла;

$v_r$  – радиальная составляющая скорости жидкого металла;

$\varphi$  – азимутальная координата;

$\varphi_\phi$  и  $r_\phi$  – азимутальная и радиальная координаты точки на фронте затвердевания.

#### Индексы:

к – кристаллизация;

н – начальное;

п – поверхность изложницы;

ф – фронт.

Сверху и снизу объем изложницы ограничен цилиндрическими поверхностями радиусами  $R_2$  и  $R_1$ . Задача рассматривается в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . На боковой стенке изложницы  $\varphi = \alpha$ , и на дне изложницы  $r = R_1$ , полагаем  $T = T_\pi = \text{const}$  меньше температуры кристаллизации  $T_k$ . На поверхности залитого в изложницу металла  $r = R_2$ , принимаем  $T_n = \text{const}$ . Боковая поверхность  $\varphi = \alpha$  ограничивает область кристаллизации сбоку, и при  $t \geq 0$  она имеет температуру  $T_n$ . При  $t > 0$  начинается процесс кристаллизации, и на фронте кристаллизации  $T = T_k$ .

Предполагаем, что температура не зависит от координаты  $z$ . Вследствие малого угла между осью и боковой стенкой изложницы пренебрегаем поперечной составляющей скорости  $v_\varphi$ . Тогда уравнение теплопереноса [6], записанное для области жидкого металла ( $0 < \varphi < \varphi_\phi, r_\phi < r < R_2$ ), примет вид

$$\rho_1 c_{v1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \frac{j^2}{\sigma_1} + \lambda_1 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (1)$$

Аналогичное уравнение при  $v_r = 0$  будет описывать температурное поле в твердой фазе для области  $\varphi_\phi < \varphi < \alpha$ ,  $R_1 < r < r_\phi$ :

$$\rho_2 c_{v2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) = \frac{j^2}{\sigma_2} + \lambda_2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2)$$

Толщину затвердевшей корки для любого радиуса можно найти по формуле

$$\varepsilon(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = r_\phi(t_\phi) \left[ \alpha - \varphi_\phi(t_\phi) \right]. \quad (3)$$

Предполагаем, что хорда совпадает с дугой при малых длинах дуги, что соответствует малому углу  $\alpha$ .

В момент  $t = 0$  твердая фаза отсутствует, а  $T_1(r, \varphi, 0) = T_n$  при  $R_2 > r > R_1$  и  $\alpha > \varphi > 0$ . При  $\varphi = \alpha$ ,  $r = R_1$  и  $t > 0$  имеем:

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_k; \quad (4)$$

$$T_2(r, \alpha, t) = T_n. \quad (5)$$

На фронте кристаллизации тепловой контакт считается идеальным, поэтому при  $r = r_\phi$  и  $\varphi = \varphi_\phi$  температуры жидкости и твердой фазы равны температуре кристаллизации

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_2(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_k. \quad (6)$$

На движущемся фронте фазового перехода выделяется скрытая теплота кристаллизации  $L_1$ , которая отводится через твердую фазу вместе с теплотой перегрева [7]:

$$\lambda_2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right)_\phi = L_1 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \lambda_1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_\phi. \quad (7)$$

Из уравнений (1–3) и граничных условий (4–7) определяем две неизвестные функции  $T_1(r, \varphi, t)$ ,  $T_2(r, \varphi, t)$ , а из уравнения теплового баланса (7) –  $\varepsilon(t)$ .

Разделив на  $\lambda_1$  уравнение (1) и введя коэффициент температуропроводности, получим:

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{v_r}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} = q + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2}. \quad (8)$$

Приближенным решением стационарного уравнения по  $r$ , полученного из уравнения (8), является функция [6]

$$T_1 = T_n - \frac{R_2 - r}{R_2 - r_\phi} (T_n - T_k). \quad (9)$$

Из стационарного уравнения, полученного из (8), после введения новых переменных в виде  $T_r = \partial T / \partial r$ ,  $T_{\varphi\varphi} = \partial^2 T / \partial \varphi^2$ ,  $T_{rr} = \partial^2 T / \partial r^2$  и умножения его на  $r$  будем иметь:

$$\frac{v_r}{a_1} r T_r - T_r - r T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} - r q = 0. \quad (10)$$

Функционал, соответствующий этому уравнению, запишем в виде

$$\int_{r_\phi}^{R_2} \int_0^{\varphi_\phi} \left[ 2 \frac{v_r}{a_1} r T_r^0 T + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 - q r T \right] dr d\varphi = L, \quad (11)$$

где  $T_r^0 = \partial T^0 / \partial r$ , а индекс 0 при  $T_r$  обозначает неварьируемую производную от температуры.

Ищем функцию, минимизирующую функционал (11), в виде

$$T = \left[ T_n - \frac{R_2 - r}{R_2 - r_\phi} (T_n - T_k) \right] f(\varphi). \quad (12)$$

Вычисляя производные по  $r$  и  $\varphi$ , получим

$$T_r = \frac{T_n - T_k}{R_2 - r_\phi} f(\varphi),$$

$$T_\varphi = \left[ T_n - \frac{R_2 - r}{R_2 - r_\phi} (T_n - T_k) \right] f'(\varphi). \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (11) и интегрируя по  $r$ , находим:

$$\int_0^{\varphi_\phi} \left\{ A_1 f^0(\varphi) f(\varphi) + E f^2(\varphi) + B [f'(\varphi)]^2 - 2 D_1 f(\varphi) \right\} d\varphi = L, \quad (14)$$

где

$$A_1 = \frac{v_r}{a_1} (T_n - T_k) \times \left[ T_n (R_2 + r_\phi) - \frac{R_2 + 2r_\phi}{3} (T_n - T_k) \right];$$

$$B = T_H^2 \ln \frac{R_2}{r_\phi} - 2T_H (T_H - T_K) \left[ \frac{R_2}{R_2 - r_\phi} \ln \frac{R_2}{r_\phi} - 1 \right] +$$

$$+ (T_H - T_K)^2 \left[ \frac{R_2^2 \ln \frac{R_2}{r_\phi}}{(R_2 - r_\phi)^2} - \frac{3R_2 - r_\phi}{2(R_2 - r_\phi)} \right];$$

$$E = \frac{R_2 + r_\phi}{2(R_2 - r_\phi)} (T_H - T_K)^2;$$

$$D_1 = \frac{q}{2} \left( T_H (R_2^2 - r_\phi^2) - \frac{R_2^2 + R_2 r_\phi - 2r_\phi^2}{3} (T_H - T_K) \right).$$

Функцию  $f(\varphi)$  выбираем из условия минимума функционала (14), что соответствует обращению в ноль вариации по  $\varphi$ :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial f(\varphi)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial L}{\partial f'(\varphi)} \right) = 0. \quad (15)$$

Взяв вариацию, получим

$$f''(\varphi) - G_1 f(\varphi) + K_1 = 0, \quad (16)$$

где  $G_1 = (A_1 + 2E) / 2B$ ,  $K_1 = D_1 / B$ .

Общее решение однородного уравнения, полученного из (16) при  $K_1 = 0$ , будет

$$f_1(\varphi) = C_1 \operatorname{ch} \varphi \sqrt{G_1} + C_2 \operatorname{sh} \varphi \sqrt{G_1}. \quad (17)$$

Частное решение неоднородного уравнения (16) можно представить в виде

$$f_2(\varphi) = \frac{K_1}{G_1}. \quad (18)$$

Таким образом, полное решение уравнения (16) имеет вид

$$f(\varphi) = C_1 \operatorname{ch} \varphi \sqrt{G_1} + C_2 \operatorname{sh} \varphi \sqrt{G_1} + \frac{K_1}{G_1}. \quad (19)$$

Оно описывает температуру в жидкой фазе, и потому константы должны находиться из граничных условий для жидкости:

$$T_1 = T_K \text{ при } \varphi = \varphi_\phi \text{ и } \partial T / \partial \varphi = 0 \text{ при } \varphi = 0. \quad (20)$$

$$\text{При этом } C_1 = \frac{1 - K_1 / G_1}{\operatorname{ch} \varphi_\phi \sqrt{G_1}}, \quad C_2 = 0.$$

Подставляя (19) в (12) и учитывая (20), найдем

$$T_1 = \left[ T_H - \frac{R_2 - r}{R_2 - r_\phi} (T_H - T_K) \right] \times \left[ \left( 1 - \frac{K_1}{G_1} \right) \frac{\operatorname{ch} \varphi \sqrt{G_1}}{\operatorname{ch} \varphi_\phi \sqrt{G_1}} + \frac{K_1}{G_1} \right]. \quad (21)$$

Решение нестационарного уравнения теплопроводности (8) находится тем же методом, что и при нахождении зависимости по  $\varphi$ . Функционал, соответствующий уравнению (8), имеет вид

$$L = \int_0^{\varphi_\phi} \int_0^{R_2} \int_{r_\phi}^r \left[ \frac{2r}{a_1} T T_i^0 + 2 \frac{\nu_r}{a_1} r T_r^0 T - 2qrT + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 \right] dr d\varphi dt. \quad (22)$$

Здесь введены те же обозначения производных, что и при записи уравнения (10), а производная по времени обозначена через  $T_t$ . Решение ищем в виде функции (21), умноженной на неизвестную функцию  $f(t)$ :

$$T = \left[ T_H - \frac{R_2 - r}{R_2 - r_\phi} (T_H - T_K) \right] \times \left[ \left( 1 - \frac{K_1}{G_1} \right) \frac{\operatorname{ch} \varphi \sqrt{G_1}}{\operatorname{ch} \varphi_\phi \sqrt{G_1}} + \frac{K_1}{G_1} \right] f(t). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и интегрируя по  $r$  и  $\varphi$ , получим

$$L = \int_0^{\varphi_\phi} \left\{ Q_1 f(t) [f'(t)]^0 + M_1 f^0(t) f(t) - N_1 f(t) + (P_1 + S_1) f^2(t) \right\} d\varphi. \quad (24)$$

Взяв вариацию от (24) по  $f(t)$  и приравняв ее нулю, получим:

$$f'(t) + \frac{W_1}{Q_1} f(t) - \frac{N_1}{Q_1} = 0, \quad (25)$$

где  $W_1 = M_1 + 2P_1 + 2S_1$ .

Решением неоднородного уравнения (25) является функция

$$f(t) = \frac{N_1}{W_1} + C e^{-\frac{W_1 t}{Q_1}}. \quad (26)$$

Для нахождения константы  $C$  запишем полное решение для температуры  $T_1$  в жидком металле, которое получится при подстановке (26) в (23). Учитывая, что на фронте кристаллизации  $T_1 = T_k$  при  $t = t_\phi$ ,  $\varphi = \varphi_\phi$ ,  $r = r_\phi$ , получим

$$C = \left(1 - \frac{N_1}{W_1}\right) e^{\frac{W_1 t_\phi}{Q_1}}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), а результат в (23), имеем

$$T_1 = \left[ T_n - \frac{R_2 - r}{R_2 - r_\phi} (T_n - T_k) \right] \left[ \left(1 - \frac{K_1}{G_1}\right) \frac{\text{ch}\varphi\sqrt{G_1}}{\text{ch}\varphi_\phi\sqrt{G_1}} + \frac{K_1}{G_1} \right] \times \left[ \frac{N_1}{W_1} + \left(1 - \frac{N_1}{W_1}\right) e^{-\frac{W_1(t-t_\phi)}{Q_1}} \right]. \quad (28)$$

Аналогичным методом найдем распределение температуры в твердой фазе. Для этого преобразуем уравнение (2), умножив его на  $r$  и разделив на  $\lambda_2$ :

$$\frac{r}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\partial T_2}{\partial r} - r \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} - r q_2 = 0. \quad (29)$$

Обозначив производные как в (10) и опустив индекс 2 при температуре, перепишем (29) в виде

$$\frac{r}{a_2} T_t - T_r - r T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} - r q_2 = 0. \quad (30)$$

Стационарное решение (30) получаем при граничных условиях

$$T_2 = T_k \text{ при } r = r_\phi, \varphi = \varphi_\phi, \\ T_2 = T_n \text{ при } \varphi = \alpha, r = (R_1 + R_2)/2. \quad (31)$$

Запишем функционал, соответствующий уравнению (30), в виде

$$\int_{R_1}^{t_\phi} \int_{\varphi_\phi}^{\alpha} \left[ -r T_r^2 - \frac{1}{r} T_\varphi^2 + 2r q_2 T \right] dr d\varphi = L. \quad (32)$$

Ищем функцию, минимизирующую функционал (32), в виде

$$T = \left[ T_k - \frac{r_\phi - r}{r_\phi - R_1} (T_k - T_n) \right] f(\varphi). \quad (33)$$

Вычислив производные по  $r$  и  $\varphi$  от (33), подставим их в (32). Интегрируя по  $r$ , найдем

$$\int_{\varphi_\phi}^{\alpha} \left\{ -A_2 f^2(\varphi) f'(\varphi) - B_2 [f'(\varphi)]^2 + 2D_2 f(\varphi) \right\} d\varphi = L, \quad (34)$$

где

$$A_2 = \frac{(T_k - T_n)^2 (r_\phi + R_1)}{2(r_\phi - R_1)},$$

$$D_2 = \frac{q_2}{2} \left( T_k (r_\phi^2 - R_1^2) - \frac{r_\phi (r_\phi + R_1) - 2R_1^2}{3} (T_k - T_n) \right),$$

$$B_2 = T_k^2 \ln \frac{r_\phi}{R_1} - 2T_k (T_k - T_n) \left( \frac{r_\phi}{r_\phi - R_1} \ln \frac{r_\phi}{R_1} - 1 \right) + (T_k - T_n)^2 \left[ \frac{r_\phi^2}{(r_\phi - R_1)^2} \ln \frac{r_\phi}{R_1} - \frac{2r_\phi}{r_\phi - R_1} + \frac{r_\phi + R_1}{2(r_\phi - R_1)} \right].$$

Функция  $f(\varphi)$  выбирается так, чтобы интеграл (34) принимал минимальное значение. Этому условию удовлетворяет функция, обращающая в нуль вариацию функционала по  $f(\varphi)$  (15).

Взяв вариацию и учитывая, что  $G_2 = A_2 / B_2$ ,  $K_2 = D_2 / B_2$ , получим

$$f''(\varphi) - G_2 f(\varphi) + K_2 = 0. \quad (35)$$

Полное решение неоднородного уравнения (35) имеет вид

$$T_2 = \left[ T_k - \frac{r_\phi - r}{r_\phi - R_1} (T_k - T_n) \right] \times \left( C'_1 \text{ch}\varphi\sqrt{G_2} + C'_2 \text{sh}\varphi\sqrt{G_2} + \frac{K_2}{G_2} \right). \quad (36)$$

Найдем константы  $C'_1$  и  $C'_2$  из граничных условий (31):

$$C'_1 = \frac{-\left(\frac{T_H}{T_K} - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{sh} \varphi_\phi \sqrt{G_2} + \left(1 - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{sh} \alpha \sqrt{G_2}}{\text{sh}(\alpha - \varphi_\phi) \sqrt{G_2}};$$

$$C'_2 = \frac{-\left(1 - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{ch} \alpha \sqrt{G_2} + \left(\frac{T_H}{T_K} - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{ch} \varphi_\phi \sqrt{G_2}}{\text{sh}(\alpha - \varphi_\phi) \sqrt{G_2}}. \quad (37)$$

Подставляя их в (36), найдем

$$T_2 = \left[ T_K - \frac{r_\phi - r}{r_\phi - R_1} (T_K - T_H) \right] \left[ \frac{\left(\frac{T_H}{T_K} - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{sh}(\varphi_\phi - \varphi) \sqrt{G_2} + \left(1 - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{sh}(\alpha - \varphi) \sqrt{G_2}}{\text{sh}(\alpha - \varphi_\phi) \sqrt{G_2}} + \frac{K_2}{G_2} \right]. \quad (38)$$

Для нахождения зависимости температуры  $T_2$  от времени запишем функционал, соответствующий уравнению (30):

$$L = \int_0^t \int_{\varphi_\phi}^{\varphi} \int_{R_1}^r \left\{ \frac{2r}{a_2} T T_t^0 + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 - 2q_2 r T \right\} dr d\varphi dt. \quad (39)$$

Решение (30) ищем в виде функции (38), умноженной на неизвестную функцию  $f(t)$ . Подставляя ее в (39) и интегрируя по  $r$  и  $\varphi$ , получим

$$L = \int_0^{t_\phi} \left\{ Q_2 f(t) [f'(t)]^0 + M_2 f^2(t) + P_2 f^2(t) - N_2 f(t) \right\} dt. \quad (40)$$

Взяв вариацию от (40) по  $f(t)$  и приравняв ее нулю, получим с учетом  $W_2 = 2(M_2 + P_2)$ :

$$f'(t) + \frac{W_2}{Q_2} f(t) - \frac{N_2}{Q_2} = 0. \quad (41)$$

Решением неоднородного уравнения (41) является функция

$$f(t) = \frac{N_2}{W_2} + C e^{-\frac{W_2 t}{Q_2}}. \quad (42)$$

Для нахождения константы  $C$  учтем (42) в (38) и условия на фронте кристаллизации:  $T_2 = T_K$  при  $t = t_\phi$ ,  $\varphi = \varphi_\phi$ ,  $r = r_\phi$ , получим

$$C = \left(1 - \frac{N_2}{W_2}\right) e^{\frac{W_2 t_\phi}{Q_2}}. \quad (43)$$

Учитывая (43), (42) и (38), найдем температуру в твердой фазе

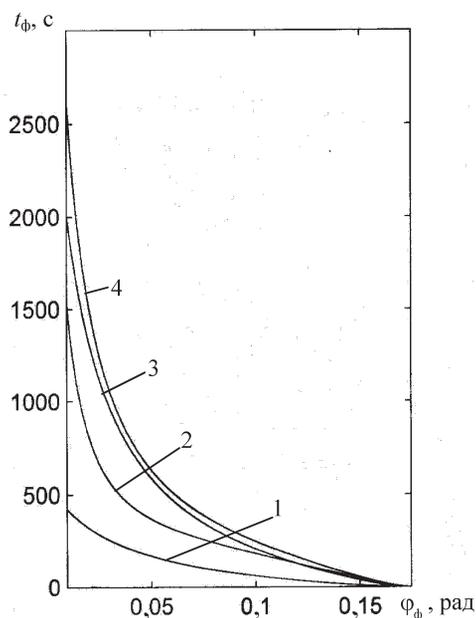
$$T_2 = \left[ T_K - \frac{r_\phi - r}{r_\phi - R_1} (T_K - T_H) \right] \left[ \frac{\left(1 - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{sh}(\alpha - \varphi) \sqrt{G_2} + \left(\frac{T_H}{T_K} - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{sh}(\varphi_\phi - \varphi) \sqrt{G_2}}{\text{sh}(\alpha - \varphi_\phi) \sqrt{G_2}} + \frac{K_2}{G_2} \right] \times \left[ \frac{N_2}{W_2} + \left(1 - \frac{N_2}{W_2}\right) e^{-\frac{W_2(t-t_\phi)}{Q_2}} \right]. \quad (44)$$

Скорость движения фронта кристаллизации найдем из уравнения (7)

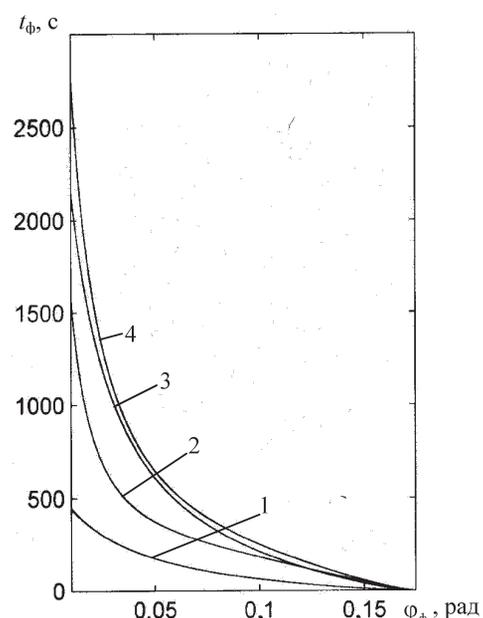
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{L_1 \rho} \left[ \lambda_2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right)_\phi - \lambda_1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_\phi \right]. \quad (45)$$

Вычисляя производные по  $\varphi$  от  $T_1$  (28) и  $T_2$  (44) и подставляя их в (45) с учетом (3), получим

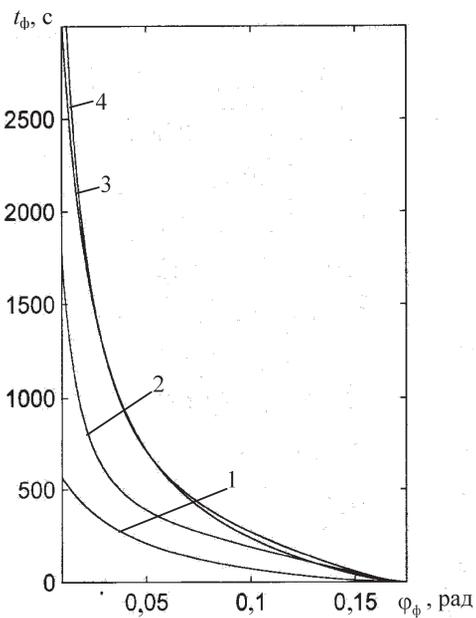
$$r_\varphi \frac{dr_\varphi}{dt} (\alpha - \varphi_\varphi) = \frac{T_k}{L_1 \rho} \left\{ \lambda_2 \frac{-\sqrt{G_2} \left(1 - \frac{K_2}{G_2}\right) \text{ch}(\alpha - \varphi_\varphi) \sqrt{G_2} - \left(\frac{T_H}{T_k} - \frac{K_2}{G_2}\right)}{\text{sh}(\alpha - \varphi_\varphi) \sqrt{G_2}} - \lambda_1 \left(1 - \frac{K_1}{G_1}\right) \sqrt{G_1} \text{th} \varphi_\varphi \sqrt{G_1} \right\}. \quad (46)$$



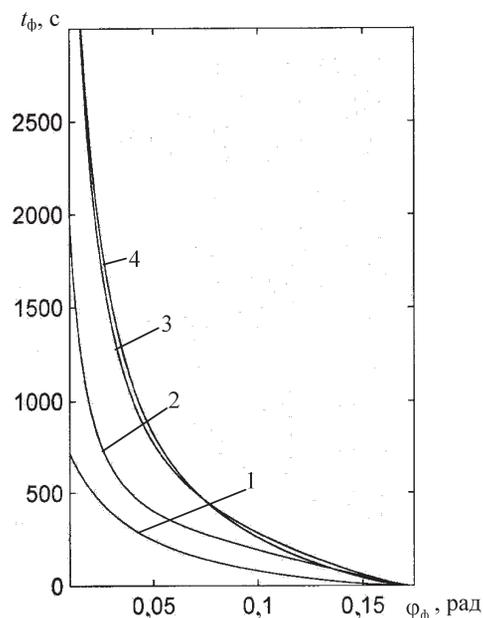
a



б



v



z

**Рисунок. Зависимость  $t_\varphi(\varphi_\varphi)$  при следующих значениях параметров:**  
**a** –  $q_1 = q_2 = 10 \text{ K/m}^2$ ; **б** –  $10^3$ ; **в** –  $5 \cdot 10^3$ ; **г** –  $8 \cdot 10^3$ ; **1** –  $r_\varphi = 1,3 \text{ м}$ ; **2** –  $1,6$ ; **3** –  $1,9$ ; **4** –  $2,1$ .

Решая уравнение (46), найдем время, при котором фронт кристаллизации достигает координат  $r_\phi$ ,  $\varphi_\phi$ :

$$t_\phi = \frac{(r_\phi^2 - R_1^2)}{2T_k C_*} L_1 \rho (\alpha - \varphi_\phi), \quad (47)$$

где  $C_*$  обозначает выражение в фигурных скобках в формуле (46).

По формуле (47) выполнены численные расчеты и построены графики зависимости  $t_\phi(\varphi_\phi)$  для разных координат  $r_\phi$  при следующих размерах изложницы и параметрах стали:  $R_1 = 1,2$  м,  $R_2 = 2,2$  м,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $T_H = 1833$  К,  $T_K = 1733$  К,  $T_\Pi = 1433$  К,  $v_r = 10^{-3}$  м/с,  $\alpha_1 = 4,5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\lambda_1 = 26,5$  Вт/мК,  $\lambda_2 = 30,3$  Вт/мК,  $\rho = 7,31 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $L_1 = 2,72 \cdot 10^5$  Дж/кг.

На рисунке представлены графики  $t_\phi(\varphi_\phi, r_\phi)$  для  $q_1 = q_2 = 10; 10^3; 5 \cdot 10^3; 8 \cdot 10^3$  К/м<sup>2</sup>, что соответствует плотностям тока 2,24; 32; 50; 63,2 А/см<sup>2</sup>. Кривые на каждом рисунке соответствуют значениям  $r_\phi = 1,3; 1,6; 1,9; 2,1$  м. Видно, что фронт затвердевания движется вначале быстро, а затем замедляется. Такое поведение для обратной функции  $r_\phi(t_\phi)$  соответствует закону квадратного корня. Кроме того, видно, что чем больше плотность тока в металле, тем больше выделение джоулевой теплоты и тем дольше идет процесс затвердевания.

На графиках (рисунки в, г) кривые 3 и 4 практически сливаются. Это объясняется тем, что при плотностях тока, больших 50 А/см<sup>2</sup>, выделяемая джоулева теплота становится соизмеримой с тепловым потоком, идущим от фронта затвердевания, что существенно замедляет процесс затвердевания.

### Выводы

Таким образом, регулируя плотность тока, текущего через слиток в области фронта затвердевания, можно управлять скоростью процесса затвердевания с целью улучшения структуры металла и устранения возможности образования усадочных раковин в центральных областях слитка. Этот способ управления затвердеванием описан в патенте [8].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Носоченко О.В., Троцан А.И., Казачков Е.А. и др. Рациональный режим обработки стали в промежуточном ковше порошковыми и монолитными проволоками. Тезисы докладов на международной научно-технической конференции “Прогрессивные технологии непрерывной разливки стали” – Донецк: XXI век, Украина, 2002. – С. 34.
2. Бородецкий И.Л., Троцан А.И., Мельник С.Г. Зависимость загрязненностей непрерывнолитой заготовки неметаллическими включениями от вариантов внепечного рафинирования расплава. Тезисы докладов на международной научно-технической конференции “Прогрессивные технологии непрерывной разливки стали” – Донецк: XXI век, Украина, 2002. – С. 34–35.
3. Круковский П.Г. Методика и результаты решения инверсных обратных задач нелинейной нестационарной проводности. – Сб. тр. Тепло-массообмен – VI. – Минск, 1980. – С. 132–135.
4. Самойлович Ю.А., Ясницкий Л.Н., Кабаков З.К. Математическое моделирование тепловых и гидродинамических явлений процесса затвердевания непрерывного слитка // Известия Академии Наук СССР. Металлы. – 1982. – С. 62–68.
5. Недопекин Ф.В. Математическое моделирование гидродинамики и теплопереноса в слитках. – Ижевск, 1995. – С. 72, 110, 140.
6. Дремов В.В., Недопекин Ф.В. Аналитический расчет затвердевания расплава в изложнице // Инж.-физ. журнал. – 2002. – Т. 75, № 6. – С. 179–184.
7. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. – М.: Наука, 1975. – С. 20.
8. Дрьомов В.В., Троцан А.И., Крейденко Ф.С. та інші. Спосіб обробки рідкого металу в процесі кристалізації при безперервному розливанні. Декларац. Патент 55858А, С22В4/00, 15.04.2003. Бюл. № 4.

Получено 09.06.2008 г.