УДК 536.24:533:532.526:533.001.16

Репухов В.М.,[1] Сигорских С.В.[2]

[1]*Институт технической теплофизики НАН Украины*

[2]*Украинская академия наук*

РАДИАЦИОННЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ НА ГРАНИЦЕ НЕОДНОРОДНЫХ (АНИЗОТРОПНЫХ) СРЕД

Подано однозначний зв'язок властивостей анізотропного середовища (тензора переломлення) з формою регулярних променів, їх кривизною та крученням з переносом енергії випромінювання в неперервному середовищі і на мережі двох середовищ. Розглянуто граничні умови, закони на поверхні розриву регулярності променів і різноманітні їх форми.

Представляется однозначная связь свойств анизотропной среды (тензора преломления) с формой регулярных лучей, их кривизны и кручения с переносом энергии излучения в непрерывной среде и на границе двух сред. Рассмотрены граничные условия, законы на поверхности разрыва регулярности лучей и различные их формы.

The unique connection of the aelotropic medium properties (refraction thensor) with the ray regulary form, it's curvature and twist with transport of the energy radiation in the continious medium and on the boundary surfase of two mediums are established. The boundary conditionals, the laws on the ray regularity discontinuty surface and it's different forms are considerated.

$\vec{e}(\vec{n}, \vec{s} = \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ – трехмерные единичные векторы;

$I_{\nu\tau}$ – спектральная яркость транспортируемого излучения в направлении луча света;

$k_1(s)$ и $k_2(s)$ – кривизна и кручение луча в виде функций его длины s (натуральное уравнение);

$L_V(a_*)$ и $R_D(a_*)$ – функционалы левой и правой части транспортного уравнения;

$N_\nu, L\vec{N}_\nu, LN_{\nu x}, LN_{\nu y}, LN_{\nu z}, \left(LN_{\nu\tau}, LN_{\nu\nu}, LN_{\nu\beta}\right)$, и LN_n – спектральные тензор второго ранга и трехмерный вектор преломления с проекциями в ортонормированном базисе Френе (Декарта) и его полная проекция по направлениям и частотам;

t, x, y и z – координаты четырехмерного ортонормированного базиса Декарта;

$\vec{V}(u, \nu, w)$, $\vec{V} \equiv \vec{c}_\nu$ и $\vec{V}_0 \equiv \vec{c}_0$ – трехмерные векторы скорости с проекциями на координатные оси в текущей точке, скорости света в среде и вакууме;

u_n – полная плотность энергии излучения по направлениям и частотам;

α и α_* – координаты, принимающие t, x, y и z, причем вторая в соответствии с индексом;

$\Sigma = c_n u_n$ – (полная) падающая энергия на единице площади границы элемента объема.

1. Введение

Для описания переноса энергии излучения в астрофизике, теплофизике, динамике излучающего газа и других областях широко используются методы геометрической оптики в предположении прямолинейности луча с постоянной скоростью света в среде, характеризуемой показателем преломления [1-4]. Они обобщаются и существенно расширяются на неоднородные (анизотропные) среды, если влияние сплошной среды на скорость распространения излучения (света) на регулярном криволинейном луче (в малой окрестности простая дуга) учитывается с помощью тензора преломления второго ранга, элементы которого в общем случае зависят от времени и которому соответствует векторный показатель преломления. При этом направление луча в общем случае среды отличается от направления опорного прямого луча в вакууме [5-7].

2. Основные результаты

2.1. Тензор преломления и уравнения излучения

Тензор преломления второго ранга N_ν с матрицей $[n_{\nu ij}]$, трехмерные единичные векторы

$\vec{e}(\vec{n}, s = \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$, четырех $\vec{V}_T(1, u, \nu, w)$ и трехмерные в среде $\vec{V} \equiv \vec{c}_\nu$ и вакууме $\vec{V}_0 \equiv \vec{c}_0$ скорости позволяют записать связи скоростей, вектор показателя преломления, условия прямолинейности лучей и постоянства скорости излучения в вакууме, а также закон Кирхгофа соответственно

$$N_\nu \vec{c}_\nu = E\vec{c}_0 \text{ или } \vec{n}_\nu \equiv \vec{c}_0 / c_{\nu\tau} = N_\nu \vec{\tau},\ \operatorname{div}(N_\nu \vec{c}_\nu) = \operatorname{div}\vec{c}_0 = 0 \text{ и } \frac{\eta_\nu}{k_\nu} = (\operatorname{mod} N_\nu \vec{\tau})^2 I_{b\nu 0}, \tag{1}$$

где в общем случае опорный луч в вакууме отличается от луча в неоднородной среде; обобщаются понятия плотности объемного излучения η_ν, показатель преломления n_υ и коэффициент поглощения k_υ, а локальное термодинамическое равновесие рассматривается вдоль каждого луча.

Из этих уравнений следуют вектор-столбец преломления, уравнение неразрывности спектрального луча в неоднородной среде и матричное равенство для дивергенции скорости в виде

$$E\vec{LN}_\nu \equiv N_\nu^{-1}\operatorname{div}N_\nu,\ N_\nu^{-1}\operatorname{div}N_\nu \vec{c}_\nu + E\operatorname{div}\vec{c}_\nu = 0 \text{ и } (\vec{LN}_\nu \circ \vec{c}_{\nu e}) + \operatorname{div}\vec{c}_\nu = 0, \tag{2}$$

где тензор преломления согласно второму уравнению имеет диагональную матрицу, что строго следует при четырехмерных векторах скорости и тензоре третьего ранга с диагональной матрицей, которая имеет единичный первый элемент. Тогда возможен переход к трехмерным векторам и тензору второго ранга, элементы которого имеют параметр время, так как

$$(N_{\nu T}\vec{c}_{\nu T})_t = 1 \text{ и } \operatorname{div}_T(N_{\nu T}\vec{c}_{\nu T}) = \operatorname{div}(N_\nu \vec{c}_\nu) = 0, \tag{3}$$

а индекс T – относится к упрощающим запись условным четырехмерным характеристикам [5].

В ортонормированном базисе Декарта ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) тензор с диагональной матрицей, его дивергенция, обратная матрица, вектор-столбец преломления и дивергенция скорости заданы:

$$N_\nu \equiv [n_{\nu ij}] = [n_{\nu xx}, n_{\nu yy}, n_{\nu zz}],\ \operatorname{div}N_\nu = (\frac{\partial n_{\nu xx}}{\partial x}, \frac{\partial n_{\nu yy}}{\partial y}, \frac{\partial n_{\nu zz}}{\partial z}),\ N_\nu^{-1} = [\frac{1}{n_{\nu xx}}, \frac{1}{n_{\nu yy}}, \frac{1}{n_{\nu zz}}], \tag{4}$$

$$E\vec{LN}_\nu = (\frac{\partial \ln n_{\nu xx}}{\partial x}, \frac{\partial \ln n_{\nu yy}}{\partial y}, \frac{\partial \ln n_{\nu zz}}{\partial z})' \text{ и } (\frac{\partial \ln n_{\nu xx}}{\partial x}c_{\nu x} + \frac{\partial \ln n_{\nu yy}}{\partial y}c_{\nu y} + \frac{\partial \ln n_{\nu zz}}{\partial z}c_{\nu z}) = -\operatorname{div}\vec{c}_\nu, \tag{5}$$

в изотропной среде направление луча опорного и в среде совпадают (конгруэнтные лучи) [3,6]:

$$N_\nu = En_\nu,\ n_\nu = n_{\nu\alpha\alpha}, \text{ то есть } \vec{LN}_\nu = \operatorname{grad}\ln n_\nu,\ (\operatorname{grad}\ln n_\nu \circ \vec{c}_\nu) = -\operatorname{div}\vec{c}_\nu \text{ и } n_\nu \vec{c}_\nu = \vec{c}_0. \tag{6}$$

В базисе Декарта движение трехгранника и связанного с ним ортонормированного базиса Френе $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ рассматривается как сумма переносного поступательного вдоль луча $\vec{\tau}$ со скоростью $\vec{c}_{\nu\tau}$ и двух относительных с угловыми скоростями вращения $\vec{\Omega}_\beta = k_1\vec{\beta}$ и $\vec{\Omega}_\tau = k_2\vec{\tau}$, где $k_1(s)$ и $k_2(s)$ – кривизна и кручение, в виде функций длины луча s однозначно задающие форму луча (натуральное уравнение), а вместе с направлением в точке $P(s_0)$ луч в пространстве [1,8].

Скорости $\vec{c}_{\nu\tau}, \vec{c}_{\nu\nu}, \vec{c}_{\nu\beta}$ на характерных лучах в направлении ортов базиса Френе имеют связь

$$c_{\nu\tau}LN_{\nu\tau} = c_{\nu\nu}LN_{\nu\nu} = c_{\nu\beta}LN_{\nu\beta} = -\operatorname{div}\vec{c}_\nu, \tag{7}$$

которая обращается в тождество для однородной среды; а рассеяние на частицах в среде без влияния на кривизну и кручение луча учитывается сферической индикатрисой рассеяния.

Если спектральная яркость (интенсивность) излучения вдоль луча $I_{\nu\tau}(P,s,t)$, причем изменение вектора скорости излучения происходит без изменения формы движения и связано с обменом энергии излучения между криволинейными лучами, тогда в соприкасающейся плоскости и плоскости с бинормалью транспортные уравнения яркости излучения имеют вид

$$L_V(I_{\nu\tau}) \equiv (\vec{V}_T \circ \mathrm{grad}_T I_{\nu\tau}) = I_{\nu\tau} c_{\nu\tau T} LN_{\nu\tau} + R_{D0}(I_{\nu\tau}) \;,\; LN_{\nu\nu} = k_{1\nu},\; LN_{\nu\beta} = k_{2\nu}\,; \tag{8}$$

а для полной плотности энергии излучения $u_n(P,t)$ получается интегрированием уравнения спектральной яркости в точке пространства по всем направлениям и частотам в виде [5-7]

$$L_V(u_n) \equiv (\vec{V}_T \circ \mathrm{grad}_T u_n) = LN_n \Sigma + R_{D0}(u_n)\,; \tag{9}$$

где $L_V(I_{\nu\tau})$, $L_V(u_n)$, $R_{D0}(I_{\nu\tau})$ и $R_{D0}(u_n)$ – функционалы, которые совпадают по форме с функционалами уравнений однородной среды; LN_n и $\Sigma = c_n u_n$ – полная проекция на ось τ вектора преломления и полная падающая энергия на единице площади границы элемента объема;

$$\frac{d\vec{e}\,E(I_{\nu\tau}\Delta V)}{dt} = [\vec{e}\,\mathrm{div}_T(c_{\nu eT} I_{\nu\tau}) + I_{\nu\tau} c_{\nu e}\frac{d\vec{e}}{ds_e}]\Delta V = [\vec{e}(c_{\nu eT} \circ \mathrm{grad}_T \ln I_{\nu\tau}) - (\vec{\tau}\, c_{\nu\tau} LN_{\nu\tau} + \vec{\nu}\, c_{\nu\nu} LN_{\nu\nu} + \vec{\beta}\, c_{\nu\beta} LN_{\nu\beta}) +$$

$$+ (c_{\nu\tau}\frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\tau} + c_{\nu\nu}\frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\nu} + c_{\nu\beta}\frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\beta})] I_{\nu\tau}\Delta V \Big|_{\vec{e}\to\vec{\tau}} \to [\vec{\tau}(c_{\nu\tau T} \circ \mathrm{grad}_T \ln I_{\nu\tau}) - c_{\nu\tau}(\vec{\tau}\, LN_{\nu\tau} - \vec{\nu}\, k_1) - c_{\nu\nu}\,\vec{\nu}(LN_{\nu\nu} - k_1) - \tag{10}$$

$$-\lambda c_{\nu\beta}\,\vec{\beta}(LN_{\nu\beta} - k_2) + \vec{\Delta}^{\text{остаток}}_{c_{\nu\nu},c_{\nu\beta}}] I_{\nu\tau}\Delta V$$

– производная, приводящая к равенствам (8) с потерей решений $LN_{\nu\nu} - k_1 = 0$ и $LN_{\nu\beta} - k_2 = 0$;

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k_1\vec{\nu},\; \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k_1\vec{\tau} + k_2\vec{\beta},\; \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -k_2\vec{\nu} \text{ (уравнения Френе без индекса частоты } \nu\text{);} \tag{11}$$

$$\frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\nu}\Big|_{\vec{e}\to\vec{\tau}} = \frac{\partial\vec{\tau}}{\partial s_\nu} = -k_{1s_\nu}\vec{\nu} - k_{2s_\nu}\vec{\beta} = k_1\vec{\nu} + \lambda k_2\vec{\beta} \text{ и } \frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\beta}\Big|_{\vec{e}\to\vec{\tau}} = -k_{1s_\beta}\vec{\beta} + k_{2s_\beta}\vec{\nu} = \frac{d\vec{\tau}}{ds_\beta} = \lambda k_2\vec{\beta} + k_1\vec{\nu} \tag{12}$$

– уравнения (11) для характерных лучей с координатами s_ν и s_β, когда исходный луч s_τ главная нормаль к остальным, а в общем случае указанные решения (8) выделяются при аналогичном рассмотрении проекций $\vec{\tau}$ на главные нормали характерных лучей и порядка малости остатка в уравнении (10); $k_1 \equiv k_{1s_\tau}$, $k_2 \equiv k_{2s_\tau}$, $k_{1s_\beta} = k_{2s_\nu} = -\lambda k_2$ и $\lambda = \lambda(s_\tau)$ – переменные на луче.

Углы Эйлера $\phi = \angle\vec{i},\vec{\xi}$, $\varphi = \angle\vec{\xi},\vec{\tau}$ и $\chi = \angle\vec{k},\vec{\beta}$ связывают ортонормированные базисы текущий Френе и абсолютный Декарта при трехмерной группе вращения $[B] = ([A]')^{-1}$ и матрице $[A] = [A]^{-1}$ ортогонального преобразования базиса с помощью равенства $(\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}) = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})[A]$, что проверяется непосредственно, где $\vec{\xi}$ -орт на пересечении плоскостей $(\vec{i}\,0\,\vec{j})$ и $(\tau\,0\,\nu)$;

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\varphi - \sin\phi\sin\varphi\cos\chi, & -(\cos\phi\sin\varphi + \sin\phi\cos\varphi\cos\chi), & \sin\phi\sin\chi \\ \sin\phi\cos\varphi + \cos\phi\sin\varphi\cos\chi, & -(\sin\phi\sin\varphi - \cos\phi\cos\varphi\cos\chi), & -\cos\phi\sin\chi \\ \sin\varphi\sin\chi, & \cos\varphi\sin\chi, & \cos\chi \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$(\vec{\tau}\cdot\vec{\nu}) = (\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}) = (\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}) = 0$ и $\tau^2 = \nu^2 = \nu^2 = 1$ – матрица и шесть соотношений ортогональности, причем для оставшихся трех из девяти связей углов ортов можно написать три уравнения связи, дифференцируя уравнения Френе [1,8]. Тогда при начальных углах в точке P_0 и $s = s_0$, касательном орте

$\vec{\tau} = \frac{1}{c_{\nu\tau}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ и его проекциях $\tau_\alpha = \frac{c_{\nu\alpha}}{c_{\nu\tau}}$ следуют шесть известных уравнений интегрирования натурального уравнения кривой с единственным решением задачи Коши для проекций касательного орта и углов Эйлера в базисе Декарта в виде [1,8]

$$\frac{dx}{ds} = \cos\phi\cos\varphi - \sin\phi\sin\varphi\cos\chi,\ \frac{dy}{ds} = \sin\phi\cos\varphi + \cos\phi\sin\varphi\cos\chi,\ \frac{dz}{ds} = \sin\varphi\sin\chi \tag{14}$$

и $\frac{d\phi}{ds} = k_2 \frac{\sin\varphi}{\sin\chi},\ \frac{d\varphi}{ds} = k_1 - k_2 \sin\varphi \operatorname{ctg}\chi,\ \frac{d\chi}{ds} = k_2 \cos\varphi$;

а с учетом матриц $[A]$ и $[B]$ уточненная однозначная связь проекций вектора преломления

$$(LN_{\nu\tau}, LN_{\nu\nu}, LN_{\nu\beta})' = [B]'(LN_{\nu x}, LN_{\nu y}, LN_{\nu z})' \tag{15}$$

в виде линейной системы и, наоборот, для $LN_{\nu x}$, $LN_{\nu y}$, $LN_{\nu z}$ [5-7,9].

Однозначность определения трехмерной группы вращения с матрицей (13) следует из однозначности формы луча, представленного натуральным уравнением кривой; однозначности связи такой кривой с углами Эйлера и проекциями касательного орта в базисе Декарта (уравнения (14) и (15)); а задание координат и проекций касательного орта на луче по уравнениям (14), в частности, методом ломаных позволяет определить углы Эйлера и проекции вектора преломления в базисе Френе, включая кривизну и кручение, с последующим уточнением задания.

Пространственный луч в общем случае можно представлять мгновенной суммой двух лучей: прямого с кручением и плоского с кривизной при заданной суммарной матрице тензора преломления и трехмерной группе вращения. Пучок плоских лучей (плоскостей) содержит лучи с нулевым кручением ($k_2 = 0$, $LN_{\nu\beta} = 0$), любой кривизной и постоянными углами плоскости $\phi = \phi_0$ и $\chi = \chi_0$, в которой расположен, а также переменный φ и в пределе прямые лучи без кручения. Пучок прямых лучей содержит лучи с нулевой кривизной ($k_1 = 0$, $LN_{\nu\nu} = 0$), любым кручением и постоянными углами Эйлера, а лучи без кручения имеют $LN_{\nu\nu} = LN_{\nu\beta} = 0$.

2.2. Граничные условия двух неоднородных сред

При различных тензорах преломления граничные поверхности образуют точки разрыва регулярности криволинейных лучей света, где луч теряет свойства простой дуги (топологическая эквивалентность отрезку прямой и непрерывное вращение касательной [1,7,8]).

В точке границы P с касательной плоскостью и нормалью, индексом падающего $n = 1$, отраженного $n = 2$ и преломленного $n = 3$ лучей, свойствами границы (скольжение луча на плоскости, изотропная симметрия, принцип Ферма) уравнения (1) и (2), представленные в виде [7]

$$\tau_{0z} = \mathrm{idem},\ \tau_{0x}^2 + \tau_{0y}^2 = 1 - \tau_{0z}^2 \equiv K_\nu^2 \ \text{и}\ \frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}}\tau_{0x} + \frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}}\tau_{0y} = -\frac{LN_{\nu z}}{n_{\nu zz}}\tau_{0z} - \mathrm{div}\left(\frac{\vec{c}_\nu}{c_0}\right) \equiv D_\nu, \tag{16}$$

позволяют определить вектор скорости на отраженном и преломленном лучах с углами сферической системы координат, отсчитываемыми от проекции скорости падающего луча на касательную плоскость $\Delta\phi = \phi - \phi_{n=1}$ и плоскости θ с учетом $\tau_{\nu z} = \sin\theta = \sin\varphi\sin\chi$ и однозначной связи лучей в базисах Френе (общее начало всех базисов, ось z совпадает с нормалью к плоскости).

Скорости излучения в точке границы можно искать, используя ортогональные преобразования типа (13) поля скоростей падающих лучей к полям отраженных и преломленных лучей, при наличии соответственно тензоров скольжения $\mathrm{M}_{\nu k}$ и $\Lambda_{\nu k}$, элементы которых следует задавать.

На каждой стороне касательной плоскости первое уравнение (16) можно считать заданием квадрата параметра, второе суммой квадратов проекций единичного вектора опорного луча

$$\vec{\tau}_0 = \frac{c_{\nu\tau}}{c_0} N_\nu \vec{\tau} \text{ при } \tau_{0\alpha} \equiv \frac{c_{0\alpha}}{c_0} = n_{\nu\alpha\alpha}\frac{c_{\nu\alpha}}{c_0} \left(\tau_{0z} \equiv \frac{c_{0z}}{c_0} = \sin\theta_0 = n_{\nu zz}\frac{c_{\nu z}}{c_0} = n_{\nu zz}\frac{c_{\nu\tau}}{c_0}\sin\theta_\nu - \text{параметр} \right) \quad (17)$$

и третье его скалярным произведением с вектором, типа преломления.

При этом уравнения (16) представляются квадратным алгебраическим уравнением с параметром, его решения дают проекции единичного вектора опорного луча на оси касательной плоскости, определяющие полностью все его характеристики соответственно в виде:

$$\frac{\tau_{0x}}{D_\nu} = \frac{\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}} \pm (\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}})\sqrt{[(\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})^2 + (\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}})^2]\frac{K_\nu^2}{D_\nu^2} - 1}}{(\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})^2 + (\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}})^2}, \quad \frac{\tau_{0y}}{D_\nu} = \frac{\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}} \mp (\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})\sqrt{[(\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})^2 + (\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}})^2]\frac{K_\nu^2}{D_\nu^2} - 1}}{(\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})^2 + (\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}})^2},$$

$$\tau_{0z} \equiv (n_{\nu zz}\frac{c_{\nu z}}{c_0}) = \sqrt{1 - \tau_{0x}^2 - \tau_{0y}^2} \text{ и } \tau_{0xy} \equiv (n_{\nu xy}\frac{c_{\nu xy}}{c_0}) = \sqrt{\tau_{0x}^2 + \tau_{0y}^2}, \quad (18)$$

а также $\cos\Delta\phi_0 = \tau_{0x}$ и $\sin\theta_0 = \tau_{0z}$, или $\mathrm{tg}\Delta\phi_0 = \tau_{0y} / \tau_{0x} = c_{0y} / c_{0x}$ и $\mathrm{tg}\theta_0 = \tau_{0z} / \tau_{0xy} = c_{0z} / c_{0xy}$;

как и единичного вектора луча в среде, включая показатель преломления вдоль проекции луча:

$$\tau_{\nu x} = \frac{c_{\nu x}}{c_{\nu\tau}} = \frac{c_0}{c_{\nu\tau}}\frac{\tau_{0x}}{n_{\nu xx}}, \ \tau_{\nu y} = \frac{c_{\nu y}}{c_{\nu\tau}} = \frac{c_0}{c_{\nu\tau}}\frac{\tau_{0y}}{n_{\nu yy}}, \ \tau_{\nu z} = \frac{c_{\nu z}}{c_{\nu\tau}} = \frac{c_0}{c_{\nu\tau}}\frac{\tau_{0z}}{n_{\nu zz}} \text{ и } \tau_{\nu xy} = \frac{c_{\nu xy}}{c_{\nu\tau}} = \frac{c_0}{c_{\nu\tau}}\frac{\tau_{0xy}}{n_{\nu xy}}, \quad (19)$$

а также $\mathrm{tg}\Delta\phi_\nu = \frac{n_{\nu xx}}{n_{\nu yy}}\mathrm{tg}\Delta\phi_0$, $\mathrm{tg}\theta_\nu = \frac{n_{\nu xy}}{n_{\nu zz}}\mathrm{tg}\theta_0$, $(\frac{c_{0xy}}{c_0})^2 = (n_{\nu xy}\frac{c_{\nu xy}}{c_0})^2$, $(\frac{c_{\nu\tau}}{c_0})^2 = 1 - \sum_{\alpha=x,y,z}(1 - \frac{1}{n_{\nu\alpha\alpha}^2})(n_{\nu\alpha\alpha}\frac{c_{\nu\alpha}}{c_0})^2$

$$\text{и } (n_{\nu xy})^2 = 1 + \sum_{\alpha=x,y}(1 - \frac{1}{n_{\nu\alpha\alpha}^2})(n_{\nu\alpha\alpha}\frac{c_{\nu\alpha}}{c_{\nu xy}})^2 = (n_{\nu xx}^2\cos^2\Delta\phi_\nu + n_{\nu yy}^2\sin^2\Delta\phi_\nu)\Big|_{\substack{\text{изотроп-}\\ \text{ная среда,}\\ n_{\nu\alpha\alpha}=n_\nu}} = n_\nu^2, \quad (20)$$

где знаки перед радикалами определяются по второму уравнению (16); а одноименные лучи одной среды (падающие, отраженные) имеют равные модули параметров. Совпадение решений (16) для падающих лучей первой среды соответствует нулевому значению детерминантов; а полное внутреннее отражение отсутствию решений второй и, наоборот.

В специальной системе координат с осями $\tau_{0\alpha}$ решения (16) в общем случае интерпретируются четырьмя узловыми точками k = 1;2;3;4 на поверхности единичного радиуса сферы, которые выделяются пересечением плоскостей, из которых две наклоненных и симметричных с заданной дивергенцией скорости, а две горизонтальны с различными искомыми параметрами в уравнениях; или круговых конусов с вершинами в начале координат, из которых один наклоненный двуполостный с осью на векторе типа преломления, а два однополостных с искомыми параметрами и осями на нормали. Односторонние падающие и отраженные лучи объединяются в пары и образуют ломаные лучевые линии со знаками плюс перед радикалами в узловых точках k = 1 (n = 1) и k = 2 (n = 2), а минус в точках k = 4 и k = 3 для проекций τ_{0x} и, наоборот, τ_{0y}.

Отсчет углов $\Delta\varphi_{\nu k}$ задается главным падающим лучом (k = 1) при условии $\tau_{0y} = \tau_{\nu y} = 0$, или $D_\nu^2 = (\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})^2 K_\nu^2$ при $[(\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}})^2 + (\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})^2]\frac{1}{D_\nu} \neq 0$, $D_\nu = (\frac{LN_{\nu y}}{n_{\nu yy}})^2 = (\frac{LN_{\nu x}}{n_{\nu xx}})^2 = 0$ и $D_\nu = K_\nu = 0$, что вместе с нормалью определяет локальный базис Декарта, параметр τ_{0z} и τ_{0xy} (скорости в среде и вакууме лежат в одной плоскости, $\Delta\phi_0 = \Delta\phi_\nu = 0$), а также второй падающий луч k = 4.

На обеих сторонах касательной плоскости при одном общем направлении координатной оси вдоль нормали и положительном отсчете углов узловые точки нумеруются и располагаются аналогично на сферах первой ($z > 0$) и второй ($z < 0$) среды: в первой среде четырем параметрам соответствует по два опорных луча падающих ($k = 1$ и $k = 4$, параметр отрицательный) и отраженных ($k = 2$ и $k = 3$, параметр положительный); во второй то же при противоположных знаках параметров, где отраженные лучи второй среды являются преломленными для первой.

Заданный падающий в точке P на границе луч первой среды ($n = 1$) содержит параметр узловой точки $k = 1$ и при наличии трех соответствующих отношений параметров восьми узловых точек двух сред позволяет определить четыре ломаных лучевых линии, связанных с указанным падающим лучом. Очевидно, что три неизвестных отношения параметров связаны с углами θ на граничной поверхности в узловых точках, как законы отражения и преломления.

Проекции одноименных единичных опорных векторов двух сред узловой точки k связываются тензором скольжения преломленных лучей Λ_{0k}, а разноименных одной среды соседних $k = 1$ и $k + 1 = 2$ ($k = 4$ и $k + 1 = 3$) тензором отраженных M_{0k}, имеющих диагональные матрицы $[\lambda_{0\alpha\alpha}]_k$ и $[\mu_{0\alpha\alpha}]_k$, а связи лучей в среде тензорами $\Lambda_{\nu k}$ и $\mathrm{M}_{\nu k}$ с матрицами $[\lambda_{\nu\alpha\alpha}]_k$ и $[\mu_{\nu\alpha\alpha}]_k$.

Поле скоростей излучения в точке границы можно искать, используя ортогональные преобразования поля падающих лучей к полям отраженных и преломленных при наличии соответствующих тензоров скольжения лучей на границе второго ранга $[\mathrm{M}_{\nu k}]$ и $[\Lambda_{\nu k}]$.

Базис Френе каждого падающего луча в первой среде $k = 1$ ($k = 4$) при переходе к отраженным лучам $k = 2$ и $k = 3$ необходимо развернуть в исходном базисе Декарта на соответствующие углы $\Delta\phi_2 = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta\chi_2 = \chi_2 - \chi_1$ и $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ с учетом матрицы скольжения $[\mathrm{M}_{\nu k}]$; затем аналогично во второй среде развернуть базис Френе каждого падающего луча $k = 1$ ($k = 4$) и определить углы разворота отраженных (преломленных) лучей $k = 2$ и $k = 3$ с учетом матрицы скольжения $[\Lambda_{\nu k}]$; причем необходимо совпадение конечных углов поворота содержащих оси z плоскостей отраженных и преломленных частей ломаных лучей в обеих средах.

Коэффициенты скольжения – элементы матриц дают связи скоростей-столбцов в виде:

$$(c_{0\alpha})'\Big|_k^{z<0} = [\lambda_{0\alpha\alpha}]_k (c_{0\alpha})'\Big|_k^{z>0} \text{ и } (c_{\nu\alpha})'\Big|_k^{z<0} = [\lambda_{\nu\alpha\alpha}]_k (c_{\nu\alpha})'\Big|_k^{z>0} \text{ при } [\lambda_{0\alpha\alpha}]_k [n_{\nu\alpha\alpha}]\Big|_k^{z>0} = [\lambda_{\nu\alpha\alpha}]_k [n_{\nu\alpha\alpha}]\Big|_k^{z<0}; \tag{21}$$

$$(c_{0\alpha})'\Big|_{k+1}^{z=\mathrm{idem}} = [\mu_{0\alpha\alpha}]_k (c_{0\alpha})'\Big|_k^{z=\mathrm{idem}} \text{ и } (c_{\nu\alpha})'\Big|_{k+1}^{z=\mathrm{idem}} = [\mu_{\nu\alpha\alpha}]_k (c_{\nu\alpha})'\Big|_k^{z=\mathrm{idem}} \text{ при } [\mu_{0\alpha\alpha}]_k = [\mu_{\nu\alpha\alpha}]_k; \tag{22}$$

а ввиду симметрии уравнений (22) при различном направлении обхода четырех узловых точек

$$[\mu_{0\alpha\alpha}\Big|_k^{z<0} [\lambda_{0\alpha\alpha}]_k = [\mu_{0\alpha\alpha}]\Big|_k^{z>0} [\lambda_{0\alpha\alpha}]_{k+1} \text{ и } [\mu_{\nu xy}\Big|_k^{z<0} [\lambda_{\nu xy}]_k = [\mu_{\nu xy}]\Big|_k^{z>0} [\lambda_{\nu xy}]_{k+1}, \tag{23}$$

где $c_{0\alpha}\Big|_k^z$ и $c_{\nu\alpha}\Big|_k^z$; $c_{0xy}\Big|_k^z$ и $c_{\nu xy}\Big|_k^z$ – проекции скоростей на оси и плоскость, а $\Delta_{0k} \equiv \Delta\phi_{0,k+1} - \Delta\phi_{0k}$ – углы поворота; $\alpha = x, y, z$ и $\Big|_k^{z=\mathrm{idem}}$ – координаты точки и индексы узловой точки со средой. Связь коэффициентов скольжения и углов поворота дается равенствами вида (20) соответственно:

$$\mu_{0xyk}^2 = \mu_{0xx,k}^2 \cos^2\Delta\phi_{0k} + \mu_{0yyk}^2 \sin^2\Delta\phi_{0k} \text{ и } \lambda_{0xyk}^2 = \lambda_{0xxk}^2 \cos^2\Delta\phi_0\Big|_k^{z>0} + \lambda_{0yyk}^2 \sin^2\Delta\phi_0\Big|_k^{z>0}$$

$$\text{при } \mu_{0xyk}\cos\Delta\phi_{0,k+1} = \mu_{0xxk}\cos\Delta\phi_{0k},\ \mu_{0xyk}\sin\Delta\phi_{0,k+1} = \mu_{0yyk}\sin\Delta\phi_{0k} \text{ и}$$

$$\lambda_{0xyk}\cos\Delta\phi_0\Big|_k^{z<0} = \lambda_{0xxk}\cos\Delta\phi_0\Big|_k^{z>0},\ \lambda_{0xyk}\sin\Delta\phi_0\Big|_k^{z<0} = \lambda_{0yyk}\sin\Delta\phi_0\Big|_k^{z>0}.$$

Условия: $\lambda_{0xxk} = \lambda_{0yyk} = \lambda_{0k}$ и $\mu_{0xxk} = \mu_{0yyk} = \mu_{0k}$ – дают углы $\Delta\phi_0\Big|_k^{z<0} = \Delta\phi_0\Big|_k^{z>0}$, $\Delta\phi_{0,k+1} = \Delta\phi_{0k}$, соответствующие лучи в одной плоскости; $\lambda_{\nu xxk} = \lambda_{\nu yyk} = \lambda_{\nu k}$, $\lambda_{0xxk} = \lambda_{0yyk} = \lambda_{0k}$ $(\mu_{\nu\alpha\alpha k}, \mu_{0\alpha\alpha k})$ – одновременно существуют при изотропных средах, а все лучи в одной плоскости – однородных.

Для соседних узловых точек k и k+1 с одним тензором преломления в среде, четырьмя проекциями на нормаль, учетом связей (19) и (22), а также дивергенции падающих и отраженных скоростей третье уравнение (16) можно записать в обобщенном виде

$$LN_{\mu k}MT_{xy\mu}+N_{\mu k}MT_{z\mu}-DC_{0\mu k}=0 \text{ при } DC_{0\mu k}\equiv -DC_{k+1}=DC_k, \tag{24}$$

аналогично в узловых точках k среды с двумя различными тензорами преломления записать

$$LN_{\lambda k}MT_{xy\lambda}+N_{\lambda k}MT_{z\lambda}-DC_{0\lambda k}=0 \text{ при } DC_{0\lambda k}\equiv -DC\Big|_k^{z<0}\ ; \tag{25}$$

где $MT_{xy\mu}\equiv\mu_{0xyk}\tau_{0xyk}=\tau_{0xy,k+1}$, $MT_{z\mu}\equiv\mu_{0zzk}\tau_{0zk}=\tau_{0z,k+1}$, $N_{\mu k}\equiv LN_{\nu z,k+1}/n_{\nu zz,k+1}=LN_{\nu zk}/n_{\nu zzk}$,

$$MT_{xy\lambda}\equiv\lambda_{0xyk}\tau_{0xy}\Big|_k^{z>0}=\tau_{0xy}\Big|_k^{z<0},\ MT_{z\lambda}\equiv\lambda_{0zzk}\tau_{0z}\Big|_k^{z>0}=\tau_{0z}\Big|_k^{z<0},\ N_{\lambda k}\equiv LN_{\nu z}\Big|_k^{z>0}/n_{\nu zz}\Big|_k^{z>0},$$

$$LN_{\mu k}\equiv\frac{LN_{\nu xk}\cos\Delta\phi_{0,k+1}}{n_{\nu xxk}}+\frac{LN_{\nu yk}\sin\Delta\phi_{0,k+1}}{n_{\nu yyk}}=\frac{LN_{\nu xk}\mu_{0xxk}\cos\Delta\phi_{0k}}{n_{\nu xxk}\mu_{0xyk}}+\frac{LN_{\nu yk}\mu_{0yyk}\sin\Delta\phi_{0k}}{n_{\nu yyk}\mu_{0xyk}},$$

$$LN_{\lambda k}\equiv\frac{LN_{\nu x}\cos\Delta\phi_0}{n_{\nu xx}}+\frac{LN_{\nu y}\sin\Delta\phi_0}{n_{\nu yy}}\Big|_k^{z<0}=\frac{LN_{\nu x}\lambda_{0xx}\cos\Delta\phi_0}{n_{\nu xx}\lambda_{0xy}}+\frac{LN_{\nu y}\lambda_{0yy}\sin\Delta\phi_0}{n_{\nu yy}\lambda_{0xy}}\Big|_k^{z>0} \text{ и } DC_k\equiv\operatorname{div}\frac{\vec{c}_{\nu k}}{c_0}.$$

Тогда опуская индексы μ и λ, а также используя первое уравнение и проекции единичного вектора MT_z и MT_{xy} при его модуле $1=MT_{xy}^2+MT_z^2$, можно найти величины

$$MT_{xy}=\frac{DC_{0k}LN_k\pm N_k\sqrt{N_k^2+LN_k^2-DC_{0k}^2}}{N_k^2+LN_k^2} \text{ и } MT_z=\frac{DC_{0k}N_k\mp LN_k\sqrt{N_k^2+LN_k^2-DC_{0k}^2}}{N_k^2+LN_k^2}, \tag{26}$$

где MT_{xy} – задаются коэффициентами μ_{0xyk} и λ_{0xyk}; $LN_k=(DC_{0k}-N_k\sqrt{1-MT_{xy}^2})/MT_{xy}$ и $MT_z=\sqrt{1-MT_{xy}^2}$ – определяют $\Delta\phi_{0,k+1}$, μ_{0zzk} $\left(\Delta\phi_0\Big|_k^{z<0},\ \lambda_{0zzk}\right)$, знаки радикалов уравнения модуля.

Задавая последовательно $N_k=0$, $LN_k=0$ и $DC_{0k}=0$, можно получить частные решения (26) соответственно, $MT_{xy}=DC_{0k}/LN_k$, $MT_{xy}^2=1-DC_{0k}^2/N_k^2$ и неопределенность $MT_{xy}=0/0$. Так, с коэффициентами скольжения $\mu_{0xxk}=\mu_{0yyk}=\mu_{0xyk}=1$ уравнения (24) и (26) допускают существование: во-первых, при $\operatorname{div}\vec{c}_{\nu k}\neq 0$ $\left(\vec{LN}_\nu\neq 0\right)$ и $LN_{\nu z}c_{\nu zk}\neq 0$ только двух лучей в одной вертикальной плоскости неоднородной среды с кручением и $\mu_{0zzk}=1+2\operatorname{div}\vec{c}_{\nu k}/(LN_{\nu z}c_{\nu zk})$, в частности, $\mu_{0zzk}^2=1$ $\left(\tau_{0z}^2\Big|_{k;k+1}^{z=\text{idem}}=\text{idem},\ \tau_{0xy}^2\Big|_{k;k+1}^{z=\text{idem}}=\text{idem}\right)$ и $\lambda_{\nu;k+1}=\lambda_{\nu k}$ с интерпретацией решений (18) и одном вертикальном двуполостном конусе; во-вторых, предельных при $\operatorname{div}\vec{c}_{\nu k}=0$ $\left(\vec{LN}_\nu=0\right)$ лучей без кручения и прямолинейных с постоянной скоростью и неопределенными $\mu_{0\alpha\alpha k}$ в однородной среде или с постоянными элементами тензора преломления в неоднородной.

В результате, решения уравнений (16) по известному параметру заданного падающего луча ($n=k=1$) позволяют определить параметры остальных падающих лучей, ввиду совпадения их модулей или уравнений (19) и (22); а по проекциям единичных векторов опорных лучей одной среды и по представляющим свойства границы их коэффициентам скольжения λ_{0xyk} и μ_{0xyk}, как и лучей в среде $\lambda_{\nu\alpha\alpha k}$ и $\mu_{\nu xyk}$, можно согласовать параметры и определить по уравнениям (25) и (26) проекции таких же векторов в другой среде; причем $\mu_{\nu xy}\Big|_k^{z>0}=\mu_{\nu xy}\Big|_k^{z<0}=1$ и $\lambda_{\nu xyk}=\lambda_{\nu xy,k+1}=1$ – условия симметричного («зеркального») продолжения на касательной плоскости соответствующих решений с параметром уравнений (16) и (19) для лучей двух сред.

Уравнения (22) и (26) дают отношения трех параметров двух сред в точке границы, а также связь углов, которые образуют лучи с касательной плоскостью (нормалью) и переписываются как обобщенные законы отражения (27) и преломления (28) для опорных лучей и лучей в среде:

$$\sin\theta_{0,n=2} = MT_{z\mu}\big|_{n=1} = (\mu_{0zz}\sin\theta_0)_{n=1} \text{ и } [\frac{(c_{\nu\tau,n=2}/c_{\nu\tau,n=1})}{\mu_{0zz,n=1}}](\sin\theta_\nu)_{n=2} = (\frac{c_0 MT_{z\mu}}{\mu_{0zz}c_{\nu\tau}n_{\nu zz}})\big|_{n=1} = (\sin\theta_\nu)_{n=1}, \quad (27)$$

$$\lambda^{-1}_{0xy,n=2}\cos\theta_{0,n=3} = MT_{xy\lambda}\big|_{n=1} = (\mu_{0xy}\cos\theta_0)_{n=1} \text{ и } [\frac{(c_{\nu\tau,n=3}/c_{\nu\tau,n=1})}{(\mu_{0xy,n=1}\lambda_{0xy,n=2})}](n_{\nu xy}\cos\theta_\nu)_{n=3} = (n_{\nu xy}\cos\theta_\nu)_{n=1}; \quad (28)$$

$$[\frac{(c_{\nu\tau,n=2}/c_{\nu\tau,n=1})}{\mu_{0zz,n=1}}]^2\Big|_{\substack{\text{изотропное правильное} \\ \text{отражение } \mu^2_{0zz,n=1}=1}} = 1 \text{ и } [\frac{(c_{\nu\tau,n=3}/c_{\nu\tau n=2})}{(\mu_{0xy,n=1}\lambda_{0xy,n=2})}]^2 = [\frac{(n_{\nu xy}\cos\theta_\nu)_{n=2}}{\mu_{0xy,n=1}(n_{\nu xy}\cos\theta_\nu)_{n=3}}]\Big|^2_{\mu_{0xy,n=1}} = 1, \quad (29)$$

где равенства (29) следуют при частных значениях коэффициентов скольжения ($n^{z=\mathrm{idem}}_{\nu\alpha\alpha,k+1} = n^{z=\mathrm{idem}}_{\nu\alpha\alpha k}$).

Последние уравнения (28) и (27) обобщают обычные (правильные [1-4]) законы преломления и отражения, когда модуль множителя в квадратных скобках единица, что соответствует $\mu_{0xy,n=1} = 1$ и в изотропном пространстве $\mu^2_{0zz,n=1} = 1$, включая предельный случай однородной первой среды при одновременном выполнении обоих условий.

В неоднородных изотропных пространствах при разделении луча на границе и единичных коэффициентах скольжения μ_{0zz} модули скорости в среде не зависят от направления, а углы $\Delta\phi$ и θ определяются уравнениями (22), (23) и решениями (26). Однородные пространства представляются предельными решениями изотропных пространств, когда третье уравнение (16) с дивергенцией тождество и совпадают опорные лучи вакуума и среды, как и плоскости падающего, преломленного и отраженного лучей (полная изотропная симметрия). При этом на граничной поверхности справедливы известные методы расчета геометрической оптики с использованием двух показателей преломления (закон Снеллиуса, принцип Ферма) [1-4].

Пример, винтовой луч – геодезическая линия на цилиндрической поверхности (прямая, модифицированный принцип Ферма), имеет $k_1 = \lambda k_2$, $\lambda = \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{const}$ и единичный вектор $\vec{n} = \vec{\tau}\cos\alpha + \vec{\beta}\sin\alpha = \mathrm{const}$, где касательная к лучу и параллельная вектору образующая поверхности имеют постоянный угол пересечения α [6-8]. При известных двух тензорах преломления в точке границы *P* со свойствами $\mu_{0xy,n=1} = \mu_{0zz,n=1} = 1$ можно выбрать главный падающий луч ($n = k = 1$) в среде с углами Эйлера $\phi = -\alpha$ ($\Delta\phi = 0$ – изначально ось *x* и образующая совпадают), $\varphi = \theta$ и $\chi = -\pi/2$ при параметре $\tau_{vz} = \sin\varphi\sin\chi = -\sin\theta$, что позволяет найти α, k_1, k_2 и $LN_{\nu\tau}$ по уравнению винтовой линии, проекциям вектора преломления в базисе Декарта и (15) $\alpha = \mathrm{arctg}(k_1/k_2)$, $k_1 = -LN_{\nu x}\sin\alpha\cos\theta + LN_{\nu y}\sin\alpha\sin\theta + LN_{\nu z}\cos\alpha$, $k_2 = -LN_{\nu x}\sin\theta - LN_{\nu y}\cos\theta$, $LN_{\nu\tau} = LN_{\nu x}\cos\alpha\cos\theta - LN_{\nu y}\cos\alpha\sin\theta + LN_{\nu z}\sin\alpha$ и наоборот. При изотропной первой среде показатели преломления и скорости в ней во всех направлениях равны, а законы (27) - (29) на границе $\theta_{0,n=2} = \theta_{0,n=1}$, $\theta_{\nu,n=2} = \theta_{\nu,n=2}$, $\lambda_{0xy,n=2}\cos\theta_{0,n=3}\cos\theta_{0,n=1}$ и $(n_{\nu xy}\cos\theta_\nu)_{n=3} = (n_{\nu xy}\cos\theta_\nu)_{n=1}$, что обеспечивается поворотом отраженных и преломленных лучей согласно (24) - (26) для опорных лучей первой среды ($n = k = 1$, $k = 4$ – падающих; $n = k = 2$, $k = 3$ – отраженных) и второй (падающих; преломленных) с поворотом вокруг оси z ($\Delta\phi_{0,k+1}$), которые определяют направления лучей в средах по (20), а по (14) и (15) углы Эйлера и винтовые лучи, даже в изотропной второй среде; в частности, когда $\mu^2_{0zzk} = 1$ и $\lambda_{\nu;k+1} = \lambda_{\nu k}$ совпадают направления одноименных лучей, причем $\mu_{\nu xxk} = \mu_{\nu yyk} = \mu_{\nu k}$ и $\lambda_{0xxk} = \lambda_{0yyk} = \lambda_{0k}$ сводят все лучи в одну вертикальную плоскость.

3. Заключение

Тензор преломления неоднородной среды, а также тензоры скольжения отраженных и преломленных лучей на границе двух сред должны задаваться; так как определяют транспортные уравнения переноса энергии излучения, законы отражения и преломления на границе; причем:

1. Влияние неоднородной (анизотропной) сплошной среды на скорость распространения излучения (света) учитывается с помощью тензора преломления второго ранга, элементы которого в общем случае зависят от времени и которому соответствует векторный показатель преломления, направление скорости отличается от опорного прямого луча в вакууме, а методы традиционной геометрической оптики обобщаются; при этом обычные свойства вакуума обеспечивают тензору преломления диагональную матрицу, уравнение неразрывности луча и закон Кирхгофа с локальным термодинамическим равновесием вдоль каждого луча.

2. В транспортных уравнениях спектральной яркости и полной плотности энергии излучения используются проекции вектора преломления в базисе Френе, которые однозначно связаны с кривизной и кручением регулярного луча, а также обменом энергии излучения между лучами.

3. Существует однозначная связь натурального уравнения криволинейного луча в базисе Френе с тензором преломления в базисе Декарта и взаимосвязь лучей в транспортных уравнениях, исчезающая в случае однородной среды; причем пространственный луч представляется мгновенной суммой прямого с кручением и плоского при сохранении матрицы тензора преломления; рассмотрены случаи криволинейного плоского и прямолинейного луча с кручением и без него, трехмерного в виде геодезической (прямой) линии на цилиндрической поверхности.

4. Граничные поверхности определяются точками разрыва регулярности лучей двух сред, а граничные условия – двумя коэффициентами скольжения отраженных и преломленных лучей, включая симметричное («зеркальное») продолжение решений уравнений скоростей на границе.

5. В общем случае тензоров преломления существуют по два аналитических решения уравнений скоростей излучения отраженных и преломленных лучей на граничной поверхности, которым дана геометрическая интерпретация, включая решения в изотропном пространстве.

6. Приведены обобщенные законы отражения и преломления опорных лучей и лучей в среде; показан частный характер принципа Ферма, используемого в геометрической оптике.

Представленный выше подход исследования излучения позволяет получить новые и интерпретировать существующие представления в различных разделах физики и динамике излучающего газа, в частности, объяснить нестационарный эффект неопознанных летающих объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Основные формулы физики* // Под редакцией Мензела Д. – М.: ИЛ, 1957. – 658 с.
2. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.
3. *Сивухин Д.В.* Оптика (Общий курс физики). – М.: Наука, 1985. – 752 с.
4. *Бай-Ши-И.* Динамика излучающего газа. – М.: Мир, 1968. – 350 с.
5. *Репухов В.М.* Система уравнений-условий преобразования общих транспортных уравнений сложного (радиационного и конвективного) тепломассопереноса к простейшему виду // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в ракетно-космической технике: Тр. XVII школы-семинара молодых ученых и специалистов – М.: МЭИ, 2009. – Т. 1. – С. 34-37.
6. *Репухов В.М., Сигорских С.В.* Перенос энергии излучения в неоднородной среде // Нові технології. – 2009. – вып. 25, № 3. – С. 3-8.
7. *Репухов В.М., Сигорских С.В.* Радиационный перенос энергии в неоднородной среде // Пром. теплотехника. – 2009. – вып. 31, № 5. – С. 88-96.
8. *Фиников С.П.* Дифференциальная геометрия. – М.: Изд. МГУ, 1961. – 158 с.
9. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 280 с.

Получено 01.10. 2009 г.