УДК 532.536

Авраменко А.А., Дмитренко Н.П., Блинов Д.Г.

Институт технической теплофизики НАН Украины

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В МАКРОПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Проведено аналіз нестаціонарної розвиненої турбулентності в активній зоні ВТГР, яка розглядалась як пористе середовище. Даний аналіз базується на ренормгруповому підході, який дозволяє отримати теоретичні значення констан моделей турбулентності. Модель відображає вплив макропористості середовища та нестаціонарності на характер турбулентного переносу імпульсу та теплоти.

Проведен анализ нестационарной развитой турбулентности в активной зоне ВТГР, которая рассматривалась как макропористая среда. Данный анализ основан на ренормгрупповом подходе, который позволяет получить теоретические значения констант моделей турбулентности. Модель отражает влияние макропористости среды и нестационарности на характер турбулентного переноса импульса и теплоты.

Analysis of unsteady developed turbulence in active zone of HTGR which has being considered as macroporosity is obtained. This analysis is based on renormalization procedure which lets to obtain theoretical value of constants for turbulence models. The model reflects influence of macroporosity medium and unsteady on character of turbulent momentum and heat transfer.

a – температуропроводность;
c_F – коэффициент Форчаимера;
d – размерность пространства;
D – константа;
E – спектр турбулентной энергии;
f – соленоидальная сила;
F – Фурье - образ соленоидальной силы;
k – кинетическая энергия турбулентности;
K – проницаемость;
p – давление;
P – образ давления;
s – направление косинусов вектора скорости;
S – Фурье - образ направления косинусов вектора скорости;
t – время;
T – температура;
u – компонента скорости;
U – Фурье-образ скорости;
V – вектор скорости;
К – Фурье - образ кинетической энергии турбулентности;
Т – Фурье - образ температуры;
α – термическая диффузия;
β, κ, σ, υ – волновые числа;
Γ – гамма функция;
δ – дельта функция;
ε – скорость диссипации;
μ – динамический коэффициент вязкости;
ν – кинематический коэффициент вязкости;
ρ – плотность;
τ – положительный параметр;
φ – пористость;
ω, ϖ, χ – частота.

Нижние индексы:

c, h, k, l, m, n, r, s, o – проекции на координаты;
e – эффективный параметр;
t – турбулентный параметр;
0 – начальная точка.

Введение

Высокотемпературный газоохлаждаемый реактор (ВТГР) с микротвэльным топливом представляет собой одно из наиболее перспективных направлений дальнейшего развития ядерной энергетики. Производство энергии с помощью технологии ВТГР четвёртого поколения [1, 2, 3] имеет ряд преимуществ, а именно:

• надёжность рабочего процесса,
• экономный расход энергосырья,
• гибкость в использовании энергосырья,
• получение комбинации высокотемпературного

тепла и электроэнергии,

• возможность создания экономичных АЭС малой мощности.

Реакторы этого типа обладают свойствами, предполагающие минимальное воздействие на окружающую среду.

ВТГР могут сильно расширить использование ядерной энергии для получения высокотемпературной теплоты. Температура теплоносителя на выходе из таких реакторов составляет 700…1000 °С. В этом диапазоне температур особенно целесообразно использовать этот тип реакторов для прямой газификации угля, опреснения воды, а также конверсии метана и получения водорода – топлива будущего.

Конструкция активной зоны ВТГР с шаровой засыпкой тепловыделяющих элементов выдвигает целый комплекс специфических проблем расчетно-теоретического и практического характера. Среди них можно выделить, например, проблемы связанные с формированием нужного профиля скоростей теплоносителя и траекторий перемещения шаровых тепловыделяющих элементов в активной зоне [4], так как неравномерность распределения профиля скорости указывает на существование неравномерных тепловых нагрузок в активной зоне, которые могут привести к ее повреждению.

Активную зону ВТГР насыпного типа можно рассматривать как макропористую среду. Исследования профилей скорости теплоносителя в активной зоне насыпного типа должны быть основаны на математических моделях, которые учитывают пористость среды и нестационарные процессы, которые имеют место при пуске и останове реактора, а также при авариях. В статье предполагается развитие k-ε модели турбулентности, которая основана на ренорггрупповом подходе к анализу нестационарной турбулентности в макропористой среде. Ренормализационный анализ позволяет получить теоретические значения констант моделей турбулентности и унифицировать сами модели турбулентности для различных типов потоков.

Ренормализация уравнения движения

Уравнение Навье-Стокса для пористой среды в дивергентной форме, учитывающее нестационарность, имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_0\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)u_n=f_n-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}-H|V|u_n,\quad(1)$$

где $H=\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}$, $J=\mu_e/\mu$. Проекцию вектора скорости на ось координат представим выражением:

$$u_n=|V|\cos\left(V\hat{\ }u_n\right)=|V|s_n.\quad(2)$$

Учитывая (2) уравнение (1) может быть представлено в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_0\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)u_n=$$

$$=f-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}-Hs_n u_m^2\ .\quad(3)$$

Процедуру перенормировки уравнения (3) проведем путем преобразования его составляющих в пространство образов Фурье [5].

Фурье-образы слагаемых имеют вид:

$$u_n=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\kappa\le\kappa_c}d^d\kappa\int d\omega U_n(\vec{\kappa},\omega)\exp\left(i\vec{\kappa}\cdot\vec{x}-i\omega t\right),\quad(4,\text{ а})$$

$$p=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\kappa\le\kappa_c}d^d\kappa\int d\omega P(\vec{\kappa},\omega)\exp\left(i\vec{\kappa}\cdot\vec{x}-i\omega t\right),\quad(4,\text{ б})$$

$$u_n u_m=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\kappa\le\kappa_c}d^d\kappa\int d\omega W_{nm}(\vec{\kappa},\omega)\exp\left(i\vec{\kappa}\cdot\vec{x}-i\omega t\right),\quad(4,\text{ в})$$

$$f_n = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega F_n(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i \vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right), \quad (4, г)$$

$$s_n = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega S_n(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i \vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right), \quad (4, д)$$

$$s_n u_m^2 = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega W_{s_n u^2}(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i \vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right), \quad (4, е)$$

где W_{nm} и $W_{s_n u^2}$ – Фурье - образы произведения двух компонент скорости.

Подставляя образы (4, а) – (4, е) в выражение (3), произведем операцию дифференцирования и сократим экспоненциальные множители. Получим:

$$G_0^{-1} U_n = F_n - i\kappa_n \frac{P}{\rho} - i\kappa_m W_{nm} - HW_{s_n u^2}, \quad (5)$$

где $G_0 = \left(-i\omega + \frac{\nu_0}{K} + J\nu_0 \kappa^2\right)^{-1}$ – пропагатор нулевого порядка, $\kappa^2 = \sum_{j=1}^{d} \kappa_j^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + ... + \kappa_d^2$.

Далее исключим из (5) Фурье-образы Р, W_{nm} , $W_{s_n u^2}$ используя [6] имеем:

$$G_0^{-1}(\kappa, \omega) U_n(\kappa, \omega) = F_n(\kappa, \omega) - \lambda_0 \left(M_{nml}(\kappa) \int_{\kappa \le \kappa_c} \frac{d^d \sigma}{(2\pi)^d} \int \frac{d\varpi}{2\pi} U_m(\sigma, \varpi) U_l(\kappa - \sigma, \omega - \varpi) \right.$$

$$\left. - HM_{nh}(\kappa) \int\int_{\kappa \le \kappa_c} \frac{d^d \sigma d^d \beta}{(2\pi)^{2d}} \int\int \frac{d\varpi d\chi}{(2\pi)^2} S_h(\beta, \chi) U_r(\sigma, \varpi) U_r(\kappa - \sigma - \beta, \omega - \varpi - \chi) \right), \quad (6)$$

где $M_{nml} = \frac{1}{2i}(\kappa_m M_{nl} + \kappa_l M_{nm})$, $M_{nl} = \delta_{nl} - \frac{\kappa_n \kappa_l}{\kappa^2}$. Параметр λ_0 введен для дальнейшего анализа теории возмущений, который в окончательном результате примем $\lambda_0 = 1$.

Фурье-образ силы F_n, которая входит в уравнение (6), определяется через корреляционную функцию случайных сил в виде [7]:

$$\left\langle F_n(\kappa, \omega) F_m(\kappa', \omega') \right\rangle = \frac{2(2\pi)^{d+1}}{\kappa^{d-4+\varepsilon^*}} D_0 M_{nm}(\kappa) \delta(\kappa + \kappa') \delta(\omega + \omega'). \quad (7)$$

Процедура ренормализационного анализа состоит в том, что поле скорости и силы разбиваем на быстрые и медленные моды с последующим исключением быстрых мод:

$$U\left(\vec{\kappa},\omega\right)=\begin{cases}U^{<}\left(\kappa,\omega\right) & 0<\kappa<\kappa_c\exp\left(-\tau\right)\\ U^{>}\left(\kappa,\omega\right) & \kappa_c\exp\left(-\tau\right)<\kappa<\kappa_c,\end{cases} \tag{8}$$

$$F\left(\vec{\kappa},\omega\right)=\begin{cases}F^{<}\left(\kappa,\omega\right) & 0<\kappa<\kappa_c\exp\left(-\tau\right)\\ F^{>}\left(\kappa,\omega\right) & \kappa_c\exp\left(-\tau\right)<\kappa<\kappa_c.\end{cases} \tag{9}$$

Подставим (8) в (6). В результате получим выражение для быстрых мод:

$$\begin{aligned}&G_0^{-1}\left(\kappa,\omega\right)U_n^{>}\left(\kappa,\omega\right)=\\ &F_n^{>}\left(\kappa,\omega\right)+\lambda_0\left(M_{nml}^{>}\left(\kappa\right)\int_{\kappa\le\kappa_c}\frac{d^d\sigma}{\left(2\pi\right)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}\Big[U_m^{<}\left(\sigma,\varpi\right)U_l^{<}\left(\kappa-\sigma,\omega-\varpi\right)+\right.\\ &2U_m^{<}\left(\sigma,\varpi\right)U_l^{>}\left(\kappa-\sigma,\omega-\varpi\right)+U_m^{>}\left(\sigma,\varpi\right)U_l^{>}\left(\kappa-\sigma,\omega-\varpi\right)\Big]-\\ &HM_{nh}^{>}\left(\kappa\right)\iint_{\kappa\le\kappa_c}\frac{d^d\sigma d^d\beta}{\left(2\pi\right)^{2d}}\iint\frac{d\varpi d\chi}{\left(2\pi\right)^2}S_h\left(\beta,\chi\right)\Big[U_r^{<}\left(\sigma,\varpi\right)U_r^{<}\left(\kappa-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi\right)+\\ &\left.+2U_r^{<}\left(\sigma,\varpi\right)U_r^{>}\left(\kappa-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi\right)+U_r^{>}\left(\sigma,\varpi\right)U_r^{>}\left(\kappa-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi\right)\Big]\right)\end{aligned} \tag{10}$$

и аналогичным образом получим выражение для медленных мод.

Для того чтобы исключить быстрые моды из уравнения (10) применим теорию возмущений для быстрых мод. Введем для быстрых мод выражение:

$$U^{>}\left(\tilde{\kappa}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda_0^s U_s^{>}\left(\tilde{\kappa}\right),\quad \tilde{\kappa}=\left(\vec{\kappa},\omega\right). \tag{11}$$

Подставим (11) в (10) и приравняем члены при одинаковых степенях λ_0.
При $s=0$

$$U_{n0}^{>}\left(\tilde{\kappa}\right)=G_0\left(\tilde{\kappa}\right)F_{n0}^{>}\left(\tilde{\kappa}\right), \tag{12}$$

при $s=1$

$$\begin{aligned}&U_{n1}^{>}\left(\tilde{\kappa}\right)=G_0\left(\tilde{\kappa}\right)\left(M_{nml}^{>}\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\Big[U_m^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)U_l^{<}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}\right)+2U_m^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)U_{l0}^{>}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}\right)+U_{m0}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)U_{l0}^{>}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}\right)\Big]-\right.\\ &\left.-HM_{nh}^{>}\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}d\tilde{\beta}}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}S_h\left(\tilde{\beta}\right)\Big[U_r^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)U_r^{<}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+2U_r^{<}\left(\tilde{\sigma}\right)U_{r0}^{>}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)+U_{r0}^{>}\left(\tilde{\sigma}\right)U_{r0}^{>}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)\Big]\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Далее исключим быстрые моды в уравнении (10) путем подстановки (13) в (10). В результате этой операции получим:

$$G_0^{-1}(\tilde\kappa)U_n^<(\tilde\kappa)=F_n^<(\tilde\kappa)+\lambda_0\Bigg(M_{nml}^<(\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma}{(2\pi)^{d+1}}\Big[U_m^<(\tilde\sigma)U_l^<(\tilde\kappa-\tilde\sigma)+2U_m^<(\tilde\sigma)U_{l0}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma)+$$
$$U_{m0}^>(\tilde\sigma)U_{l0}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma)\Big]-HM_{nh}^<(\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma d\tilde\beta}{(2\pi)^{2d+2}}S_h(\tilde\beta)\Big[U_r^<(\tilde\sigma)U_r^<(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)+$$
$$2U_r^<(\tilde\sigma)U_{r0}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)+U_{r0}^>(\tilde\sigma)U_{r0}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)\Big]\Bigg)+$$
$$2\lambda_0^2\Bigg(M_{nml}^<(\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma}{2\pi}\Big[U_m^<(\tilde\sigma)U_{l1}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma)+U_{m0}^>(\tilde\sigma)U_{l1}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma)\Big]-$$
$$HM_{nh}^<(\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma d\tilde\beta}{(2\pi)^{2d+2}}S_h(\tilde\beta)\Big[U_r^<(\tilde\sigma)U_{r1}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)+U_{r0}^>(\tilde\sigma)U_{r1}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)\Big]\Bigg)+O(\lambda_0^3). \quad (14)$$

Теперь с помощью осреднения можно исключить эффекты быстрых мод, учитывая правила [7]:

$\langle F^<\rangle=F^<$, $\langle U^<\rangle=U^<$, $M_{nml}^<(\kappa)\langle U_{l0}^>(\tilde\sigma)U_{m0}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma)\rangle=0$, $\langle F^>\rangle=0$, $\langle U^>\rangle=0$.

Если возмущающая сила подчиняется гаусовскому распределению вероятности, то $\langle F_l^> F_m^> F_n^>\rangle=0$ и соответственно $\langle U_{l0}^> U_{m0}^> U_{n0}^>\rangle=0$.

Ограничимся случаем s = 2. Тогда получим:

$$\left[-i\omega+\frac{\nu_0}{K}+J(\nu_0+\Delta\nu)\kappa^2\right]U_n^<(\tilde\kappa)=F_n^<(\tilde\kappa)+$$
$$\lambda_0\left[M_{nml}^<(\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma}{(2\pi)^{d+1}}U_m^<(\tilde\sigma)U_l^<(\tilde\kappa-\tilde\sigma)-HM_{nh}^<(\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma d\tilde\beta}{(2\pi)^{2d+2}}S_h(\tilde\beta)U_r^<(\tilde\sigma)U_r^<(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)\right]+$$
$$\lambda_0^2\Bigg[2M_{nml}^<(\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma d\tilde\upsilon}{(2\pi)^{2d+2}}G_0(\tilde\kappa-\tilde\sigma)M_{lts}^>(\kappa-\sigma)U_m^<(\tilde\sigma)U_t^<(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\upsilon)U_s^<(\tilde\upsilon)-$$
$$2HM_{nh}^<(\kappa)\Bigg\{\int\frac{G_0(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)M_{rml}^>(\kappa-\sigma-\beta)\,d\tilde\sigma d\tilde\beta d\tilde\upsilon}{(2\pi)^{3d+3}}S_h(\tilde\beta)U_r^<(\tilde\sigma)U_m^<(d\tilde\upsilon)U_l^<(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)-$$
$$H\int\frac{G_0(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta)M_{nh}^>(\kappa-\sigma-\beta)\,d\tilde\upsilon d\tilde\beta d\tilde\upsilon}{(2\pi)^{3d+3}}S_h(\tilde\beta)U_r^<(\tilde\sigma)U_r^<(\tilde\upsilon)U_r^<(\tilde\kappa-\tilde\sigma-\tilde\beta-\tilde\upsilon)\Bigg\}\Bigg]-\Delta N, \quad (15)$$

где

$$\Delta\nu(\tilde\kappa)=-8\lambda_0^2\kappa^{-2}J^{-1}D_0M_{sml}^<(\tilde\kappa)\int\frac{d\tilde\sigma}{(2\rho)^{d+1}}G_0(\tilde\sigma-\tilde\kappa)\frac{|G_0(\tilde\sigma)|^2M_{lts}^>(\tilde\kappa-\tilde\sigma)M_{mt}(\tilde\sigma)}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}} \quad (16)$$

является поправкой, ренормализирующей молекулярную вязкость. Последнее слагаемое в (15) описывается выражением:

$$\Delta N = 8\lambda_0^2 H M_{rml}^{<}(\vec{\kappa}) D_0 \int \frac{G_0(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma})\left|G_0(\tilde{\sigma})\right|^2 M_{nh}^{>}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma}) M_{mr}(\vec{\sigma}) d\tilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}\sigma^{d-4+\varepsilon^*}} \int \frac{S_h(\tilde{\beta}) U_n^{<}(\tilde{\kappa}-\tilde{\beta})}{(2\pi)^{d+1}} d\tilde{\beta}\,. \tag{17}$$

При получении (15) – (17) было учтено правило $M_{nml}^{<}(\kappa) U_s^{<}(\tilde{\kappa}) = M_{sml}^{<}(\kappa) U_n^{<}(\tilde{\kappa})$.

ΔN в выражении (15) описывает ренормализированный фактор Форчаймера. Процесс перенормировки продолжается до фиксированной точки. По мере приближения к этой фиксированной точке уравнение (15) примет вид:

$$G^{-1}(\tilde{\kappa})\, U_n^{<}(\tilde{\kappa}) = F_n^{<}(\tilde{\kappa}) + \lambda_0 \left[M_{nml}^{<}(\kappa) \int \frac{d\tilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}} U_m^{<}(\tilde{\sigma}) U_l^{<}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}) - H M_{nh}^{<}(\kappa) \int \frac{d\tilde{\sigma} d\tilde{\beta}}{(2\pi)^{2d+2}} S_h(\tilde{\beta}) U_r^{<}(\tilde{\sigma}) U_r^{<}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}) \right], \tag{18}$$

где $G(\tilde{\kappa}) = \left[-i\left(\omega - \frac{\Delta N}{i U_n^{<}(\tilde{\kappa})}\right) + \frac{\nu_0}{K} + J\kappa^2(\nu_0 + \Delta\nu) \right]^{-1}$ – ренормализированный пропагатор.

Первый этап ренормализации окончен. Если из выражения (18) убрать символы медленных мод, то оно преобразуется в (10). Выражение (18) получено в интервале $0 < \kappa < \kappa_c \exp(-\tau)$, тогда как (10) было получено в интервале $0 < \kappa < \kappa_c$. На данном этапе были удалены из рассмотрения моды в интервале $\kappa_c' = \kappa_c \exp(-\tau) < \kappa < \kappa_c$, а их влияние учтено введением перенормированной вязкости. Далее исключим моды из сферического слоя $\kappa_c'' < \kappa < \kappa_c'$ и т. д.

Для получения дифференциального уравнения, описывающего эффективную вязкость вычислим интеграл (16):

$$\int \frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d} M_{lth}^{>}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma}) M_{mt}(\vec{\sigma}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varpi}{2\pi} \frac{G_0(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma})\left|G_0(\tilde{\sigma})\right|^2}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}} =$$

$$= \int \frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d} \frac{M_{lth}^{>}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma}) M_{mt}(\vec{\sigma})}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varpi}{2\pi} \frac{1}{\left[\nu(\kappa-\sigma)^2 + i(\varpi-\omega)\right]\left[\nu^2\kappa^4 + \varpi^2\right]}. \tag{19}$$

Для того чтобы взять этот интеграл можно воспользоваться теоремой [8], согласно которой несобственный интеграл первого рода в пределах от -∞ до ∞ равен коэффициенту $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов подынтегральной функции в особых точках верхней полуплоскости. Следовательно:

$$\int \frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d} \frac{M_{lth}^{>}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma}) M_{mt}(\vec{\sigma})}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varpi}{2\pi} \frac{1}{\left[\nu(\kappa-\sigma)^2 + i(\varpi-\omega)\right]\left[\nu^2\sigma^4 + \varpi^2\right]} = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int d^d\vec{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\varpi,\vec{\sigma}) d\varpi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int d^d\vec{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i}{(2\pi)^{d+1}} \left(\mathrm{Res}\left[\Psi(\varpi,\vec{\sigma}),\varpi_1\right] + \mathrm{Res}\left[\Psi(\varpi,\vec{\sigma}),\varpi_3\right] \right) d\varpi =$$

$$=\int\frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d}\frac{iM^{>}_{lth}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma})M_{mt}(\vec{\sigma})\sigma^{-d+4-\varepsilon^*}}{2i\sigma^2\nu^2\left(\kappa^2-2\kappa\sigma+2\sigma^2\right)+2\sigma^2\nu\omega}=\int\frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d}\frac{M^{>}_{lth}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma})M_{mt}(\vec{\sigma})\sigma^{-d+2-\varepsilon^*}}{2\sigma^2\nu^2+2\nu^2(\kappa-\sigma)^2-i\nu\omega}, \tag{20}$$

где символ Res означает вычет. Выражение для ренормированной вязкости имеет вид:

$$\Delta\nu=4\lambda_0^2\kappa^{-2}J^{-1}D_0M^{<}_{hml}(\vec{\kappa})\int\frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d}\frac{M^{>}_{lth}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma})M_{mt}(\vec{\sigma})\sigma^{-d+2-\varepsilon^*}}{\sigma^2\nu^2+\nu^2(\kappa-\sigma)^2-i\nu\omega}.$$

Оценим интеграл по волновым числам в пределе $\omega\to 0$. Используя биномиальный ряд, представим предыдущее выражение так:

$$\Delta\nu\approx\frac{2\lambda_0^2\kappa^{-2}J^{-1}D_0M^{<}_{hml}(\vec{\kappa})}{(2\pi)^d\nu^2}\int d^d\sigma\left(1+\frac{\vec{\kappa}\cdot\sigma}{\sigma^2}+i\frac{\omega}{2\sigma^2\nu}\right)M^{>}_{loh}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma})M_{mo}(\vec{\sigma})\sigma^{-y-4}, \tag{21}$$

где $y=d-4+\varepsilon^*$.

Разбиваем интеграл (21) на два интеграла $\Delta\nu\approx\Delta\nu_1+\Delta\nu_2$, где

$$\Delta\nu_1=\frac{2\lambda_0^2\kappa^{-2}D_0J^{-1}M^{<}_{hml}(\vec{\kappa})}{(2\pi)^d\nu^2}\int d^d\vec{\sigma}\left(1+\frac{\vec{\kappa}\cdot\vec{\sigma}}{\sigma^2}\right)M^{>}_{loh}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma})M_{mo}(\vec{\sigma})\sigma^{-y-4}, \tag{22}$$

$$\Delta\nu_2=i\frac{\lambda_0^2\kappa^{-2}D_0J^{-1}M^{<}_{hml}(\vec{\kappa})\omega}{(2\pi)^d\nu^3}\int d^d\vec{\sigma}M^{>}_{loh}(\vec{\kappa}-\vec{\sigma})M_{mo}(\vec{\sigma})\sigma^{-y-6}. \tag{23}$$

Далее нужно вычислить интеграл по пространству волновых чисел. Для этого воспользуемся соотношениями:

$$\int\sigma_m\sigma_n d\sigma=\frac{S_d}{d}\delta_{mn}\int\sigma^{d+1}d\sigma,$$

$$\int\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n d\sigma=\frac{S_d}{d(d+2)}\left(\delta_{kl}\delta_{mn}+\delta_{km}\delta_{\ln}+\delta_{kn}\delta_{lm}\right)\int\sigma^{d+3}d\sigma.$$

В результате интегрирования получаем из (23)

$$\Delta\nu_1=A_d\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu^2\kappa_c^{\varepsilon^*}}\frac{\exp(\varepsilon^*\tau)-1}{\varepsilon^*}, \tag{24,a}$$

где $A_d=\tilde{A}_d\frac{S_d}{(2\pi)^d}$, $\tilde{A}_d=\frac{d^2-d}{2d(d+2)}$, $S_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

$$\Delta\nu_2 = iB_d \frac{\lambda_0^2 D_0 J^{-1}}{\nu^2 \kappa_c^{\varepsilon^*}} \frac{\omega}{\nu\kappa_c^2} \frac{\exp\left[\left(\varepsilon^*+2\right)\tau\right]-1}{\varepsilon^*+2}, \tag{24,б}$$

где $B_d = \frac{S_d}{\left(2\pi\right)^d} \frac{d^2-d-2}{4d\left(d+2\right)}$.

Таким образом, имеем:

$$\Delta\nu \approx A_d \frac{\lambda_0^2 D_0 J^{-1}}{\nu^2 \kappa_c^{\varepsilon^*}} \frac{\exp\left(\varepsilon^*\tau\right)-1}{\varepsilon^*}. \tag{25}$$

Следовательно, ренормализованный пропагатор принимает вид

$$G\left(\kappa\right) = \left[-i\omega\left(1-\kappa^2\gamma - \frac{\Delta N}{iU^{<}\left(\tilde{\kappa}\right)}\right) + \frac{\nu_0}{K} + J\kappa^2\left(\nu_0 + \Delta\nu_1\right)\right]^{-1},$$

где $\gamma = \frac{\Delta\nu_2}{i\omega} = B_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2\kappa_c^{\varepsilon^*}} \frac{1}{\nu\kappa_c^2} \frac{\exp\left[\left(\varepsilon^*+2\right)\tau\right]-1}{\varepsilon^*+2}$.

Эффективная вязкость будет определена выражением:

$$\nu = \nu_0 + A_d J^{-1} \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu_0^2 \kappa_c^{\varepsilon^*}} \frac{\exp\left(\varepsilon^*\tau\right)-1}{\varepsilon^*}. \tag{26}$$

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение турбулентной вязкости продифференцируем (26) по τ в пределе $\tau \to 0$ и получим:

$$\frac{d\nu}{d\tau} = A_d J^{-1} \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 \kappa_c^{\varepsilon^*}} . \tag{27}$$

Индекс «0» опущено из-за того что ренормализационная процедура происходит при условии, что $\nu\left(\kappa_c\right) \to \nu\left(\kappa_c'\right)$.Учитывая, то что $d\tau = -\kappa_c'^{-1} d\kappa_c'$, (27) перепишем в виде:

$$\frac{d\nu}{d\kappa_c} = -A_d J^{-1} \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 \kappa_c^{1+\varepsilon^*}} . \tag{28}$$

Так как начальные условия $\nu\left(\kappa_d\right) = \nu_0,\ \kappa_d = 0,2\left(\frac{\varepsilon}{\nu_0^3}\right)^{1/4}$ выражение (27) после интегрирования будет иметь вид:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + 3A_d J^{-1} \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu_0^3} \frac{\kappa_c^{-\varepsilon^*} - \kappa_d^{-\varepsilon^*}}{\varepsilon^*} \right)^{1/3}, \qquad (29)$$

где κ_d – диссипативное волновое число. В предположении, что $\kappa_c \ll \kappa_d$, уравнение для эффективной вязкости будет иметь следующий вид:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + 3A_d J^{-1} \frac{D_0}{\nu_0^3} \frac{\kappa_c^{-\varepsilon^*}}{\varepsilon^*} \right)^{1/3}, \qquad (30)$$

а для турбулентной –

$$\nu = \left(3A_d J^{-1} D_0 \frac{\kappa_c^{-\varepsilon^*}}{\varepsilon^*} \right)^{1/3}. \qquad (31)$$

При получении (30) и (31) было учтено, что $\lambda_0 = 1$. Эти формулы описывают зависимость эффективной и турбулентной вязкостей от волнового числа.

Для использования в практических расчетах эффективной и турбулентной вязкости необходимо исключить волновое число из (30) и (31). Для этого вычислим спектр турбулентности, который определяется соотношением:

$$E(\kappa) = \frac{S_d}{2(2\pi)^{d+1}} \kappa^{d-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr} \left(\frac{\overline{U_n(\kappa,\omega) U_m(-\kappa,-\omega)}}{(2\pi)^{d+1} \delta(\kappa+\kappa') \delta(\omega+\omega')} \right) d\omega \,, \qquad (32)$$

где Tr – след матрицы. Для нахождения этого интеграла воспользуемся методикой [6]. Коэффициент кинематической турбулентной вязкости получаем из уравнения:

$$\nu_t = C_\nu J^{-1} \frac{\mathrm{k}^2}{\varepsilon} \,. \qquad (33)$$

Для трехмерного течения $C_\nu = 0.1$.

Преобразуем поправку γ следующим образом:

$$\gamma = \frac{B_d}{A_d} A_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 \kappa_c^{\varepsilon^*}} \frac{\exp(\varepsilon^* \tau) - 1}{\varepsilon^*} \frac{1}{\nu \kappa_c^2} \frac{\varepsilon^* \left[\exp\left[(\varepsilon^* + 2)\tau \right] - 1 \right]}{(\varepsilon^* + 2)\left[\exp(\varepsilon^* \tau) - 1 \right]}.$$

Устремляя разницу между локальными волновыми числами обрезания к нулю, т.е. в предел $\tau \to 0$ получим $\gamma = \dfrac{B_d}{A_d} \dfrac{1}{\kappa_c^2}$.

Далее исключаем κ_c, получим: $\gamma = \frac{B_d}{A_d}\frac{1}{\kappa_c^2} = B_d\left(\frac{\nu^3\varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2}D_0}\right)^{2/\varepsilon^*}.$

Интегрируя (24) по $\tilde{\sigma}$, имеем:

$$\Delta N = -2H\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{d^2-2}{d(d+2)}\frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu_0^2\kappa_c^{\varepsilon^*}}\frac{\exp(\varepsilon^*\tau)-1}{\varepsilon^*}i\kappa_m\int\frac{S_m(\tilde{\beta})U_n^<(\tilde{\kappa}-\tilde{\beta})}{(2\pi)^{d+1}}d\tilde{\beta}. \quad (34)$$

Учитывая выражение для $\Delta\nu_1$ получаем из (24)

$$\Delta N = -4H\frac{d^2-2}{d^2-d}\Delta\nu J i\kappa_m\int\frac{S_m(\tilde{\beta})U_n^<(\tilde{\kappa}-\tilde{\beta})}{(2\pi)^{d+1}}d\tilde{\beta}\,.$$

Собрав все полученные поправки и возвращаясь из пространства Фурье-образов в физическое пространство приходим, к окончательному виду уравнения движения жидкости в макропористой среде:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_m}\left[B_d\left(\frac{\nu_t^3\varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2}D_0}\right)^{2/\varepsilon^*}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial x_m}\left[J(\nu_0+\nu_t)\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right]$$
$$-\varphi\frac{\nu_0}{K}u_n-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|u_n+4\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\nu_t J\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_m u_n}{|V|}. \quad (35)$$

Ренормализация уравнения энергии

Рассмотрим ренормализацию уравнения энергии.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\nabla^2\right)\mathrm{T}+\varphi\frac{\partial(\mathrm{T}u_n)}{\partial x_n}=0\,. \quad (36)$$

Переведем (36) в пространство волновых чисел и частоты.

$$G_{\mathrm{T}0}^{-1}(\vec{\kappa},\omega)\mathrm{T}(\vec{\kappa},\omega) = -i\kappa_l\lambda_0\phi\int_{\kappa\le\kappa_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}U_l(\vec{\sigma},\varpi)T(\vec{\kappa}-\vec{\sigma},\omega-\varpi)\,, \quad (37)$$

где $G_{\mathrm{T}0} = (-i\omega+\alpha_0\kappa^2)^{-1}.$

Процедуру перенормировки проводим таким же методом как уравнение движения. Таким образом, ренормализированное уравнение энергии примет такую форму:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}+\varphi\frac{\partial\left(\mathrm{T}u_n\right)}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\left(\frac{\nu_t^3\varepsilon^*}{3A_dD_0}\right)^{2/\varepsilon^*}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_n}\right]=\nabla\left[\left(a_0+\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\nabla\mathrm{T}\right], \tag{38}$$

где Pr_t − турбулентное число Прандтля.

Ренормализация уравнений кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации энергии

Для замыкания модели турбулентности кроме уравнений движения и теплообмена необходимы уравнения для кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации. Уравнение кинетической энергии турбулентности для макропористой среды имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu_0\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)k+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(p\overline{u}_n\right)}{\partial x_n}+\frac{\partial\left(k\overline{u}_n\right)}{\partial x_n}=Gn-J\varepsilon-2Hs_n\overline{u}_nk\ , \tag{39}$$

где $Gn=\frac{\nu_t}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}_n}{\partial x_m}+\frac{\partial\overline{u}_m}{\partial x_n}\right)^2=2\nu_tS_{nm}^2$ − слагаемое, описывающее генерацию турбулентной энергии. Черта сверху в последней формуле означает осредненные компоненты скорости.

Уравнение скорости диссипации энергии:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu_{k0}\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)\varepsilon=-2\nu_0\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}-u_m\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_m}-2\frac{\nu_0}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\frac{\partial^2 p}{\partial x_n\partial x_l}-2J\nu_0^2\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m\partial x_l}\right)-2\nu_0H\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial\left(s_nu_m^2\right)}{\partial x_m}. \tag{40}$$

Применив преобразования Фурье к выражениям (39) и (40), а также последующую процедуру перенормировки, получим окончательные уравнения в ренормализированном виде для кинетической энергии турбулентности:

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\overline{u}_n\frac{\partial k}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\left(\frac{\nu_t^3\varepsilon^*}{3A_dD_0}\right)^{2/\varepsilon^*}\frac{\partial k}{\partial x_n}\right]=2\nu_tS_{nm}^2-J\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_n}\left[J\left(\nu_0+\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_n}\right]-$$
$$-2\nu_0\frac{\phi}{K}k-2\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\left|V\right|k+8\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\nu_tJk\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_mu_n}{\left|V\right|} \tag{41}$$

и для скорости диссипации энергии:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\overline{u}_n\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\left(\frac{\nu_t^3\varepsilon^*}{3A_dD_0}\right)^{2/\varepsilon^*}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right]=2C_{1\varepsilon}\nu_t\frac{\varepsilon}{k}S_{nm}^2-C_{2\varepsilon}J\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_n}\left[J\left(\nu_0+\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right]$$
$$-2\nu_0\frac{\varphi}{K}\varepsilon-2\nu_0\phi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial\left(\left|V\right|u_n\right)}{\partial x_m}-8\nu_0\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\nu_tJ\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_mu_n}{\left|V\right|}\right), \tag{42}$$

где $\mathrm{Pr}_K = \mathrm{Pr}_\varepsilon$. Pr_K определяется выражением: $\left|\dfrac{\mathrm{Pr}_K^{-1} - \mathrm{A}}{1-\mathrm{A}}\right|^{\frac{\mathrm{A}+1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}} \left|\dfrac{\mathrm{Pr}_K^{-1} + \mathrm{B}}{1+\mathrm{B}}\right|^{\frac{\mathrm{B}-1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}} = \dfrac{\nu_0}{\nu_t}$,

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{d-1}{d}\tilde{A}_d^{-1}J\varphi + 1} - 1\right),\ \mathrm{B} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{d-1}{d}\tilde{A}_d^{-1}J\varphi + 1} + 1\right),\ C_{1\varepsilon} = 1{,}42 \text{ и } C_{2\varepsilon} = 1{,}68.$$

Выводы

Предложено модель нестационарного течения в пористой среде с использованием ренорм-группового анализа турбулентности, которая включает уравнение движения (35), уравнение неразрывности, уравнение энергии (38), уравнение кинетической энергии турбулентности (41) и уравнение скорости диссипации (42). Указанная модель позволяет рассчитать осредненные и пульсационные гидродинамические и тепловые характеристики потока в макропористой среде. Полученная система уравнений может быть использована для прогнозирования динамики потока теплоносителя в каналах ВТГР заполненных шаровыми тепловыделяющими элементами. Кроме того, эта модель может быть использована в любых системах, которые представляют макропористую среду, например в биотермических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лабар М.П., Шеной А.С., Симон У.А., Кэмпбэлл Е.М.* ЯЭУ GT-MHR на основе модульного реактора с гелиевым теплоносителем и газовой турбиной // Атомная техника за рубежом. – 2005. – №1. – С. 22 – 28.

2. *Поплавский В.М.* Состояние и перспективы развития АЭС с реакторами на быстрых нейтронах // Тепоэнергетика. 2004. – №8. – С. 2 – 9.

3. *Грэттон К.П.* Переоценка концепции реактора на быстрых нейтронах с газовым теплоносителем // Атомная техника за рубежом. – 2004. – №1. С. 23 – 27.

4. *Карпов В.А*. Топливные циклы и физические особенности высокотемпературных реакторов. – М.: Энегроатомиздат, 1985. – 128 с.

5. *McComb W.D*. The physics of fluid turbulence. − Oxford: Clarendon Press, 1990. − 572 p.

6. *Авраменко А.А., Басок Б.А., Кузнецов А.В.* Групповые методы в теплофизике. – К.: Наукова думка, 2003. – 483 с.

7. *Yakhot V., Orszag S. A*. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory //J. Sci. Comp. 1986. − 1, № 1. − P. 3 − 51.

8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б.В*. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Получено 12.11.2009 г.