УДК 536.24:532.526:533.001.16

Репухов В.М.

Институт технической теплофизики НАН Украины

РАСШИРЕНИЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ УРАВНЕНИЙ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЗАКОНОВ ПЕРЕНОСА

Вивчається вплив відносних законів переносу при влаштуванні одержані раніш перетворення нестаціонарних тримірних інтегродиференціальних транспортних рівнянь радіаційного теплопереносу для розширювання їх рішення.

Изучается влияние относительных законов переноса при использовании рассмотренного ранее преобразования нестационарных трехмерных интегро-дифференциальных транспортных уравнений радиационного теплопереноса для расширения их решения.

We study the influence of the rela-tive laws and themes uniform transfer laws with the transforma-tion of nonstationary three-dimensional integrodifferential transport equations of radiative heat transfer for extending its solutions and so it is presented the test of the transformation.

a_* – основная транспортируемая величина;
$\vec{b}_*(b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$ и $\vec{b}_{*T}(b_{*t} = b_{*\alpha_*}, b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$ – трех- и четырехмерные векторы переноса с проекциями на координатные оси;
$\vec{e}(\vec{n}, \vec{s} = \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ – трехмерные единичные векторы;
f_*, $f_{b*T\alpha}$, $f_{b*\alpha}$ и f_p – основные и дополнительные функции преобразования;
$I_{\nu\tau}$ – спектральная яркость транспортируемого излучения в направлении луча;
$k_1(s)$ и $k_2(s)$ – кривизна и кручение луча функции его длины s;
$L_V(a_*)$ и $R_D(a_*)$ – функционалы левой и правой части транспортного уравнения;
N_ν и $\vec{LN}_\nu$ – спектральные тензор второго ранга и трехмерный вектор преломления;
s_* и S_{*T} – дефекты преобразования функционалов левой и правой частей уравнений;
t, x, y, z – координаты четырехмерного ортонормированного базиса Декарта;
u_ν и u_n – спектральная и полная объемная плотность энергии излучения;
$\vec{V}(u, v, w)$ и $\vec{V}_T(1, u, v, w)$ – трех- и четырехмерные вектор скорости с проекциями;
α и α_* – координаты, принимающие в общем случае значения t, x, y, z, причем вторая в соответствии с индексом * = (1 и h), u, v, w и $a_1 = 1$;
$\Psi^0_{*\alpha}$ – относительные законы переноса.

Индексы верхние:

черта сверху – образ;
0 – максимальные значения величины.

Индексы нижние:

n – полные по частотам характеристики фотонного континуума;
ν – спектральные характеристики фотонного континуума;
* – плотность и другие величины, являющиеся решением транспортных уравнений (ρ, u, v, w,…., h^0, $I_{\nu\tau}$, $I_{n\tau}$, u_ν, u_n, ...).

Введение

Цель работы найти локальное обратимое преобразование общих интегро-дифференциальных транспортных уравнений радиационного теплопереноса (прообраз) к простейшим (образ, величины с верхней чертой) при любых законах переноса и состояния среды; получить систему уравнений-условий расширения решения простейших уравнений и выполнить анализ ее полноты, непротиворечивости и замкнутости [1, 2].

Расширение решения транспортных уравнений конвективного тепломассопереноса с использованием аналогичного преобразования и относительных законов переноса в молекулярном континууме при разных видах течения изучалось ранее; а настоящая работа часть расширения решения радиационно-конвективного тепломассопереноса [3-9].

В ортонормированном базисе вещественного пространства существует каноническая запись линий переноса (линии тока, лучи) и транспортных уравнений единая в молекулярном (ρ = var) и фотонном (ρ = 1) континууме с точностью до вектора переноса [9]:

$$\left(\frac{ds}{V_s}=\right)\ \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{dt}{1}\ \text{ и }\ L_V(a_*)\equiv\rho(\vec{V}_T\cdot\operatorname{grad}_T a_*)=$$

$$=\operatorname{div}_T\vec{b}_{*T}\equiv R_D(a_*)\,, \tag{1}$$

где $L_V(a_*)=\rho a_*(\vec{V}_T\cdot\operatorname{grad}_T\ln a_*)$, $R_D(a_*)=\dfrac{\partial b_{*t}}{\partial a_*}+\operatorname{div}\vec{b}_*$ и $R_D(a_*)=\int_V F_V dV$ – функционалы при двух видах представления правого однозначно связаны с вектором переноса; α_* и * – транспортируемая величина, отнесенная в фотонном (молекулярном) континууме к единице объема (массы), и ее индекс соответствуют плотности, проекциям скорости, полной энтальпии, спектральной и полной яркости в направлении линии переноса s, объемной плотности энергии излучения и другим (ρ, u, v, w, h_0, $I_{v\tau}$, $I_{n\tau}$, u_v, u_n,...); gradα_*, grad$_T\alpha_*$, $\vec{V}(u,v,w)$, $\vec{V}_T(1,u,v,w)$, $\vec{b}_*(b_{*x},b_{*y},b_{*z})$ и $\vec{b}_{*T}(b_{*t},b_{*x},b_{*y},b_{*z})$ – трех- и четырехмерные градиенты транспортируемых величин, скорости и векторы переноса в ортонормированном базисе; индексы * – сочетаются в левой части с координатами a = t, x, y, z и правой а = α_*, x, y, z с выбором α_* = t, x, y, z согласно * = (1 и h), u, v, w,... и величины $a_1 = 1$ при определении и задании величины $b_{*t} = b_{*\alpha_*} = P_{\alpha_*}$ и ее производной; а индексы T – относится к четырехмерным характеристикам [3-5, 9]. Трехмерный вектор переноса с параметром время однозначно задается по дивергенции и вихрю вектора внутри бесконечной или замкнутой области, ограниченной поверхностью с заданной на ней его производной по нормали [10], или коэффициентам дефектов $\bar{C}_{*\alpha}$ [4].

Существование канонических уравнений для различных видов движения в континуумах с различными свойствами среды и форм подтверждается преобразованием [9].

Когерентность рассеяния излучения позволяет ограничиться спектральным континуумом с осреднением величин по направлениям (нижние индексы v и vn) и полным с дополнительным суммированием по частотам (индекс n), подробно рассматривая спектральный континуум, а отличия и связь с другими оговаривать [1, 2, 9].

Транспортные уравнения спектрального континуума

В спектральном континууме скорости в среде $\vec{c}_{vT}\equiv\vec{V}_T$, $\vec{c}_v\equiv\vec{V}$ и вакууме $\vec{c}_0\equiv\vec{V}_0$, тензоры преломления третьего N_{vT} и второго ранга N_v позволяют записать соотношения, допускающие обычное (зеркальное) изменение направления скоростей на лучах:

$$N_v\,\vec{c}_v = E\,\vec{c}_0\ \text{ или }\ \vec{n}_v\equiv\vec{c}_0/c_{v\tau}=N_v\,\vec{\tau}\,,$$

$$\operatorname{div}(\vec{N_v c_v})=\operatorname{div}\vec{c}_0=0\ \text{ и }\ E\,\vec{LN}_v\equiv N_v^{-1}\operatorname{div}N_v\,;$$

$$N_v^{-1}\operatorname{div}N_v\,\vec{c}_v+E\operatorname{div}\vec{c}_v=0\,,\ (\vec{LN}_v\cdot\vec{c}_{ve})+\operatorname{div}\vec{c}_v=0\ \text{ и}$$

$$\frac{\eta_v}{k_v}=(\operatorname{mod}\vec{N}_v\tau)^2 I_{bv0}\,; \tag{2}$$

– линейное преобразование скоростей, или вектор показателя преломления, условия с опорным лучом постоянной скорости в вакууме и вектор-столбец преломления; условие нулевой дивергенции скорости в вакууме и линейность скоростей позволяют выделить уравнение неразрывности луча, а также равенство для дивергенции скорости в среде и закон Кирхгофа локального термодинамического равновесия вдоль луча [6-9].

Из уравнений (2) следует, что тензору N_{vT} соответствует диагональная матрица $[n_{vT}] = [1,n_{vxx},n_{vyy},n_{vzz}]$ в ортонормированном базисе Декарта, а матрицы тензора, вектор строка дивергенция, вектор-столбец преломления и дивергенция скорости имеют вид:

$$N_v\to[n_{vxx},n_{vyy},n_{vzz}]\ \text{ и }\ N_v^{-1}=\left[\frac{1}{n_{vxx}},\frac{1}{n_{vyy}},\frac{1}{n_{vzz}}\right],$$

$$\operatorname{div}N_v=\left(\frac{\partial n_{vxx}}{\partial x},\frac{\partial n_{vyy}}{\partial y},\frac{\partial n_{vzz}}{\partial z}\right),$$

$$E\,\vec{LN}_v=\left(\frac{\partial\ln n_{vxx}}{\partial x},\frac{\partial\ln n_{vyy}}{\partial y},\frac{\partial\ln n_{vzz}}{\partial z}\right)'\ \text{ и}$$

$$\left(\frac{\partial\ln n_{vxx}}{\partial x}c_{vx}+\frac{\partial\ln n_{vyy}}{\partial y}c_{vy}+\frac{\partial\ln n_{vzz}}{\partial z}c_{vz}\right)+\operatorname{div}\vec{c}_v=0\,.$$

На луче в точке P выделяются локальные ортонормированные базисы: абсолютный Декарта ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) и подвижный трехгранник с относительным базисом Френе ($\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ – орты касательной, главной нормали, бинормали). Углы Эйлера связывают базисы матрицей ортогонального преобразования и проекции вектора трехмерной группой вращения

$(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})[A]$ и $(LN_{\nu\tau}, LN_{\nu\nu}, LN_{\nu\beta})' =$

$= [B]'(LN_{\nu x}, LN_{\nu y}, LN_{\nu z})'$, где $[B] = ([A]')^{-1}$.

Заданному в каждой точке пространства тензору преломления однозначно соответствуют скорости опорного луча в вакууме и среде с кривизной $k_1(s)$ и кручением $k_2(s)$, которые определяют форму луча как функцию его длины s (натуральное уравнение) и вместе с направлением в точке $P(s_0)$ определенный луч в пространстве; а на границе анизотропных сред с разными тензорами преломления при учете ее тензорных свойств и скольжения на ней лучей – обобщенные законы отражения и преломления [6-8].

В точке P на луче перенос зависит от двух параметров, а уравнения Френе и (2) при

$$\frac{d[(a_\tau \Delta V)\vec{e}]}{(a_\tau \Delta V)dt} = \frac{1}{a_\tau}[\vec{e}\,\mathrm{div}_T(\vec{c}_{\nu eT} a_\tau) + a_\tau c_{\nu e}\frac{d\vec{e}}{ds_e}] =$$

$$= \vec{e}(\vec{c}_{\nu eT} \cdot \mathrm{grad}_T \ln a_\tau) - (\vec{\tau}\, c_{\nu\tau} LN_{\nu\tau} + \vec{\nu}\, c_{\nu\nu} LN_{\nu\nu} +$$

$$+ \vec{\beta}\, c_{\nu\beta} LN_{\nu\beta}) + \left(c_{\nu\tau}\frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\tau} + c_{\nu\nu}\frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\nu} + c_{\nu\beta}\frac{\partial\vec{e}}{\partial s_\beta}\right)\Bigg|_{\vec{e}=\vec{\tau}} \to$$

$$\to \vec{\tau}(\vec{c}_{\nu\tau T} \cdot \mathrm{grad}_T \ln a_\tau) - c_{\nu\tau}(\vec{\tau}\, LN_{\nu\tau} - \vec{\nu}\, k_{1\nu}) -$$

$$-c_{\nu\nu}\,\vec{\nu}(LN_{\nu\nu} - k_{1\nu}) - \lambda c_{\nu\beta}\,\vec{\beta}(LN_{\nu\beta} - k_{2\nu}) + \vec{\Delta}^{\text{остаток}}_{c_{\nu\nu}, c_{\nu\beta}} \tag{3}$$

приводят к потере решений $LN_{\nu\nu} - k_{1\nu} = 0$ и $LN_{\nu\beta} - k_{2\nu} = 0$ [6-8].

Считая решением уравнений (1) связи скоростей и проекций вектора преломления (2), по Френе кривизну $k_{1\nu}$ и кручение $k_{2\nu}$, из равенств (3) можно записать функционал:

$$R_D(c_{\nu\tau}) = c_{\nu\tau}^2 k_{0\nu} + R_{D_0}(c_{\nu\tau})$$

при $LN_{\nu\tau} - k_{0\nu} = 0$. (4)

Осредненному по всем направлениям тензору $N_{\nu n} = n_{\nu n}E$ (изотропное поле) соответствуют спектральные осредненные скорость и линии переноса, в общем случае отличные от величин исходного спектрального поля, а также объемная плотность излучения:

$c_{\nu n} = c_0/n_{\nu n}$, $u_{\nu n} \equiv u_\nu = 4\pi I_{\nu n}/c_{\nu n}$ и $\Sigma_{\nu n} \equiv \Sigma_\nu = c_{\nu n} u_\nu =$

$$= 4\pi I_{\nu n} \text{ при } I_{\nu n} \equiv \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega=4\pi} I_\nu d\Omega \tag{5}$$

– связи среднего показателя преломления и скоростей; средней яркости, объемной плотности излучения и плотности объемного падающего излучения.

Если изменение вектора скорости связано с обменом лучистой энергии между криволинейными лучами и происходит без изменения формы движения, учесть уравнения (3) – (5), коэффициента излучения $\beta_{\nu\tau}$ и вектора излучения; то в соприкасающейся плоскости и плоскости с бинормалью транспортные уравнения проекций скорости вдоль луча, спектральной яркости и объемной плотности излучения имеют вид [9]:

$$\begin{aligned}
& k_{0\nu}(s_\nu) \equiv LN_{\nu\tau}, \; k_{1\nu}(s_\nu) = LN_{\nu\nu}, \; k_{2\nu}(s_\nu) = LN_{\nu\beta}, \\
& L_V(I_{\nu\tau}(P, s_\nu, t)) = I_{\nu\tau} c_{\nu\tau} k_{0\nu} + R_{D0}(I_{\nu\tau}) = \\
& = c_{\nu\tau}(\eta_{e\nu\tau} - \beta_{\nu\tau} I_{\nu\tau}) \equiv R_D(I_{\nu\tau}), \\
& L_V(u_\nu(P, s_\nu, t)) = \frac{\partial u_\nu}{\partial t} - u_\nu \sum_{\alpha=x,y,z}\frac{\partial c_{\nu n\alpha}}{\partial\alpha} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{F}_\nu) = \\
& = k_{0\nu n}\Sigma_\nu + R_{D0}(u_\nu) = 4\pi\eta_{\nu n} - k_{\nu n}\Sigma_\nu \equiv R_D(u_\nu),
\end{aligned} \tag{6}$$

где $R_{D0}(I_{\nu\tau}) = c_{\nu\tau}(\eta_{e\nu\tau} - \beta_{\nu 0} I_{\nu\tau})$, $R_{D0}(u_\nu) = 4\pi\eta_{\nu n} - k_\nu\Sigma_\nu$ и $\beta_{\nu 0} = k_\nu + \sigma_\nu$ – локальные величины однородной среды, а $\beta_{\nu\tau} = k_\nu - k_{0\nu} + \sigma_\nu$ и $k_{\nu n} = k_\nu - k_{0\nu n}$ – анизотропной, сохраняющие прежний вид уравнений (6); I_ν, H_ν, $\vec{F}_\nu$, η_ν и $\eta_{e\nu\tau} = \eta_\nu + \sigma_\nu H_{\nu\tau}$ – соответственно текущая и рассеянная яркость; сферический вектор излучения, плотности объемного собственного и эффективного излучения в общепринятом определении; σ_ν и $k_\nu = k_{\nu p} + k_{\nu q}$ – коэффициенты рассеяния и объемная поглощающая способность с разделением превращения лучистой энергии в механическую работу $k_{\nu p}$ и теплоту $k_{\nu q}$ [1].

Задание локальных спектральных свойств континуума, включая тензор преломления, новых коэффициентов излучения, индикатрисы рассеяния, а также на границе векторов скорости и излучения определяет локальное распределение вектора падающей яркости в точке P (закон яркости), и наоборот [1, 2, 10].

Связь закона яркости на границе и локального внутри объема с учетом обобщения коэффициентов обмена и оптической длины в анизотропной среде определяется интегральным решением уравнения переноса спектральной яркости и полусферической плотности потока излучения в замкнутом объеме [1, 2]. Максимальная яркость I_ν^0 и индикатриса яркости падающего излучения $p_\nu^0(s) = I_\nu(s) / I_\nu^0(P)$ позволяют переписать (6)

$$\frac{L_V(I_{\nu\tau})}{c_{\nu\tau} I_{\nu\tau}} \equiv \left(\frac{c_{\nu\tau T}}{c_{\nu\tau}} \vec{\tau}_{\nu T} \cdot \mathrm{grad}_T \ln I_{\nu\tau}\right) = = \frac{\eta_{\nu n}}{I_{\nu\tau}} - \beta_{\nu\tau} + \sigma_\nu \frac{p_{\nu cp}^0}{p_\nu^0} \cong \frac{\eta_{\nu n}}{I_{\nu\tau}} - \beta_{\nu\tau} + \sigma_\nu \frac{I_{\nu n}}{I_{\nu\tau}}, \quad (7)$$

где $H_{\nu\tau} = \dfrac{1}{4\rho} \displaystyle\int_{\Omega'=4\pi} I_\nu(s') p_\nu(s' \to s) d\Omega' =$

$$= \frac{I_\nu^0}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_\nu^0(s') p_\nu(s' \to s) d\Omega' = I_\nu^0 p_{\nu cp}^0 = I_{\nu cp} \cong I_{\nu n};$$

а тензор преломления, индикатрисы и углы Эйлера, задающие направление луча с максимальной яркостью, определяют его и все характеристики излучения на нем [6-8].

В результате общая для всех континуумов температура посредством закона Кирхгофа согласует: во-первых, в уравнениях (6) и (7) осредненный тензор $N_{\nu n}$ и объемную плотность энергии излучения; во-вторых, исходный спектральный тензор N_ν, индикатрису рассеяния и яркости, а также максимальную яркость (закон яркости) [6-10].

Формализм преобразования и основная система уравнений-условий

Формализм преобразования всех видов движения одной формы одинаков при искомых основных функциях преобразования и заданных дополнительных соответственно

$$f_\tau \equiv \frac{\partial \bar{t}}{\partial t}, \; f_x \equiv \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}, \; f_y \equiv \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \; f_z \equiv \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \; f_* \equiv \frac{a_*}{\bar{a}_*} \text{ и}$$

$$f_{b_{*T\alpha}} \equiv \frac{b_{*T\alpha}}{\bar{b}_{*T\alpha}}, \quad (8)$$

которые в малой окрестности точек могут считаться постоянными и определяют линейные пространства четырехмерных векторов расстояния, скорости и переноса, а рассматривавшиеся ранее $\xi = f_\rho f_x$, $\eta = f_\rho f_y$ и $\zeta = f_\rho f_z$ имеют аналогичные свойства [3-5].

Основные функции (8) позволяют: во-первых, пересчитать одноименные величины в сходственных точках на мгновенных лучах прообраза и образа; во-вторых, связать вещественную неособенную обратную матрицу преобразования координат $[C]^{-1}$ с функционалами левых частей транспортных уравнений подсистемой уравнений-условий, а правых частей и в целом полной системой. Матрица и указанные связи имеют вид:

$$[C]^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \end{bmatrix};$$

$$d\bar{t} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} dz,$$

$$d\bar{x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} dz,$$

$$d\bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} dz,$$

$$d\bar{z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} dz,$$

или $(d\overline{\alpha_T})' = [C]^{-1}(d\alpha_T)'$; при

$$(\bar{V}_T)' = \frac{[C]^{-1}}{f_T}(V_T)' \text{ и } f_T \equiv \frac{d\bar{t}}{dt};$$

причем уравнения связи

$$(V_T)' = [f_V](\bar{V}_T)', [a_*] = [\bar{a}_*][f_*], \quad (9)$$

$$[Ga_*] = [\overline{Ga}_*][C]^{-1} + [Gf_*],$$

$$[b_{*T\alpha}] = [\bar{b}_{*T\alpha}] f_{b_{*T\alpha}}],$$

$$[Gb_{*T\alpha}] = [\overline{Gb}_{*T\alpha}][C]^{-1} + [Gf_{b_{*T\alpha}}]$$

нет при подсчете условий, так как они следствие функций (8) и упрощаются при тензоре напряжений переноса третьего ранга $\vec{b}_{*T} = \vec{n}_T B_{*T}$ и $(\mathrm{div}_T \vec{b}_{*T})' \equiv ((\vec{\nabla}_T \circ B_{*T}))'$, где $[B_{*T}]$, $[Ga_*] \equiv [\frac{\partial \ln a_*}{\partial \alpha}]$, $[Gf_*] \equiv [\frac{\partial \ln f_*}{\partial \alpha}]$, $[Gb_{*T\alpha}] \equiv [\frac{\partial \ln b_{*T\alpha}}{\partial \alpha}]$ и $[Gf_{b_{*T\alpha}}] \equiv [\frac{\partial \ln f_{b_{*T\alpha}}}{\partial \alpha}]$ – матрицы со столбцами $\alpha = t$, x, y, z и строками *, или $*T\alpha = *\alpha_*$, $*x$, $*y$, $*z$ и $b_{*t} = b_{*\alpha*} = P_{\alpha*}$.

Выделение функционалов образа из функционалов прообраза ведется формально подстановкой его членов к прообразу с объединением их в функционалы образа и дефекты, что соответствует преобразованию от прообраза к образу в левой части с выделением обобщенной функции преобразования и с ее помощью в правой части в виде:

$$L_V(a_*) = \rho a_*[\frac{\partial \ln a_*}{\partial t} \pm \frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{t}} + u(\frac{\partial \ln a_*}{\partial x} \pm \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{x}}) +$$

$$+\nu(\frac{\partial \ln a_*}{\partial y} \pm \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{y}}) + w(\frac{\partial \ln a_*}{\partial z} \pm \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{z}})] =$$

$$\bar{f}_* \overline{\rho a}_*[\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{y}} + \bar{w}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{z}}] + \rho a_*(\vec{V}_T \circ \vec{\Phi}(a_*)),$$

$$L_V - \bar{f}_* \bar{L}_V = s_* \text{ и } R_D - \bar{f}_* \bar{R}_D = S_{*T} \text{ при } \bar{S}_{*T} = \bar{s}_*, \text{ или}$$

$$\bar{S}_* = \bar{s}_* + \bar{P}_*, \tag{10}$$

обобщенной функции и основных уравнениях-условиях преобразования

$$\bar{f}_* \equiv f_* f_\rho f_\tau = \frac{s_*}{\bar{s}_*} = \frac{S_{*T}}{\bar{S}_{*T}} = \frac{S_*}{\bar{S}_*} = \frac{P_*}{\bar{P}_*} \quad \text{и}$$

$$f_\tau \equiv 1 \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = f_u \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = f_v \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = f_w \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}; \tag{11}$$

где $\frac{s_*}{\rho a_*} = (\vec{V}_T \circ \vec{\Phi}_*)$ и

$$\Phi_{*\alpha}(a_*) \equiv \frac{\partial \ln a_*}{\partial \alpha} - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \alpha}\frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{\alpha}} = \frac{\partial \ln f_*}{\partial \alpha} - \sum_{\alpha_k \neq \bar{\alpha}} \frac{\partial \ln \bar{a}_*}{\partial \bar{\alpha}_k}\frac{\partial \bar{\alpha}_k}{\partial \alpha};$$

$$S_{*T} = -\bar{f}_* \sum_{\bar{\alpha}} \bar{C}_{*T\alpha} \frac{\partial \bar{b}_{*T\alpha}}{\partial \bar{\alpha}} = \sum_{\alpha} C_{*T\alpha} \frac{\partial b_{*T\alpha}}{\partial \alpha}, \text{ или}$$

$$\bar{P}_* = -\bar{C}_{P\alpha*} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\alpha}_*} \text{ и } \bar{S}_* = -\sum_{\bar{\alpha}} \bar{C}_{*\alpha} \frac{\partial \bar{b}_{*\alpha}}{\partial \bar{\alpha}}, \tag{12}$$

$$\bar{C}_{*T\alpha} \equiv 1 - \frac{\dfrac{\partial b_{*T\alpha}}{\partial \alpha}}{\bar{f}_* \dfrac{\partial \bar{b}_{*T\alpha}}{\partial \bar{\alpha}}} = 1 - \frac{f_{b*T\alpha} \dfrac{\partial \ln b_{*T\alpha}}{\partial \alpha}}{\bar{f}_* \dfrac{\partial \ln \bar{b}_{*T\alpha}}{\partial \bar{\alpha}}},$$

$$\bar{C}_{P\alpha*} \equiv 1 - \frac{f_P \dfrac{\partial \ln P}{\partial \alpha_*}}{\bar{f}_* \dfrac{\partial \ln \bar{P}}{\partial \bar{\alpha}_*}}, \quad \bar{C}_{*\alpha} \equiv 1 - \frac{f_{b*\alpha} \dfrac{\partial \ln b_{*\alpha}}{\partial \alpha}}{\bar{f}_* \dfrac{\partial \ln \bar{b}_{*\alpha}}{\partial \bar{\alpha}}}$$

и $(1 - \bar{C}_{*T\alpha})(1 - C_{*T\alpha}) = 1$ – соответственно определяемые равенствами (10) дефекты левой части однозначно представляются скалярными произведениями с помощью вектора преобразования и его проекций, а правой с помощью коэффициентов дефектов (12) [4].

Посредством дополнительных функций коэффициенты дефектов связаны с векторами переноса, следовательно, относительными законами переноса и состояния, а посредством входящих в законы свойств континуума с граничными условиями [3-9].

Основная система уравнений-условий преобразования пяти первых транспортных уравнений спектрального континуума ($k_{0\nu}$, $k_{1\nu}$, $k_{2\nu}$, $I_{\nu\tau}$, u_ν) с учетом вида правых функционалов совпадает по форме с системой полного фотонного и молекулярного при согласующихся с физическими величинами соответствующих тридцати пяти неизвестных

$$f_{T\nu}, f_{u\nu}, f_{I_{\nu\tau}}, f_{H\nu}, [f_{n_{\nu ii}}], [C_\nu]^{-1}, [Gf_*]\Big|_{*=c_{\nu x}, c_{\nu y}, c_{\nu z}}, \tag{13}$$

и имеет столько же уравнений-условий [3,9]:

1) одиннадцать подсистемы, включая первые семь для линий переноса

$\{[f_\nu]\,[C]^{-1} - f_t\,[E]\}(V_T)' = 0$ – четыре (сходственные линии тока и $[f_\nu]\,(\bar{V}_T)' = (V_T)'$),

$$f_\tau \equiv \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = f_u \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = f_v \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = f_w \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \text{ или } [E] = \frac{[f_V]}{f_\tau}[\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \alpha}] -$$

три (основные уравнения-условия), а также их пополняющие четыре для транспортных уравнений

$f_{u_\nu} = f_{I_{\nu n}}/f_{c_{\nu n}}$ и задание $f^0_{I_{\nu\tau}}$ – два (аддитивность с учетом $f^0_{p\nu}$ и $f_{H_{\nu\tau}} = f^0_{I_{\nu\tau}} f^0_{p\nu cp} \cong f_{I_{\nu n}}$), $s_{LN} = S_{LN} = 0$ – одно (дефекты, неразрывность луча),

$\frac{\eta_\nu}{k_\nu} / \frac{\overline{\eta}_\nu}{\overline{k}_\nu} = \frac{(\mathrm{mod}\,\vec{N}_\nu \tau)^2 I_{b\nu 0}(T)}{(\mathrm{mod}\,\vec{\overline{N}}_\nu \overline{\tau})^2 \overline{I}_{b\nu 0}(\overline{T})}$ – одно (состояние среды, относительный закон Кирхгофа);

2) $S_{*T} = s_*$ – пять дефектов (индексы * = $k_{0\nu}$, $k_{1\nu}$, $k_{2\nu}$, $I_{\nu\tau}$, u_ν);

3) девятнадцать замыкающих дополнительных с коэффициентами дефектов

(пятнадцать по уравнениям (12) соответственно координатам длины, три отношения элементов матриц преломления и одно единый вакуум $f_{C_0} \equiv c_0 / \overline{c}_0 = 1$).

Физическое и математическое содержание преобразования

Согласно (9) преобразование прообраза с сохранением вещественного скалярного произведения над полем функций f_*, $f_{b*T\alpha}$ и f_T обеспечивает группа самосопряженных и унитарных матриц с единицами на главной диагонали $[C]^{-1} = [H][U]$ с соответствующими эрмитовыми квадратичными формами при основных уравнениях-условиях с выделением положительно определенной $[H] = [|f_V/f_\tau|]^{-1}$ и унитарной $[U]$ [11].

В результате скалярные произведения, квадратичные формы с диагональными определителями Грама ($|(\vec{e}_{ia} \circ \vec{e}_{ka})|$, $|(\vec{e}_{ib} \circ \vec{e}_{kb})|$) для векторов ортонормированного базиса

$$L_V(a_*) \equiv (\rho a_* \mathrm{grad}_T \ln a_* \circ \vec{V}_T),$$

$$L_R(a_*) \equiv (\mathrm{grad}_T \ln b_{*T\alpha} \circ \vec{b}_{*T}) \text{ и} \quad (14)$$

$$R_D(a_*) \equiv \mathrm{div}\,\vec{b}_{*T} = L(\vec{\nabla}_T, \vec{b}_{*T}), \text{ или}$$

$$R_D(a_*) = Sp[b_{*T\alpha} Gb_{*T\alpha}] = Sp\{[b_{*T\alpha}][Gb_{*T\alpha}]\}, \quad (15)$$

как произведение матриц, свертка и след, позволяют одновременно записать в одном ортонормированном базисе столбцами левые и правые (первый вид) части транспортных уравнений в матричной форме, их системы для прообраза и образа, считая величины a_* проекциями многомерного вектора

$[\rho a_* Ga_*](V_T)' = (Sp([b_{*T}][Gb_{*T}]))'$ и

$[\overline{\rho a_*}\,\overline{Ga_*}](\overline{V}_T)' = (Sp([\overline{b}_{*T\alpha}][\overline{Gb}_{*T\alpha}]))'$ при

$(s_*)' = (S_{*T})'$,

где дефекты левой

$(s_*)' = [\rho a_* Ga_*](V_T)' - [\overline{f}_*][\overline{\rho a_*}\,\overline{Ga_*}](\overline{V}_T)' = [\Phi_{*\alpha}](\rho a_* V_T)'$

и правой части

$(S_{*T})' = (Sp[b_{*T\alpha} Gb_{*T\alpha}] - [\overline{f}_*]Sp[\overline{b}_{*T\alpha}\overline{Gb}_{*T\alpha}])'$

следуют из уравнений (10) - (12), которые связывают s_* и $S_{*T} = -Sp\{[b_{*T\alpha} Gb_{*T\alpha}][C_{*T\alpha}]'\} =$

$= -\overline{f}_* Sp\{[\overline{b}_{*T\alpha}\overline{Gb}_{*T\alpha}][\overline{C}_{*T\alpha}]'\}$ соответственно с искомыми основными и дополнительными функциями преобразования.

На первом этапе упомянутая локальная линейная замена переменных дает линейные преобразования в исходном (старом) базисе для векторов и производных в виде [11]:

$(\vec{\overline{e}}_t, \vec{\overline{e}}_x, \vec{\overline{e}}_y, \vec{\overline{e}}_z) = (\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)[C]$ и $\vec{\overline{r}}_T = A_r \vec{r}_T$,

$\vec{\overline{V}}_T = A_V \vec{V}_T$, $\vec{\overline{b}}_{*\alpha T} = A_{b_{\alpha*}} \vec{b}_{*\alpha T}$ с матрицами

$[A_r] = [C]^{-1}$, $[A_V] = [C]^{-1} / f_T$, $[A_{b_{\alpha*}}] = [f_{b_{*T\alpha}}]^{-1}$ и

$[Ga_*] = [\overline{G}a_*][C]^{-1}$, $[Gb_{*T\alpha}] = [\overline{G}b_{*T\alpha}][C]^{-1}$,

а нелинейность преобразования функционалов проявляется в последних равенствах (9) в виде дополнительных членов, где $[f_V] \equiv [1, f_u, f_v, f_w]$ и $[f_V] = [C]^{-1} = f_T[E]$ – равенства, следующие из определения скоростей (8); а f_T – функция, которая с учетом дефектов и

законов переноса связывает параметры времени в решениях транспортных уравнений.

На втором этапе вводится положительно определенная матрица $[f_\tau]$. Дефекты функционалов и основные уравнения-условия, обеспечивая диагональные определители Грама, сохраняют общие ортонормированные базисы, форму скалярного произведения левого функционала образа (прообраза) и дивергенции правого, где согласно (10)

$$\{[Ga_*] - [\Phi_{*\alpha}]\}(V_T)' = [\overline{Ga_*}][\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial\alpha}](V_T)' =$$

$$= f_\tau[\overline{Ga_*}][\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial\alpha}][\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial}]^{-1}[f_V]^{-1}[f_V](\overline{V}_T)' = f_\tau[\overline{Ga_*}](\overline{V}_T)',$$

а равенство дефектов и их исключение сохраняет форму транспортных уравнений [9].

На третьем этапе устанавливается локальная связь сходственных точек в фотонных континуумах, что возможно всегда, ввиду изоморфизма линейных пространств [11].

Циклические преобразования (8) и (9) скоростей на линиях переноса, включая точки пересечения, прообраза V к прообразу C с матрицами $[f_{VC}]$ и $f^{-1}_{TCV}[C_{CV}]^{-1}$ (образ $[f_{\overline{V}\overline{C}}]$ и $f^{-1}_{T\overline{C}\overline{V}}[C_{\overline{C}\overline{V}}]^{-1}$) всегда допускают: $[C]^{-1}_{CV}=[H]_{CV}[U]_{CV}$ и совмещение направления скоростей группой вращения $[U]_{CV}$ и модулей $[H]_{CV}$; участки для спектрального прообраза с обратной матрицей полного континуума и наоборот; общие и специальные циклы вида

$$(f^{-1}_{TCV}[C]^{-1}_{CV})^{-1}[f_{C\overline{C}}](f^{-1}_{T\overline{C}\overline{V}}[C]^{-1}_{\overline{C}\overline{V}})[f_{V\overline{V}}]^{-1}=[E] \text{ и}$$

$$(f^{-1}_{TV\overline{C}}[C]^{-1}_{V\overline{C}})[f_{V\overline{V}}](f^{-1}_{TC\overline{V}}[C]^{-1}_{C\overline{V}})[f_{C\overline{C}}]=[E], \qquad (16)$$

где $(f^{-1}_{TCV}[C]^{-1}_{CV})^{-1}[f_{C\overline{C}}]=f^{-1}_{TV\overline{C}}[C]^{-1}_{V\overline{C}}$,
$(f^{-1}_{TCV}[C]^{-1}_{CV})[f_{V\overline{V}}]=f^{-1}_{TC\overline{V}}[C]^{-1}_{C\overline{V}}$ и
$[f_{V\overline{V}}]f^{-1}_{T\overline{V}V}[C]^{-1}_{\overline{V}V}=[E]$.

Ортогональное преобразование всегда обеспечивает: единый ортонормированный базис с $f_{TCV}f^{-1}_{T\overline{C}\overline{V}}=f_{TV\overline{C}}f^{-1}_{TC\overline{V}}=1$; комплексную матрицу $[C]^{-1}_k=[C]^{-1}_{CV}+i[C]^{-1}_{\overline{C}\overline{V}}$; $[U]$ из диагональных клеток простого отражения в подпространстве расстояний и вращения

$$[U]_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \text{ и } [U]_2=\begin{bmatrix}\cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi\\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\end{bmatrix},$$

а также $$[U]_{2k}=\begin{bmatrix}\cos\Delta\varphi & -i\sin\Delta\varphi\\ i\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\end{bmatrix} \qquad (17)$$

и $[H]^2_k=[|f_V|]^{-1}[|f_C|]^{-1}=[E]$ самосопряженных комплексных специальных преобразований (16), которые определяют $[f_V]\equiv[f_{V\overline{V}}]=[f_{C\overline{C}}]^{-1}\equiv[f_C]^{-1}$, $[f_{VC}]=[f_{\overline{V}\overline{C}}]^{-1}$ и задают скорости, совмещают с треугольником на двух скоростях прообраза лежащий в его плоскости треугольник образов при вершине в сходственной точке, равных углах $\Delta\varphi=\varphi_+-\varphi_-$ и высотах $c_+\cos\varphi_+ = c_-\cos\varphi_-$ ($c_+ = c_v \geq c_n = c_-$), зеркальных скоростях

$$c_n/c_\nu=\overline{c}_\nu/\overline{c}_n,\ \frac{c_-}{c_+}=\frac{\cos\varphi_+}{\cos(\varphi_+-\Delta\varphi)}, \text{ или}$$

$$\mathrm{tg}\Delta\varphi=\left(\frac{c_-}{c_+}\sin\Delta\varphi\right)/\left[1-\left(\frac{c_-}{c_+}\sin\Delta\varphi\right)\mathrm{tg}\varphi_+\right],$$ где сохраняются обобщенные элементарные геометрические инварианты [1], а $\varphi_- = 0$ при $\Delta\varphi = \pi/2$, связях $\mathrm{tg}\theta = -ic_n/c_v$ и $\cos^{-2}\theta = 1 - c_n^2/c_v^2$ преобразование Лоренца [2].

В общем случае три условия ортогонального преобразования зеркально совмещают плоскости треугольников и три, включая первое (16), соответствующие скорости [9].

В каждой точке одной линии переноса векторы спектральной яркости $I_{v\tau}$ и скорости $c_{v\tau}$ зависят от двух параметров и совпадают по направлению, а при едином вакууме с однородным полем яркости I_{v0} представляются равенствами аналогичными (2).

В результате задание относительного закона яркости (тензора) на линии с максимальным вектором яркости требует текущую относительную максимальную яркость $f^0_{I_\nu}$, и яркости на границе трехмерного объема, представляемые далее как условная индикатриса яркости $f^0_{p\nu}$, причем объем может стягиваться до малой окрестности точки.

Эквивалентная спектральная система уравнений-условий

Эквивалентные фотонные систем замыкаются другими дополнительными уравнениями-условиями со следствиями для коэффициентов дефектов; а в соответствующих точках континуумов в системы входят общие отношения величин температуры среды ($\overline{T}_\nu/T_\nu=\overline{T}_n/T_n$), темпа времени ($f_{Tv} = f_{Tn}$), аддитивности энергии ($I_{vn} = \sum_v I_n$) и другие.

В эквивалентной системе спектрального континуума для величин (13) содержится тридцать пять уравнений-условий, из которых девятнадцать новых дополнительных.

В частности, девятнадцать дополнительных уравнений-условий могут содержать десять отношений в сходственных точках одного и девять связей двух континуумов [9]:

1) восемь отношений – элементов матриц $[n_{\nu ii}/\overline{n}_{\nu ii}]$, свойств континуума ($f_{kv}$, $f_{\sigma v}$, f_{pv}), вакуума $f_{c0} = 1$ и когерентность $f_v = 1$ или $f_v = \mathrm{const}$ (* = n – замена на полные элементы, вакуум и аддитивность);

2) два отношения – закон яркости $f^0_{p\nu}$, в вакуу-

ме Планка $\Psi^0_{I_{bv}} \equiv I_{bv0} / \overline{I}_{bv0} = \Psi(v, \overline{v}, T_v, \overline{T}_v)$ (* = n – замена, в частности, на закон Стефана-Больцмана $\Psi^0_{u_{bn}} \equiv u_{bn0} / \overline{u}_{bn0} = T_n^4 / \overline{T}_n^4$);

3) шесть связей – проекций скоростей в сходственных точках характерных лучей спектрального и полного (16), а также направлений лучей образов и заданного направления (* = n – замена индексов);

4) две связи – температур сходственных точек $\overline{T}_\nu / T_\nu = \overline{T}_n / T_n$ и темпа времени $f_{T\nu} = f_{Tm}$ (* = n – замена индексов);

5) одна связь фотонных континуумов – условие аддитивности энергии $f_{u_n} = f_{I_{\nu n}} / f_{c_n}$ (* = n – замена на условия $f_{u_n} = p_n / \overline{p}_n$ и $k_n = k_{np} + k_{nq}$, ввиду равенства полного давления излучения $p_n = \frac{1}{c_n} \iint\limits_{\nu;\Omega'} I_{\nu\tau'} \cos^2\theta d\Omega' \cong \frac{u_n}{3} = \frac{\Sigma_n}{3c_n}$ и его коэффициента $k_{np} \cong \frac{V_m}{3c_n}$) [1, 2].

В квазистационарном радиационном теплопереносе исключается величина $f_{T\nu}$ [1, 9].

Связи на луче дополнительных функций, дефектов $S_{a_{\nu\tau}T}$ и $\mathrm{div}_T \vec{b}_{a_{\nu\tau}T}$ очевидны, не усложняется вычисление дефектов и анализ преобразования [3]. Так, дефект $S_{I_{\nu\tau}T}$ равен

$$\frac{S_{I_{\nu\tau}T} / \overline{f}_{I_{\nu\tau}}}{\overline{k}_\nu \overline{c}_{\nu\tau} \overline{I}_{\nu\tau}} = (\mathrm{mod}\, \overline{\vec{N}}_\nu \overline{\tau}_\nu)^2 \frac{\overline{I}^0_{b\nu}}{\overline{I}_{\nu\tau}} [\frac{(\mathrm{mod}\, \vec{N}_\nu \tau_\nu)^2}{(\mathrm{mod}\, \overline{\vec{N}}_\nu \overline{\tau}_\nu)^2} \frac{\Psi^0_{b\nu}}{f_{I_{\nu\tau}}} f_{k_\nu} \frac{f_{I_{\nu\tau}} f_{c_{\nu\tau}}}{\overline{f}_{I_{\nu\tau}}} - 1] +$$
$$+ \frac{\overline{k}_{0\nu}}{\overline{k}_\nu} (\frac{k_{0\nu}}{\overline{k}_{0\nu}} \frac{f_{I_{\nu\tau}} f_{c_{\nu\tau}}}{\overline{f}_{I_{\nu\tau}}} - 1) - (f_{k_\nu} \frac{f_{I_{\nu\tau}} f_{c_{\nu\tau}}}{\overline{f}_{I_{\nu\tau}}} - 1) +$$
$$+ \frac{\overline{\sigma}_\nu}{\overline{k}_\nu} \{ (\frac{f_{H_\nu}}{f_{I_{\nu\tau}}} \frac{H_{\nu\tau}}{\overline{I}_{\nu\tau}} - 1) f_{\sigma_\nu} \frac{f_{I_{\nu\tau}} f_{c_{\nu\tau}}}{\overline{f}_{I_{\nu\tau}}} - (\frac{\overline{H}_{\nu\tau}}{\overline{I}_{\nu\tau}} - 1) \}. \qquad (18)$$

Выводы

1. Условия на границе формируют в ограниченном объеме поле вектора скорости, включая среднюю скорость, и вектора сферического излучения, где по аналогии с молекулярным полем можно выделить особенную спектральную линию переноса, определяемую максимальным локальным спектральным вектором яркости с индикатрисой яркости (закон яркости) и наоборот.

2. Существует каноническая запись системы линий переноса и транспортных уравнений для любого вида и формы движения с точностью до векторов переноса.

3. Канонические системы сохраняют вид в вещественном евклидовом пространстве четырех измерений при квазилинейном преобразовании с дефектом (группа самосопряженных матриц) над множеством основных и дополнительных функций, которое использует основные уравнения-условия, относительные законы переноса транспортируемой величины и состояния среды континуума, обеспечивающие граничные условия образа.

4. Основная система уравнений-условий преобразования позволяет расширить решения простейших уравнений переноса и состоит: из подсистемы, определяющей основные функции преобразования по дефекту; уравнений-условий дефектов и дополнительных для коэффициентов дефектов, определяемых посредством относительных законов.

5. Для уравнений-условий используется вторая форма правого функционала и относительный закон яркости, связанный с коэффициентами дефектов и условиями на границе.

6. Полнота непротиворечивость и замкнутость системы уравнений-условий обеспечивается использованием всех величин, входящих в транспортные уравнения, методов линейной алгебры и однозначности задачи Коши при представлении производных проекций векторов переноса коэффициентами дефектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат. 1979. – 416 с.

2. *Бай-Ши-И*. Динамика излучающего газа. – М.: Мир, 1968. – 350 с.

3. *Репухов В.М.* Расширение решения транспортных уравнений конвективного тепломассопереноса методом преобразования и относительных законов переноса // Пром. теплотехника. – 2008. – Т. 30, № 1. – С. 26–38.

4. *Репухов В.М*. Влияние законов переноса на преобразование транспортных уравнений конвективного тепломассопереноса // Пром. теплотехника. – 2006. – Т. 28, № 5. – С. 26–30.

5. *Репухов В.М*. Аналитическое расширение решения транспортных уравнений кон-

вективного тепломассопереноса методом преобразования и относительных законов // Труды VI Минского международного форума по тепломассообмену – VI Minsk International Heat & Mass Transfer Forum Proceedings. – Секция 1. – Конвективный тепломассообмен. – Section 1. – Convective Heat and Mass Transfer. – 1–53. – Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова НАНБ. 2008.

6. *Репухов В.М., Сигорских С.В.* Радиационный перенос энергии в неоднородной среде // Пром. теплотехника. – 2009. Т. 31, № 5. – С. 88–96.

7. *Репухов В.М., Сигорских С.В*. Радиационный перенос энергии на границе неоднородных (анизотропных) сред // Пром. теплотехника. – 2010. Т. 32, № 5. – С. 79–87.

8. *Репухов В.М., Сигорских С.В.* Уравнения радиационного переноса энергии и граничные условия в неоднородной (анизотропной) среде // Радиационный и сложный теплообмен: Тр. пятой рос. нац. конф. по теплообмену. – М.: МЭИ. 2010. – Т. 6. – С. 252–256.

9. *Репухов В.М.* Метод и система уравнений-условий преобразования общих транспортных уравнений сложного (радиационного и конвективного) тепломассопереноса к простейшему виду // Радиационный и сложный теплообмен: Тр. пятой рос. нац. конф. по теплообмену. М.: МЭИ. 2010. – Т. 6. – С. 248–251.

10. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. девятое. – М.: Наука. 1965. – 247 с.

11. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука. 1971. – 280 с.

Получено 15.04.2011 г.