

УДК 536.244

Бурка А.Л., Емельянов А.А.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН

## ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МИКРОСФЕР НА ФОРМИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В КОМПОЗИТНОМ ПОЛУПРОЗРАЧНОМ МАТЕРИАЛЕ

Пропонується математична модель розрахунку температурного поля в напівпрозорому матеріалі. Для розв'язання рівняння переносу враховуються коефіцієнти поглинання, розсіяння та ослаблення упакованих часточок, отриманих по теорії Мі на основі комплексного показника заломлення композита. Врахування взаємодії між елементами композита знаходиться за наближенням Максвелл-Гарнетта.

Предложена математическая модель расчета температурного поля в полупрозрачном композитном материале. Для решения уравнения переноса используются коэффициенты поглощения, рассеяния и ослабления упакованных частиц, полученные по теории Ми на основе комплексного показателя преломления композита. Учет взаимодействия между составляющими композита осуществляется с помощью приближения Максвелл-Гарнетта.

The mathematical model for calculation of the temperature field in a semitransparent composite material is suggested. Data on the complex refractive index of the composite are used for calculation of absorption, scattering and attenuation coefficients for the close-packed particles by the Mie theory aimed at determination of radiation intensities. Interaction between the composite components is considered by Maxwell-Garnett approximation.

$c_1$  – теплоемкость кварца;  
 $c_2$  – теплоемкость полиметилметакрилата;  
 $c$  – эффективная теплоемкость композита;  
 $E$  – плотность потока излучения;  
 $I_b$  – функция Планка;  
 $I^{\pm}$  – прямая и обратная интенсивности излучения;  
 $L$  – толщина слоя;  
 $T_*$  – характерная температура;  
 $R$  – радиус сферической частицы;  
 $qR$  – радиус ядра сферической частицы;  
 $T_1^*, T_2^*$  – температуры внешних источников излучения;  
 $N$  – число частиц в единице объема;  
 $t$  – время;  
 $p$  – индикатриса рассеяния;  
 $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи на границах слоя;  
 $\nu$  – объемная концентрация частиц (фактор заполнения);  
 $\chi$  – объемный коэффициент поглощения композита;  
 $\sigma$  – объемный коэффициент рассеяния композита;  
 $\varepsilon$  – степень черноты слоя композита;  
 $\varepsilon_{1,2}^*$  – степени черноты внешних источников

излучения;  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – приведенные степени черноты границ слоя композита;  
 $\lambda_1$  – коэффициент теплопроводности кварца;  
 $\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности полиметилметакрилата;  
 $\lambda$  – коэффициент эффективной теплопроводности композита;  
 $\rho_1$  – плотность кварца;  
 $\rho_2$  – плотность полиметилметакрилата;  
 $\rho$  – эффективная плотность композита;  
 $\sigma_s$  – постоянная Стефана – Больцмана;  
 $\zeta$  – комплексная диэлектрическая проницаемость композита;  
 $\gamma$  – поляризуемость вещества;  
 $\eta_1, \eta_2, \eta_m$  – диэлектрические проницаемости частицы, ядра и матрицы.

### Индексы верхние:

$\pm$  – положительное и отрицательное направления;  
 $*$  – символ внешних излучателей.

### Индексы нижние:

$b$  – черное тело;  
 $*$  – характерный символ;  
 $s$  – Стефан-Больцман.

**Ключевые слова:**

композит, фактор заполнения, коэффициент

В статье предложена математическая модель расчета температурного поля в полупрозрачном композитном материале, который включает в себя матрицу из полиметилметакрилата и кварцевые микросферы. Расчет оптических свойств композитного материала получен с использованием оптических свойств матрицы и микросфер при различных факторах заполнения, которые характеризуют объемную концентрацию частиц в матрице. Учет взаимодействия между составляющими композита осуществляется по приближению Максвелл-Гарнетта. Данные по комплексному показателю преломления композита используются для расчета по теории Ми коэффициентов поглощения, рассеяния и ослабления упакованных частиц. Исследовано влияние взаимодействия между микросферами в композите на формирование температурных полей в слое материала, которые получаются из решения краевой задачи для уравнения энергии и системы уравнений переноса излучения с использованием этих коэффициентов.

Полупрозрачные композиты относятся к числу перспективных современных материалов. Особую значимость такие материалы приобретают в изделиях, где важную роль играет перенос энергии за счет теплопроводности и излучения. Поэтому исследования влияния параметров составляющих композита на тепловые процессы является актуальным. Одним из способов повышения эффективности теплозащитных свойств является использование материалов, содержащих малые частицы, рассеивающие тепловое излучение. Композитный материал, состоящий из полых или сплошных кварцевых микросфер с характерным размером 10...50 мкм, введенных в полупрозрачную связующую матрицу, является эффективным средством теплозащиты в условиях радиационно-кондуктивного переноса тепловой энергии. Тепловые потери с поверхности композитного материала включают в себя кондуктивную, конвективную и радиационную составляющие.

поглощения и рассеяния, диэлектрическая проницаемость, микросфера.

Учет указанных потерь возможен при известном температурном распределении в слое этого материала. Решение задачи проводится в приближении сплошной среды с эффективными теплофизическими и оптическими свойствами. Температурные поля в слое материала находятся из решения краевой задачи для уравнения энергии и системы уравнений переноса излучения. Для решения системы уравнений переноса необходимо иметь данные о коэффициентах поглощения и рассеяния. В зависимости от концентрации частиц в композите возникает взаимодействие между ними при прохождении радиационного потока энергии. Известно, что когда расстояние между частицами гораздо больше, чем их размер и длина волны, тогда между ними отсутствует взаимодействие и коэффициенты поглощения и рассеяния могут быть рассчитаны по классической теории Ми с использованием комплексных показателей преломления частиц и матрицы [1]. Для большинства оптических задач такой подход оказывается справедливым. Рассматриваемый в этой работе композитный материал является эффективной теплозащитой только при высокой объемной концентрации микросфер, вследствие чего не выполняется условие независимости рассеивающих и поглощающих излучение частиц. Поэтому использование классической теории Ми в этом случае может привести к значительным ошибкам при расчете радиационных характеристик композитного материала, а следовательно и расчетных температурных полей в нем. Для определения ослабляющих и рассеивающих характеристик композитного материала при наличии взаимодействий между частицами могут быть использованы приближенные решения. В работе [2] решена задача рассеяния излучения двумя сферическими частицами, расположенными близко друг к другу. В этом случае расчет коэффициентов эффективного ослабления и рассеяния отличается от классического решения Ми множителями, учи-

тывающими сферичность рассеянных волн, т.е. фактически влияние плотной упаковки частиц на процесс рассеяния. В данной работе для расчета коэффициентов ослабления и рассеяния в композитном материале применяется классическая теория Ми с использованием эффективного комплексного показателя преломления частиц в матрице, полученного на основании приближения Максвелл-Гарнетта [3]. Такое приближение позволяет рассчитать коэффициенты поглощения и рассеяния в композитных материалах, когда расстояние между частицами много больше или соизмеримо с размером частиц и длиной волны излучения. Формула для расчета диэлектрической проницаемости  $\zeta$  композита содержащего матрицу с диэлектрической проницаемостью  $\eta_m$ , частицы с диэлектрической проницаемостью  $\eta_1$  и объемной концентрацией  $\nu$  записывается в виде [3]:

$$(\zeta - \eta_m)/(\zeta + 2\eta_m) = \vartheta\gamma/R, \text{ где}$$

$$\vartheta = 4\pi R^3 N/3, \quad \gamma = R^3 Z_1 / Z_2;$$

$$Z_1 = [(\eta_2 - \eta_m)(\eta_1 + 2\eta_2) + q^3(2\eta_2 + \eta_m)(\eta_1 - \eta_2)];$$

$$Z_2 = [(\eta_2 + 2\eta_m)(\eta_1 + 2\eta_2) + q^3(2\eta_2 - 2)(\eta_1 - \eta_2)].$$

Здесь рассматриваются сферические частицы с наружным радиусом  $R$  и ядром из другого вещества радиуса  $qR$  с диэлектрической проницаемостью  $\eta_2$ . Комплексный показатель преломления и комплексная диэлектрическая проницаемость композита связаны между собой на основании существующих фундаментальных закономерностей [4]. Полученные данные по комплексному показателю преломления компо-

зита используются для расчета коэффициентов поглощения и рассеяния ансамбля частиц, находящихся в матрице по классической теории Ми. Рассмотрим плоский слой композитного теплозащитного полупрозрачного материала из связующего полиметилметакрилата, содержащего кварцевые микросферы. При моделировании радиационного переноса в материале учитываются процессы поглощения, испускания и рассеяния теплового излучения.

Уравнение энергии с граничными условиями записывается в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - \frac{L}{\lambda_g T_*} \frac{\partial E}{\partial \xi}, \quad 0 < \xi < 1, \tau > 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - N_1(\theta - \theta_1) = \varepsilon_1 S_t(\theta^4 - \theta_1^{*4}), \quad \xi = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + N_2(\theta - \theta_2) = \varepsilon_2 S_t(\theta_2^{*4} - \theta^4), \quad \xi = 1; \quad (3)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi); \quad (4)$$

$$S_t = \frac{\sigma T_*^3 L}{\lambda}; \quad \theta = \frac{T}{T_*}; \quad \xi = \frac{x}{L}; \quad \tau = \frac{t\lambda}{\rho c L^2};$$

$$N_1 = \frac{\alpha_1 L}{\lambda}; \quad N_2 = \frac{\alpha_2 L}{\lambda}.$$

Дивергенция плотности радиационного потока  $dE/d\xi$ , которая находится в уравнении (1), определяется из решения системы интегродифференциальных уравнений переноса энергии излучения [5] относительно интенсивностей  $I^+(\xi, \mu)$ ,  $I^-(\xi, \mu)$  имеет вид

$$\frac{dE}{d\xi} = \chi \left[ 4\pi I_{\rho\nu} - 2\pi \int_0^1 (I^+(\xi, \mu) + I^-(\xi, \mu)) d\mu \right]$$

Здесь

$$I^+(\xi, \mu) = \left[ I^+(0, \mu) + \frac{\chi L}{\mu} \int_0^\xi e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} I_b(T) dy + \frac{\sigma L}{2\mu} \int_{y=0}^\xi e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} \int_0^1 F_1(y, \mu') d\mu' dy \right] e^{-\frac{\beta L}{\mu} \xi};$$

$$I^-(\xi, -\mu) = \left[ I^-(1, \mu) + \frac{\chi L}{\mu} \int_\xi^1 e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} I_b(T) dy + \frac{\sigma L}{2\mu} \int_{y=\xi}^1 e^{-\frac{\beta L}{\mu} y} \int_0^1 F_2(y, \mu') d\mu' dy \right] e^{-\frac{\beta L}{\mu} \xi},$$

где

$$F_1 = p(\mu, \mu') I^+(y, \mu') + p(\mu, -\mu') I^-(y, \mu');$$

$$F_2 = p(-\mu, \mu') I^+(y, \mu') + p(-\mu, -\mu') I^-(y, \mu').$$

С помощью функции Грина

$$G(\xi, z) = -\frac{e^{F(\xi)}}{\Delta} \begin{cases} (1 + N_1 \int_0^z e^{-F(z)} dz)(e^{-F(1)} + N_2 \int_{\xi}^1 e^{-F(z)} dz), & z \leq \xi, \\ (1 + N_1 \int_0^{\xi} e^{-F(z)} dz)(e^{-F(1)} + N_2 \int_z^1 e^{-F(z)} dz), & z \geq \xi, \end{cases}$$

где

$$\Delta = N_2 + N_1(e^{-F(1)} + N_2 \int_0^1 e^{-F(z)} dz),$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} + N_2 G = 0, \quad \xi = 1;$$

являющейся решением однородной краевой задачи

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \lambda}{\lambda \partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial \xi} - N_1 G = 0, \quad \xi = 0;$$

начально-краевая задача (1) – (4) о совместном переносе тепла теплопроводностью и радиацией в полупрозрачной среде свелась к нелинейному интегральному уравнению относительно безразмерной температуры  $\theta(\xi, \tau)$ , которое имеет вид

$$\theta(\xi, \tau) = G(\xi, 0)W_1(\tau) - G(\xi, 1)W_2(\tau) + \int_0^1 W(z, \tau)G(\xi, z)dz. \quad (5)$$

Здесь

$$W(z, \tau) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{L}{\lambda T_*} \frac{\partial E}{\partial z}; \quad F(z) = \int_0^z \frac{d\lambda}{\lambda dz} dz;$$

$$W_1(\tau) = \varepsilon_1 S_t (\theta^4 - \theta_1^{*4}) - N_1 \theta_1;$$

$$W_2(\tau) = \varepsilon_2 S_t (\theta_2^{*4} - \theta^4) + N_2 \theta_2;$$

$$1/\varepsilon_{1,2} = (1/\varepsilon + 1/\varepsilon_{1,2}^* - 1).$$

Степень черноты слоя композита  $\varepsilon$  с учетом фактора заполнения  $\nu$  определялась [5]

$$\varepsilon = 1 - [1 + Q \exp(-2q_r q_t)] / [Q + \exp(-2q_r q_t)], \quad (6)$$

где

$$q_t = \beta L; \quad q_r = \sqrt{1 - \chi/\beta}; \quad Q = (1 + q_r)/(1 - q_r).$$

При решении уравнения переноса использовалась направленная вперед индикатриса рассеяния [7]

$$p(\mu, \mu') = (1 - b^2) / \{1 + b^2 - 2b[\mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)}]\}^{3/2}, \quad b = 0, 5.$$

Эффективные значения коэффициента теплопроводности, плотности и теплоемкости композита определялись по формулам [8]:

$$\lambda = (1 - \vartheta)\lambda_1 + \vartheta\lambda_2; \quad \rho = \rho_1(1 - \vartheta) + \rho_2\vartheta;$$

$$c = c_1(1 - \vartheta) + c_2\vartheta.$$

Интегральное уравнение (5) на каждом временном шаге решается итерационным методом Ньютона-Канторовича [9]. Расчеты проведены для композита, содержащего матрицу из полиметилметакрилата и кварцевые микро-

сферы с наружным диаметром  $d = 35$  мкм и  $d = 3,5$  мкм и внутренними полостями диаметром  $qd$  мкм, где  $q$  принимает значения 0; 0,5; 0,9. Спектральные данные по комплексному показателю преломления кварца и полиметилметакрилата взяты из [10,11]. Коэффициенты поглощения  $\chi$  и рассеяния  $\sigma$  композита рассчитаны по Ми с использованием комплексного показателя преломления, полученного из приближения Максвелл-Гарнетта, усреднялись по длинам волн и использова-

лись для расчета интенсивностей. Расчеты нестационарных температурных полей в слое композита проводились при следующих значениях параметров:  $\varepsilon_{1,2}^* = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}$ ,  $T_* = 1000 \text{ К}$ ,  $L = 0,1 \text{ м}$ ,  $\chi$ ,  $\sigma$  получены с учетом фактора заполнения,  $\beta = \chi + \sigma$ ,  $\lambda_1 = 0,343 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ,  $\lambda_2 = 0,196 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ,  $\theta_0(\xi) = 0,333$ ,  $c_1 = 783 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ,  $c_2 = 1465 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ,  $\rho_1 = 118 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 2200 \text{ кг/м}^3$ , температуры источников внешнего излучения:  $T_1^* = 500 \text{ }^\circ\text{С}$ ,  $T_2^* = 300 \text{ }^\circ\text{С}$ .

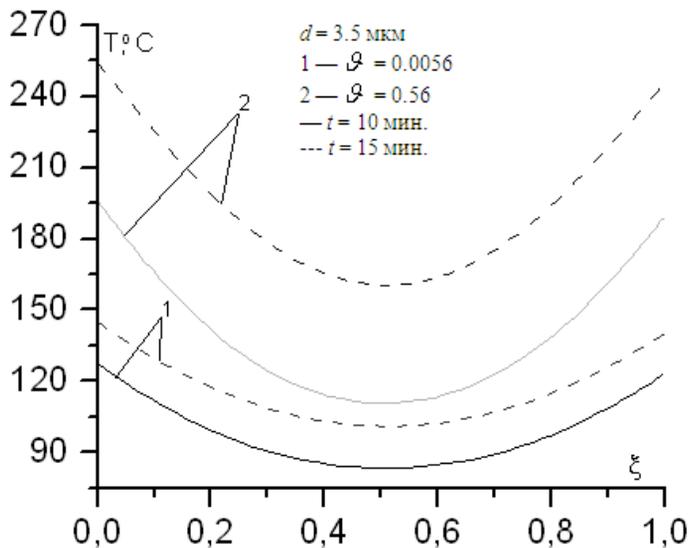
**Результаты расчетов**

На рис. 1 представлено влияние коэффициентов поглощения и рассеяния на динамику температурного распределения в композитах с полыми микросферами при температурах источников внешнего излучения:  $T_1^* = 500 \text{ }^\circ\text{С}$ ,  $T_2^* = 300 \text{ }^\circ\text{С}$ .

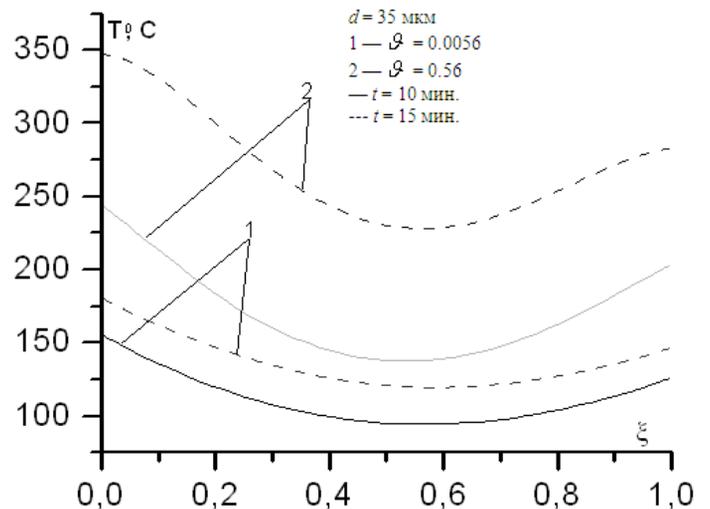
Исследовались композиты с факторами заполнения 0,0056 и 0,56 с диаметром микросфер 3,5 мкм, которые имеют коэффициенты поглощения и рассеяния  $\chi = 0,0086 \text{ м}^{-1}$ ,  $0,244 \text{ м}^{-1}$ ;  $\sigma = 0,27 \text{ м}^{-1}$ ,  $0,268 \text{ м}^{-1}$  и с диаметром микросфер 35 мкм:  $\chi = 0,238 \text{ м}^{-1}$ ,  $0,4 \text{ м}^{-1}$ ;  $\sigma = 0,279 \text{ м}^{-1}$ ,  $1,8 \text{ м}^{-1}$ . Из рисунка видно, что

скорость нагрева композита, содержащего малые микросферы (рис. 1, а), значительно ниже, чем для композита с большими микросферами (рис. 1, б), кроме того, у композита с микросферами малого диаметра перепад температур между горячей ( $\xi = 0$ ) и холодной ( $\xi = 1$ ) границами незначительный. Этого нельзя сказать о композите с микросферами большого диаметра. Это объясняется тем, что у композита с малыми микросферами для обоих факторов заполнения коэффициенты поглощения ( $\chi = 0,0086 \text{ м}^{-1}$ ,  $0,244 \text{ м}^{-1}$ ) значительно ниже, чем у композита с большими микросферами ( $\chi = 0,238 \text{ м}^{-1}$ ,  $0,4 \text{ м}^{-1}$ ), поэтому изменение температурного профиля в композитах происходит за счет изменения радиационной составляющей при переносе тепла. Коэффициенты ослабления, рассеяния и поглощения в композитном материале получены на основании теории Ми с использованием эффективного комплексного показателя преломления частиц в матрице с использованием приближения Максвелл-Гарнетта.

На рис. 2 представлены результаты расчетов нестационарных температурных полей в слое композита для температур источников внешнего излучения:  $T_1^* = T_2^* = 400 \text{ }^\circ\text{С}$ , размер



а)



б)

**Рис. 1. Влияние фактора заполнения на кинетику нагрева композита с микросферами ( $d = 3,5$  и  $35 \text{ мкм}$ ,  $q = 0,9$ ).**

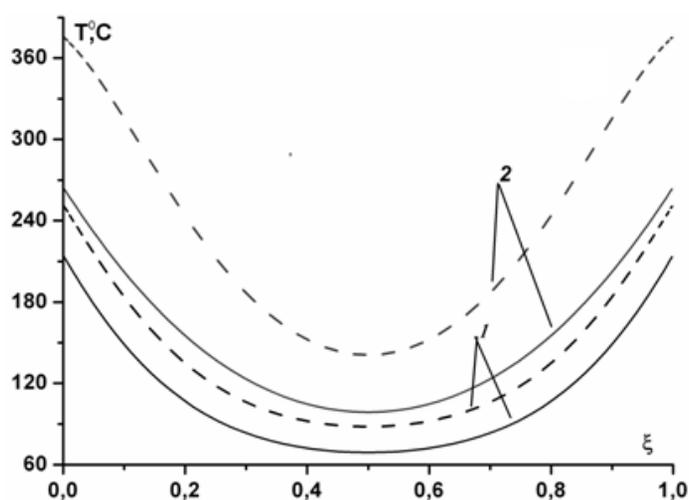
частиц в материале  $d = 3,5$  мкм ( $q = 0,9$ ). Расчеты проведены для двух значений дивергенции плотности радиационного потока в уравнении (1):  $dE/d\xi = 0$  (перенос тепла в композитном материале осуществляется только за счет теплопроводности),  $dE/d\xi \neq 0$  (перенос тепла в материале осуществляется за счет теплопроводности и излучения).

На рис. 2, а представлены расчеты, в которых коэффициенты ослабления и рассеяния получены по теории Ми с использованием комплексного показателя преломления частиц рассчитанного по приближению Максвелл-Гарнетта. Из рисунка видно, что излучение играет значительную роль в формировании температурных полей в полупрозрачных композитных материалах при больших факторах заполнения. При малых факторах заполнения ( $v = 0,0056$ ), (рис. 2, б) расчеты температурных полей по классической теории и с использованием приближения Максвелл-Гарнетта совпадают, перенос тепла в этом случае за счет излучения незначителен. С возрастанием фактора заполнения коэффициент поглоще-

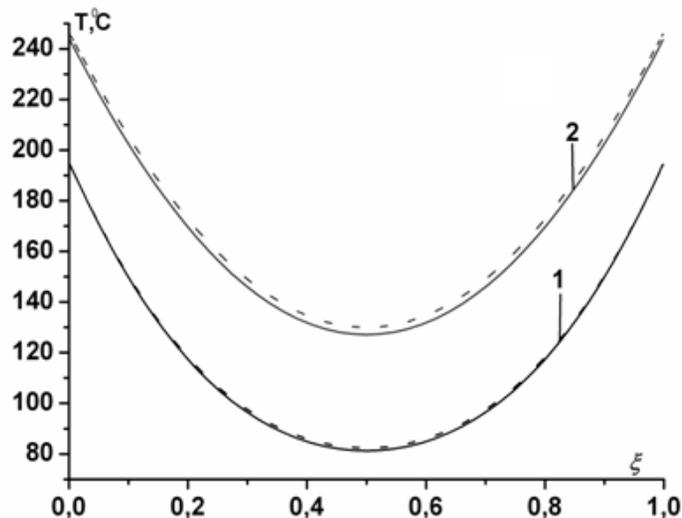
ния композита возрастает при одновременном заметном уменьшении коэффициента рассеяния. Это приводит к тому, что при малых концентрациях частиц композит прогревается медленнее и имеет уровень температур заметно ниже, чем при больших концентрациях.

### Выводы

С помощью предложенной математической модели расчета температурного поля в полупрозрачном композитном материале из полиметилметакрилата и кварцевых микросфер исследовано влияние факторов заполнения и параметров микросфер на тепловой процесс. Выяснено, что при уменьшении внешнего диаметра микросферы происходит снижение температурного перепада на холодной и горячей границах. При увеличении фактора заполнения в композите происходит усиление процесса нагрева, при этом его влияние в композитах, содержащих крупные микросферы, проявляется при меньших значениях величин. Показано, что излучение играет значительную роль в формировании температурных полей в полу-



а)



б)

**Рис. 2. Влияние излучения на температурное распределение в композите с микросферами ( $d = 3,5$  мкм,  $q = 0,9$ ): 1 –  $t = 5$  мин.; 2 –  $t = 10$  мин.; --- – теплопроводность+излучение; – – теплопроводность; а)  $v = 0,56$ ,  $\chi = 0,466$ ;  $\sigma = 1,445$ ;  $\beta = 1,911$ ; б) расчет по теории Ми;  $v = 0,0056$ ;  $\chi = 0,01$ ;  $\sigma = 2,314$ ;  $\beta = 2,324$ , расчет по теории Максвелл-Гарнетта;  $v = 0,0056$ ;  $\chi = 0,049$ ;  $\sigma = 2,244$ ;  $\beta = 2,293$ .**

прозрачных композитных материалах. При росте фактора заполнения взаимодействие между частицами в композите усиливается, что приводит к увеличению коэффициента поглощения, снижению коэффициента рассеяния и заметно-му росту температурного уровня в композитном материале. В связи с этим композитный материал при увеличении концентрации частиц улучшает свои теплозащитные свойства.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дейерменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. – М.: Мир, 1971. – 165 с.
2. Рыжкова Т.П., Рыжков Л.Н. Приложение теории дифракции к переносу теплового излучения // Промышленная теплотехника. – 1983. – Т.5, №4. – С. 26-34.
3. Петров Ю.И. Физика малых чтиц. – М.: Наука, 1982. – 359 с.
4. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
5. Блох А.Г. Тепловое излучение в котельных установках. – Л.: Энергия Лен.Отд., 1967. – 327 с.
6. Бурка А.Л., Великанов Е.В. Нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с учетом рассеяния // Ползуновский вестник. – 2004. – №1. – С. 46-48.
7. Герман М.Л., Гринчук П.С. Математическая модель для расчета теплозащитных свойств композиционного покрытия "керамические микросферы – связующее" // Инж.-физ. журнал. – 2002. – Т.75, №6. – С. 43-53.
8. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. – М.: Энергия, 1976. – 390 с.
9. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Труды Математического института АН СССР. – 1949. – Т. 28. – С. 135-139.
10. Золотарев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В. Оптические постоянные природных и технических сред. – Л.: Химия, 1984. – 375 с.
11. Гуревич М.М., Ицко Э.Ф., Середенко М.М. Оптические свойства лакокрасочных покрытий. – Л.: Химия, 1984. – 120 с.

Получено 10.08.2010 г.