

УДК 536.25

Фиалко Н.М., Блинов Д.Г., Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Юрчук В.Л., Саригло А.Г.
Институт технической теплофизики НАН Украины

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА POD

Розглянуто питання побудови маломодових моделей процесів теплопереносу. Проаналізовано різні аспекти застосування методу декомпозиції по ортогональним власним функціям. Показано ефективність та перспективність застосування цього методу для аналізу процесів теплопереносу в тілах складної форми.

Рассмотрены вопросы построения маломодовых моделей процессов теплопереноса. Проанализированы различные аспекты применения метода декомпозиции по ортогональным собственным функциям. Показана эффективность и перспективность применения этого метода для анализа процессов теплопереноса в телах сложной формы.

The issues of construction of low-dimensional models for heat transfer problems are discussed. The various aspects of applying method of proper orthogonal decomposition are analysed. It is shown effectiveness and perspective of this method for analyzing problems in the irregular domain.

q – тепловая нагрузка;
 t – температура пластины;
 x, y – координаты;
 τ – текущее время;

POD – метод ортогональной декомпозиции (proper orthogonal decomposition);
 MM – маломодовая модель.

Введение

Несмотря на впечатляющий прогресс вычислительной техники, сделавший моделирование многих классических задач теплообмена простой операцией в рамках пакетов компьютерного моделирования, по-прежнему определение решения в физически осмысленной форме представляется актуальной задачей. Этой цели может служить получение решения в компактной, маломодовой форме (малой размерности).

Актуальность маломодовых моделей связана и с прикладной стороной физического моделирования. Решение таких задач, как задачи оптимизации, управления и идентификации, основанное на полных моделях (уравнение Навье-Стокса и т.д.), являющихся сильно нелинейными, невозможно даже при современном уровне вычислительной техники и, что еще более важно, нецелесообразно в рамках современных идей проектирования технических устройств, опирающихся на системный анализ и требующих соответствия точности и детализации описания уровню сложности применяемых алгоритмов моделирования.

При системном рассмотрении устройства (например, радиатора охлаждения радиоэлектронного устройства, рассмотренного далее) кроме собственно физического уровня описания, требуются модели системного уровня, т.е. модели, включенные в общее рассмотрение этого устройства как компонента системы, состоящей из многих элементов, описываемых уравнениями различной природы. Например, современные микроэлектронное устройство в общем случае – это неразрывно связанная система, состоящая из электронных, микромеханических, жидкостных, оптических, химических, биологических и других компонентов. Совместное рассмотрение таких различных компонентов требует сопряжения уравнений различной природы. Поэтому целесообразным является рассмотрение каждого элемента на основе легко сопрягающихся моделей малой размерности. При этом снимается и проблема согласования кардинально различных пространственно-временных масштабов, характеризующих протекающие процессы.

В данной работе в качестве объекта исследования выбран трехмерный радиатор охлаж-

дения. Для описания функционирования, оптимизации и управления режимами работы такого рода устройства необходимо составление эффективной модели, описывающей пространственно-временное поведение устройства. Стандартный подход, используемый в теории управления, заключается в дискретизации области задачи с помощью метода конечных элементов или конечных разностей. Однако число временных уравнений, возникающих при дискретизации огромно, что затрудняет практическое использование таких моделей. Можно столкнуться с парадоксальной ситуацией – время численных расчетов значительно превышает время протекания физического процесса. Это делает принципиально невозможным использование этих моделей в контролерах, управляющих режимами работы устройства.

Метод POD [1] является эффективным способом разрешить эту проблему. Как известно, принципиальным моментом, определяющим эффективность проекционных методов (к которым можно отнести и метод конечных элементов) является выбор пространственного базиса для представления решения. Локального – в методе конечных элементов или глобального – в методе Фурье и в методе разложения по собственным функциям. Локальный базис метода конечных элементов, обладая рядом вычислительных и интерпретационных достоинств не оптимален в смысле размерности представления (числа степеней свободы в виде не известных функций в узлах триангуляционной решетки).

Базис, построенный на основе собственных функций дифференциального оператора задачи, оптимальный в смысле обобщенного ряда Фурье (однако это не говорит об оптимальности для конкретной задачи в целом с учетом граничных условий и т.д.). Кроме того, определение собственных функций многомерных тел сложной формы возможно только на основе численных процедур анализа алгебраических матриц, возникших в процессе дискретизации. Такие процедуры требуют компьютерных ресурсов на несколько порядков больше,

чем собственно решение задачи определения физических полей в устройстве [2]. Метод POD, в отличие от вышеупомянутых методов, определяет базис, анализируя «выход модели», а не дифференциальные свойства ее оператора.

В основе этого метода лежит идея определения базиса задачи не априорно, а на основе максимального отражения всей имеющейся информации о физическом процессе. В конечном итоге, метод POD состоит в нахождении пространственного базиса на основе определения собственных функций некоторого интегрального уравнения. Это интегральное уравнение (основное уравнение метода) строится путем аппроксимации корреляционной матрицы, определяемой на основе исследуемого процесса. Получаемый путем анализа корреляционной матрицы процесс пространственный базис задачи затем используется для проецирования в подходящие динамические переменные. В результате получаем динамическую модель малой размерности, адекватно описывающую исследуемый процесс или объект.

Иллюстративный пример

Представляет интерес сравнения к.с.ф. – классических собственных функций (собственные функции соответствующего дифференциального оператора) и э.с.ф. – эмпирических собственных функций метода POD. С этой целью рассмотрим академический пример задачи нестационарной теплопроводности в стержне с локализованными внутренними источниками.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \tau \geq 0$$

$$q(x) = \exp(-k^*(x - x_q)^2) \quad (1)$$

$$t|_{\tau=0} = t_0(\tau); \quad t|_{x=0} = t|_{x=1} = 0.$$

Как и можно было предположить э.с.ф. и к.с.ф. задачи (1) значительно отличаются. На рис. 1,а приведены несколько э.с.ф., на рис. 1,б для сравнения к.с.ф. задачи (1).

Однако, интуитивно очевидно, что при выделении э.с.ф. из набора задач типа (1), в ко-

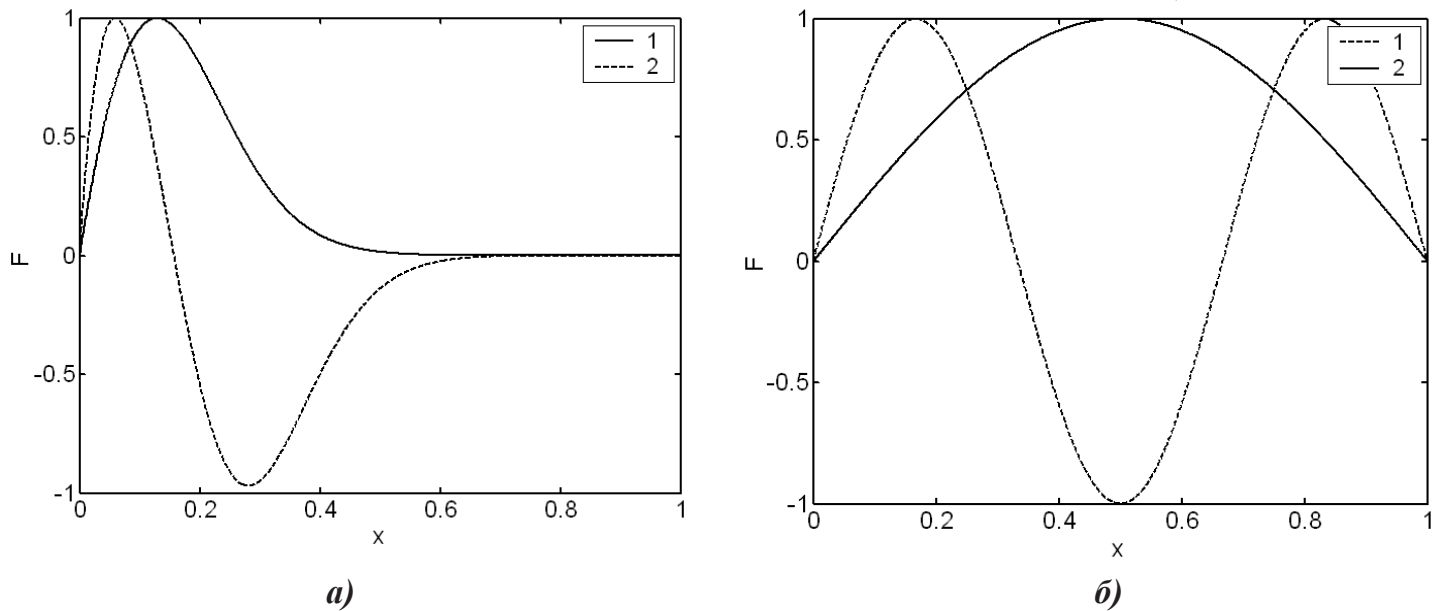


Рис. 1. Характер эмпирических и классических собственных функций: а – э.с.ф.; б – к.с.ф. для задачи (1) при $x_q = 0,1$, $k = 50$, $t_0(\tau) = 0$; 1 и 2 – соответственно первая и вторая с.ф.

торых положение источника меняется в пределах интервала задачи, э.с.ф. должны все более походить на к.с.ф., которые определяются общими свойствами оператора и не зависят от источника и его положения. С целью проверки этого тезиса решение задач (1) с различными положениями источника были объединены в

одно исследуемое поле путем простого объединения снимков (поле в определенный момент времени [3]). На рис. 2, а приведены э.с.ф. такого объединенного поля при увеличении числа исходных полей, соответствующих различным положениям источников. Как видно, имеется практически полное совпаде-

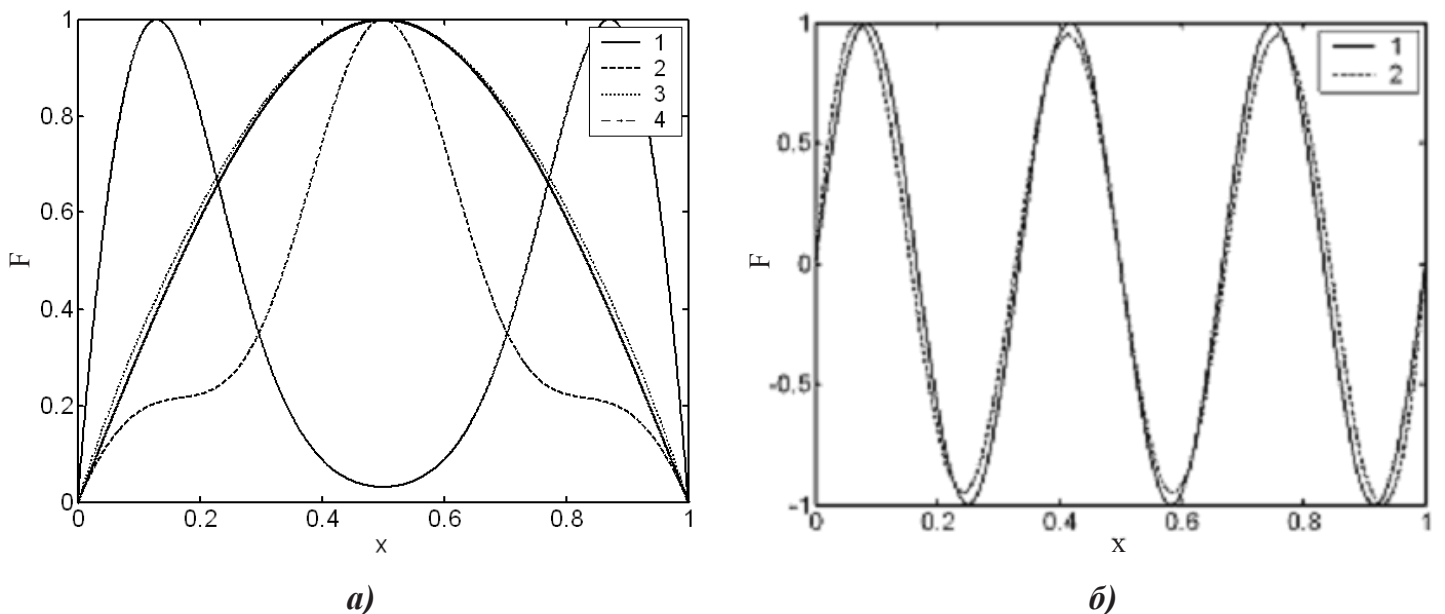


Рис. 2. Сравнение эмпирических и классических собственных функций в зависимости от числа объединенных полей n: а – первая с.ф., б – шестая с.ф., 1 – к.с.ф., 2 – n = 2, 3 – n = 3, 4 – n = 4, 5 – n = 9.

ние первой э.с.ф. с первой к.с.ф. уже при числе полей равном четырем. При этом чем старше с.ф., тем больше необходимое число полей. На рис. 2, б приведена шестая э.с.ф. в сравнении с к.с.ф. при числе полей равном девяти – совпадение еще не достигнуто.

Приведенный факт при более детальном рассмотрении является отражением свойств линейности задачи (1) и вытекающего из этого принципа суперпозиции и трансляционной симметрии корреляционной задачи (при равномерно распределенных положениях источников). Действительно, рассмотрение задачи (1) с каким-нибудь типом нелинейности, приводит к несовпадению изучаемых собственных функций, но при этом сохраняется качественное стремление к подобию (но не равенству) при увеличении числа источников. На рис. 3 приведены собственные функции задачи с добавленной квадратичной нелинейностью в уравнение (1) при числе объединенных полей равном девяти.

Как общий вывод данного раздела, можно сказать, что к.с.ф. отражают общие свойства задачи независимо от положения источника, в то время как э.с.ф. – частные свойства конкретной

постановки с определенным положением источника.

Составление модели теплового расчета радиатора

Рассмотрим задачу теплового расчета радиатора – рис. 4. Основание радиатора нагревается тепловым потоком с интенсивностью 100 кВт/м^2 . Поверхность радиатора охлаждается средой с температурой 300 К и коэффициентом теплоотдачи 100 Вт/м^2 . Начальная температура 300 К , свойства материала радиатора – теплоемкость 930 Дж/кг/К , коэффициент теплопроводности 190 Вт/м/К .

Задача состоит в составлении динамической модели (системы обыкновенных дифференциальных уравнений) небольшой размерности, описывающей временное поведение изучаемого объекта при различном характере изменения во времени тепловой нагрузки. Для этого необходимо определить специфический для анализируемой задачи пространственный базис, отражающий характер изменения искомой функции в рассматриваемой области. С этой целью рассматриваемая задача была решена с помощью пакета Fluent на сетке с 700000 элементами. Корреляционная матри-

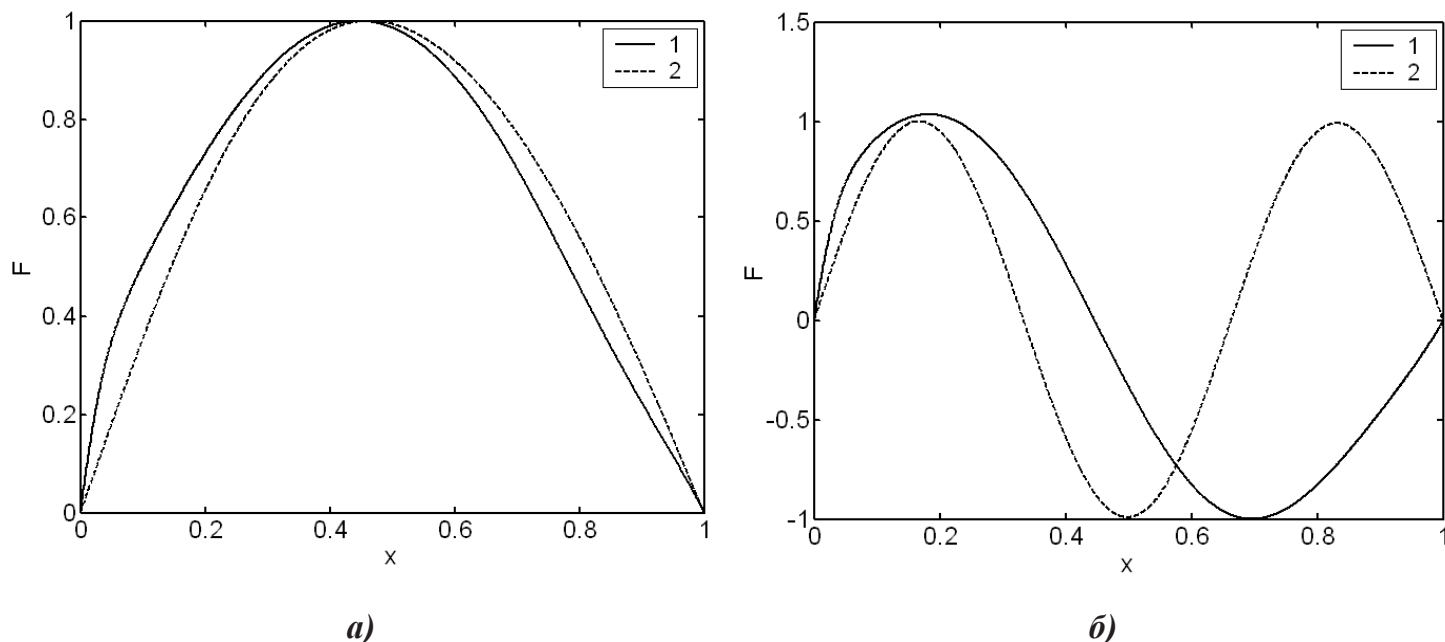


Рис. 3. Сравнение эмпирических и классических собственных функций а – первая с.ф., б – вторая с.ф., 1 – э.с.ф., 2 – к.с.ф.

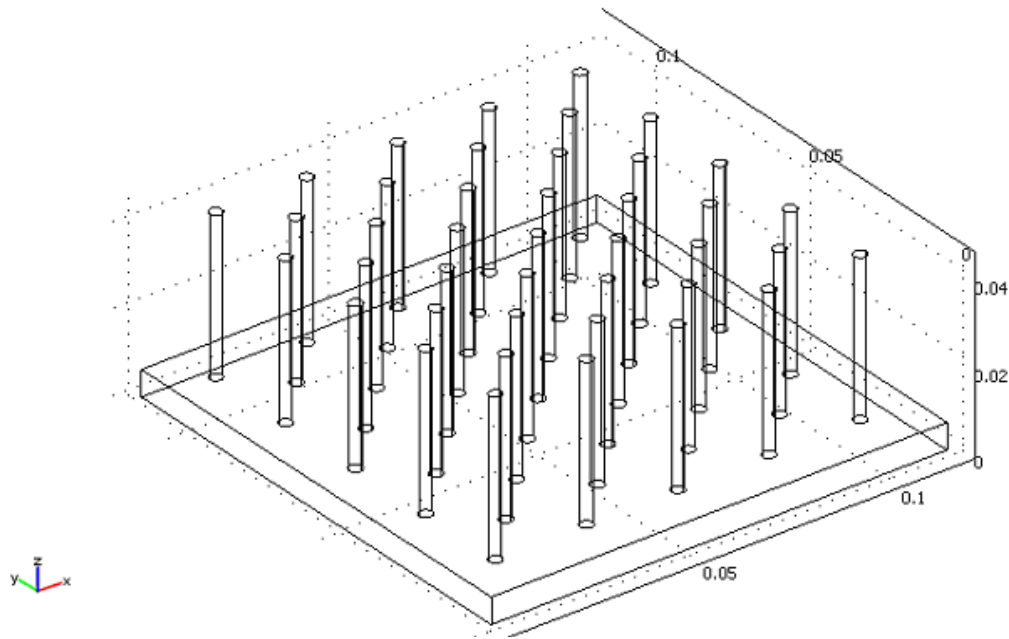


Рис. 4. К постановке задачи.

ца метода POD строилась путем выделения из температурного поля решения временных срезов (поле в фиксированный момент времени). С помощью метода POD [4] были определены искомые пространственные базисные функции. Как показали расчеты, уже 10 функций базиса достаточно для аппроксимации построенной корреляционной матрицы.

Найденный пространственный базис и является основой искомой ММ (маломодовой модели). С помощью метода Галеркина путем проектирования на пространственный базис составляется динамическая модель, состоящая из временных дифференциальных уравнений [4]. Проведенные по ней расчеты показали, что использование 10-членной модели обеспечивает среднеквадратичную погрешность решения порядка 1 %. Причем как для постоянной тепловой нагрузки, так и зависящей различным образом от времени и пространства. Время расчета на основе этой модели, по сравнению с решением полной задачи, сокращается на несколько порядков. Это дает возможность применять построенную ММ, как при физическом анализе изучаемых процессов, так и при

решении таких ресурсоемких задач как задачи управления, оптимизации и идентификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berkooz G., Holmes P., Lumley J.L. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flow // Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. – Т. 25. С. 539-575.
2. Bialecki R.A., Kassab A.J., Fic A. Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis // Int. J. Numer. Meth. Engng 2005. Т. 62. С. 774–797.
3. Deane A.E., Kevrekidis I.G., Kardiadakis G.E., Orszag S.A. Low-dimensional models for complex geometry flows: application to grooved channels and circular cylinders // Phys.Fluids A. – 1991. – Т. 3, № 10. – С. 2337-2354.
4. Blinov D. G., Sherenkovskii Yu.V. Fialko N.M., Prokopov V. G. and Yurchuk V.L. Construction of low-dimensional models for heat-transfer problems on the base of method of polyargumental systems // Int.Comm. Heat Mass Transfer, – 2004, – Т. 31, № 7– p. 963–970.

Получено 16.05.12 г.