

Визначення характеристик шаруватої структури за реконструйованою з коефіцієнтів відбиття матрицею розсіювання

З. Т. Назарчук, А. Т. Синявський

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79601, Україна
nazarch@ipt.lviv.ua, a.synavskyy@gmail.com*

Стаття надійшла до редакції 26 лютого 2010 р.

Подається метод визначення діелектричної проникності та товщини шарів плоскої шаруватої структури за результатами вимірювання коефіцієнта відбиття плоскої електромагнітної хвилі. В цьому методі використовується підхід до реконструкції частотної залежності всіх елементів матриці розсіювання в обмеженому діапазоні частот. Матриця розсіювання відновлюється через перерахунок вимірних коефіцієнтів відбиття від такої структури у вільному просторі та на ідеально провідній підкладці. Високої точності обчислення діелектричної проникності та товщини шарів досягнуто за рахунок ідентифікації спектральних коефіцієнтів, які виділено з елементів матриці розсіювання та описано скінченним рядом незгасаючих комплексних експонент.

1. Вступ

Математичною основою для створення нових підходів до неруйнівного контролю матеріалів є теорія обернених задач [1-3]. Зокрема, у багаточастотному електромагнітному зондуванні електричні та геометричні параметри об'єктів доцільно визначати непрямыми методами на підставі розв'язку обернених задач розсіювання для системи рівнянь Максвелла. Вихідними даними у таких задачах є вимірні значення розсіяного поля у просторі навколо об'єкту дослідження. Для плоскопаралельних шаруватих структур з різними матеріальними параметрами, в яких відсутні локалізовані включення, задачу розсіювання можна звести до одновимірної, а характеристики розсіювання описати матрицею розсіювання, одним з елементів якої є коефіцієнт відбиття. Останній можна отримати безпосередньо за результатами вимірювання. Саме залежність коефіцієнта відбиття від частоти $L(\omega)$ вважають вихідною у формулюванні більшості одновимірних обернених задач розсіювання.

Вибір методу розв'язання оберненої задачі залежить від апіорних даних про шукані матеріальні параметри плоскої структури – провідності γ , діелектричної ϵ та магнітної μ проникностей. Для середовищ із неперервною зміною матеріальних параметрів $\epsilon(z)$, $\mu(z)$ та $\gamma(z)$ одновимірну обернену задачу розсіювання можна звести до розв'язку системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра згідно з підходами Марченка [4], Гельфанда–Левітана [5] або Захарова–Шабата [6].

Окрему категорію складають обернені задачі для плоских структур, що мають площини розділу середовищ. Наприклад, для безвтратної ($\gamma = 0$) та чисто діелектричної ($\mu = 1$) структури з однорідними характеристиками матеріалу шарів коефіцієнт відбиття можна виразити рекурентною формулою [7]:

$$L(\omega) = \frac{-\kappa + L_{N-1}(\omega)e^{-i\omega\Delta v_1}}{1 - \kappa L_{N-1}(\omega)e^{-i\omega\Delta v_1}} =$$

$$= -\kappa + (1/\kappa - \kappa) \left[e^{-i\omega\Delta v_1} L_{N-1}(\omega) + \right.$$

$$+ e^{-2i\omega\Delta v_1} (L_{N-1}(\omega))^2 + e^{-3i\omega\Delta v_1} (L_{N-1}(\omega))^3 + \dots \Big], \quad (1)$$

де κ – коефіцієнт відбиття першої поверхні розділу; $L_{N-1}(\omega)$ – коефіцієнт відбиття шаруватой структури без першого шару; $\Delta v_1 = 2\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_1}d_1$ – часова затримка за рахунок проходження хвилею подвійної відстані у першому шарі, який має діелектричну проникність ϵ_1 та товщину d_1 ; ϵ_0 та μ_0 – діелектрична та магнітна сталі.

Методам розв’язання обернених задач дифракції за наближенням Борна [8] властиві спотворення розв’язку, оскільки ці методи, базуючись на гіпотезі про малі зміни діелектричної проникності, належним чином не враховують ефекту розсіювання хвиль на площинах розділу шаруватой структури. Відомі оптимізаційні методи розв’язання оберненої задачі для багатошаровой структури вимагають жорстких априорних обмежень на розв’язок, які гарантують знаходження глобального екстремуму [9, 10]. На відміну від них метод пошарового зрізання не потребує таких обмежень [7, 11]. Вихідними даними у цьому методі, як і у методах, що використовують інтегральні рівняння [12, 13], є імпульсна характеристика шаруватой структури. Таку характеристику можна обчислити перетворенням Фур’є коефіцієнта відбиття:

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Імпульсну характеристику (2) для багатошаровой структури з коефіцієнтом відбиття у вигляді (1) можна записати виразом:

$$r(t) = -\delta(t)\kappa + (1/\kappa - \kappa) \times (r_{N-1}(t - \Delta v_1) + r_{N-1}(t - 2\Delta v_1) \otimes r_{N-1}(t) + r_{N-1}(t - 3\Delta v_1) \otimes r_{N-1}(t) \otimes r_{N-1}(t) + \dots), \quad (3)$$

де $\delta(t)$ – дельта-функція; $r_{N-1}(t)$ – імпульсна характеристика шаруватой структури без першого шару; \otimes – оператор згортки.

У загальному вигляді характеристику (3) можна записати сумою безмежних збіжних рядів:

$$r(t) = \sum_{l=1}^{\infty} h_l \delta(t - l\Delta v_1) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{l,n} \delta(t - l\Delta v_1 - n\Delta v_2) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dots \quad (4)$$

Оскільки метод пошарового зрізання призначений для реконструкції так званих середовищ типу Гупілау [14], його застосування ґрунтується на припущенні про існування регулярної сітки, на якій можна визначити всі дельта-функції в $r(t)$. Для реконструкції методом пошарового зрізання [7] необхідно також мати значення безмежної $l, n, m = 1, \dots, \infty$ кількості коефіцієнтів ряду h_l та $u_{l,n}$ при дельта-функціях. Однак випадкова похибка у вимірних даних для обмеженого діапазону частот не дозволяє точно оцінити коефіцієнти з малою амплітудою. Це призводить до характерних спотворень розв’язку або до розбіжності ітераційного процесу у розв’язанні оберненої задачі методом пошарового зрізання. Наявність дельта-функцій в імпульсній характеристиці (4) унеможливує розв’язання оберненої задачі методами інтегральних рівнянь типу Вольтерра, які застосовують для структур із неперервною зміною матеріальних параметрів [12, 13].

Щоб уникнути зазначених недоліків, необхідно параметризувати вихідні дані в оберненій задачі розсіювання так, аби їх можна було подати у формі скінченного ряду. Відомо [15], що відношення елементів матриці розсіювання для шаруватой структури визначають суми M комплексних експонент:

$$\frac{L(\omega)}{T(\omega)} = \sum_{p=1}^M \beta(p) \exp(-iv(p)\omega), \quad (5)$$

$$\frac{1}{T(\omega)} = \sum_{p=1}^M \alpha(p) \exp(iv(p)\omega). \quad (6)$$

Тут $T(\omega)$ – коефіцієнт пропускання шаруватої структури, який для чисто діелектричних (безвтратних) матеріалів, коли має місце тожність $|T(\omega)|^2 + |L(\omega)|^2 = 1$, можна виразити через коефіцієнт відбиття $L(\omega)$.

Отже обернену задачу сформульовано як задачу реконструкції кусково-постійної функції діелектричної проникності $\epsilon(z)$ багатошарової чисто діелектричної структури за коефіцієнтом відбиття $L(\omega)$ нормально падаючої плоскої електромагнітної хвилі, комплексні значення якого задано дискретно на обмеженому діапазоні частот з певною випадковою похибкою, властивою результатам експериментальних вимірювань. Тому метою даної роботи є встановлення всіх елементів матриці розсіювання за коефіцієнтом відбиття, який отримують з експерименту, ідентифікація параметрів моделі згідно з формулами (5), (6) та розв'язок оберненої задачі розсіювання на основі такого параметризованого зображення.

2. Пряма задача розсіювання

Для встановлення основних властивостей елементів матриці розсіювання насамперед розглянемо задачу дифракції плоскої хвилі на плоскій шаруватій діелектричній структурі. У цьому випадку напруженість поля e в довільній точці z можна визначити з хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 e(z)}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon(z) e(z) = 0. \quad (7)$$

Розглядатимемо багатошарові чисто діелектричні структури, в яких функція діелектричної проникності $\epsilon(z)$ є кусково-постійною, а магнітна проникність $\mu = 1$. До того ж вважаємо, що розсіяне на такій структурі поле, множина значень якого складатиме вихідні дані для оберненої задачі, вимірюється у вільному просторі (рис. 1, а) з хвильовим числом $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Для шаруватої структури з однорідними електричними параметрами матеріалу розв'язок рівняння (7) має вигляд:

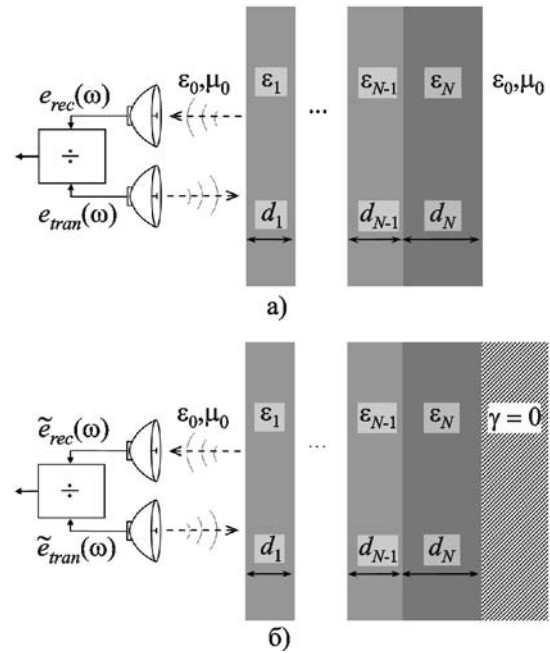


Рис. 1. Схема вимірювання коефіцієнта відбиття від багатошарової структури, яка знаходиться у вільному просторі (а) та від цієї ж структури на ідеально провідній підкладці (б)

$$e(z) = a_j(\omega) e^{-ik_j(z-d_j)} + b_j(\omega) e^{ik_j(z-d_j)}, \quad (8)$$

де $a_j(\omega)$ та $b_j(\omega)$ – коефіцієнти, що визначають співвідношення між хвилями, які поширюються у протилежних напрямках; $k_j = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_j}$ – хвильове число у j -му шарі з діелектричною проникністю ϵ_j ; $j = 0, (N-1)$ – номер шару в структурі з N таких смуг.

Задовольняючи граничні умови на поверхні розділу між j -м та $(j+1)$ -м шарами, взаємозв'язок коефіцієнтів $a_j(\omega)$ та $b_j(\omega)$ можна визначити залежністю:

$$\begin{bmatrix} a_j(\omega) \\ b_j(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_{j+1}} \times \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \\ (\rho_{j+1} - \rho_j) e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j) e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j+1}(\omega) \\ b_{j+1}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де $\rho_j = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0 \epsilon_j}$ – характеристичний імпе- данс; d_j – товщина j -го шару.

Рекурентне перемноження згідно з фор- мулою (9) дає можливість встановити такий взаємозв'язок для коефіцієнтів у матеріалах $j = 0$ та $j = N + 1$, що оточують багат шарову структуру:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} &= \prod_{j=0}^N \left(\frac{1}{2\rho_{j+1}} \times \right. \\ &\times \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} - \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \\ (\rho_{j+1} - \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_1} \begin{bmatrix} (\rho_1 + \rho_0)e^{-ik_1d_1} & (\rho_1 - \rho_0)e^{ik_1d_1} \\ (\rho_1 - \rho_0)e^{-ik_1d_1} & (\rho_1 + \rho_0)e^{ik_1d_1} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} A_1(\omega) & B_1(\omega) \\ B_1(-\omega) & A_1(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ – спектральні коефіцієнти всієї структури; $A_j(\omega)$ та $B_j(\omega)$ – спектральні коефіцієнти цієї структури без урахування впливу її перших j шарів. При цьому припускається, що $d_N = 0$.

З рівності (10) видно, що коефіцієнти $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ задовольняють умовам симетрії та умові збереження енергії:

$$A_0(-\omega) = \overline{A_0(\omega)}, \quad (11)$$

$$B_0(-\omega) = \overline{B_0(\omega)}, \quad (12)$$

$$A_0(-\omega)A_0(\omega) = 1 + B_0(-\omega)B_0(\omega). \quad (13)$$

Тут $\overline{A_0(\omega)}$ – комплексно спряжена величина до $A_0(\omega)$.

Спектральні коефіцієнти $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ всієї структури можна охарактеризувати спів- відношенням між амплітудами хвиль, що по-

ширюються у протилежних напрямках за умо- ви відсутності падаючої хвилі з однієї зі сторін. Наприклад, при зондуванні структури з лівого боку (рис. 1, а) відсутньою буде хвиля у пра- вому півпросторі, що поширюється у напрям- кові на структуру: $b_{N+1}(\omega) = 0$. Звідси рівність (10) набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(\omega)a_{N+1}(\omega) \\ B_0(-\omega)a_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

На основі формули (14) визначимо кое- фіцієнт пропускання та лівобічний коефіцієнт відбиття:

$$T(\omega) = \frac{a_{N+1}(\omega)}{a_0(\omega)} = \frac{1}{A_0(\omega)}, \quad (15)$$

$$L(\omega) = \frac{b_0(\omega)}{a_0(\omega)} = \frac{B_0(-\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (16)$$

У протилежному випадку, коли зондування багат шарової структури здійснюється тільки з правого боку, матимемо $a_0(\omega) = 0$. Тоді спів- відношення (10) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} A_0(\omega) & -B_0(\omega) \\ -B_0(-\omega) & A_0(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$

а отже,

$$\begin{bmatrix} -B_0(\omega)b_0(\omega) \\ A_0(\omega)b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Тоді коефіцієнт пропускання та правобічний коефіцієнт відбиття можна визначити форму- лами:

$$T(\omega) = \frac{b_0(\omega)}{b_{N+1}(\omega)} = \frac{1}{A_0(\omega)}, \quad (19)$$

$$R(\omega) = \frac{a_{N+1}(\omega)}{b_{N+1}(\omega)} = -\frac{B_0(\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (20)$$

Коефіцієнт пропускання $T(\omega)$ та коефіцієнти відбиття $R(\omega)$, $L(\omega)$ є елементами матриці розсіювання діелектричної структури. З отриманих формул (15), (16), (19) та (20) видно, що всі елементи матриці розсіювання також задовольняють умові симетрії за аналогією до виразів (11) та (12):

$$\overline{T(\omega)} = T(-\omega), \quad (21)$$

$$\overline{L(\omega)} = L(-\omega), \quad (22)$$

$$\overline{R(\omega)} = R(-\omega). \quad (23)$$

Умови симетрії вказують, що перетворення Фур'є (2) коефіцієнтів відбиття та пропускання є дійсними функціями. Крім того, з рівності (13) можна встановити інші важливі умови, яким задовольняють ці коефіцієнти:

$$R(\omega)T(-\omega) + L(-\omega)T(\omega) = 0, \quad (24)$$

$$|T(\omega)|^2 + |R(\omega)|^2 = 1, \quad (25)$$

$$|T(\omega)|^2 + |L(\omega)|^2 = 1. \quad (26)$$

Добуток матриць у виразі (10) свідчить, що спектральні коефіцієнти $A_j(\omega)$ та $B_j(\omega)$ для $j = 0, (N-1)$ є скінченними сумами комплексних експонент:

$$A_j(\omega) = \sum_{p=1}^{M_j} \alpha_j(p) \exp(iv_j(p)\omega), \quad (27)$$

$$B_j(\omega) = \sum_{p=1}^{M_j} \beta_j(p) \exp(iv_j(p)\omega), \quad (28)$$

де $\alpha_j(p)$ та $\beta_j(p)$ – коефіцієнти скінченних сум; $v_j(p)$ – дійсні коефіцієнти при аргументах комплексних експонент, які мають фізичний зміст часу запізнення з проходженням хвилі у багатошаровій структурі; параметр M_j означимо пізніше.

Варто зауважити, що під час експерименту для вимірювання доступні лише миттєві значення амплітуди випроміненого $e_{tran}(\omega)$ та прийнятого $e_{rec}(\omega)$ сигналів у точці, яка знаходиться на певній відстані d_0 від поверхні самої структури. Отже, коефіцієнт відбиття $L_m(\omega)$, що визначається відношенням цих вимірних величин, матиме додатковий набіг фази:

$$L_m(\omega) = \frac{e_{rec}(\omega)}{e_{tran}(\omega)}. \quad (29)$$

Цей набіг фази можна встановити з виразів (8) та (10), показавши відмінність між спектральними коефіцієнтами $A_0(\omega)$, $B_0(\omega)$ шаруватої структури і значеннями спектральних коефіцієнтів $A_m(\omega)$, $B_m(\omega)$, які визначено шляхом перерахунку результатів вимірювань:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_m(\omega) & B_m(\omega) \\ B_m(-\omega) & A_m(-\omega) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} e^{-ik_0 d_0} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 d_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} A_0(\omega)e^{-ik_0 d_0} & B_0(\omega)e^{-ik_0 d_0} \\ B_0(-\omega)e^{ik_0 d_0} & A_0(-\omega)e^{ik_0 d_0} \end{bmatrix}. \quad (30) \end{aligned}$$

З отриманого виразу (30) видно, що спектральні коефіцієнти $A_m(\omega)$ та $B_m(\omega)$ можна розкласти у скінченний ряд, в якому значення аргументів комплексних експонент відрізнятуться від значень $v_0(p)$ у формулах (27) та (28) на величину запізнення $d_0\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ за рахунок

проходження хвилею відстані d_0 у вільному просторі:

$$\begin{aligned} A_m(\omega) &= A_0(\omega) \exp(-ik_0 d_0) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(\omega) \exp\left(i\omega\left(v_0(p) - d_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}\right)\right) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \alpha_0(p) \exp(i\omega \tau_p), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} B_m(\omega) &= B_0(\omega) \exp(-ik_0 d_0) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p) \exp\left(i\omega\left(v_0(p) - d_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}\right)\right) = \\ &= \sum_{p=1}^{M_0} \beta_0(p) \exp(i\omega \tau_p). \end{aligned} \quad (32)$$

Звідси можна визначити, який набіг фази присутній у вимірних коефіцієнтах відбиття та проходження:

$$L_m(\omega) = \frac{B_m(-\omega)}{A_m(\omega)} = L(\omega) \exp(i2k_0 d_0), \quad (33)$$

$$T_m(\omega) = \frac{1}{A_m(\omega)} = T(\omega) \exp(ik_0 d_0). \quad (34)$$

3. Реконструкція елементів матриці розсіювання

Маючи на меті ідентифікацію коефіцієнтів сум (31) та (32) для подальшого розв'язання оберненої задачі, функції $A_m(\omega)$ та $B_m(\omega)$ можна безпосередньо обчислити за коефіцієнтами відбиття та пропускання згідно з виразами (33) та (34). Однак на практиці одночасне визначення коефіцієнтів відбиття та пропускання потребує залучення складного вимірювального обладнання та утруднює його калібрування. У деяких випадках вимірювання амплітуди відбитої хвилі та хвилі, що пройшла через

досліджувану структуру, є принципово неможливим через специфічну конструкцію об'єктів дослідження. Тому важливим є визначення елементів усієї матриці розсіювання (коефіцієнтів відбиття та пропускання) на основі вимірних значень розсіяного поля лише з одного боку від досліджуваної структури.

Одним із підходів до встановлення коефіцієнта проходження за відомим коефіцієнтом відбиття є метод реконструкції фази за модулем аналітичної функції [16]. З рівностей (27) та (28) видно, що спектральні коефіцієнти $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ є аналітичними функціями. Використовуючи залежності (26) та (15), можна обчислити значення спектрального коефіцієнта $A_0(\omega)$:

$$\frac{1}{|A_0(\omega)|^2} = 1 - |L(\omega)|^2 \Rightarrow |A_0(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}}. \quad (35)$$

Логарифм модуля $|A_0(\omega)|$ спектрального коефіцієнта є дійсною частиною деякої аналітичної функції, в якій уявна частина відповідає його фазі [16]. Беручи до уваги те, що перетворення Гільберта дозволяє встановити взаємозв'язок між дійсною та уявною частинами аналітичної функції, реконструйоване комплексне значення спектрального коефіцієнта можна обчислити через його модуль:

$$\begin{aligned} A_0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{i}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|1 - |L(\omega')|^2|}{\omega - \omega'} d\omega'\right), \end{aligned} \quad (36)$$

де $\mathbf{P} \int d\omega$ – головне значення інтеграла.

Числове інтегрування при встановленні комплексного значення спектрального коефіцієнта $A_0(\omega)$ у виразі (36) є складною математичною задачею, а отриманий при цьому результат може стати джерелом похибок для подаль-

ших обчислень. Останнє зумовлено двома обставинами. Перш за все, на практиці коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ вимірюють в обмеженій смузі частот $0 < \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$, що не дозволяє застосувати властивості фур'є-перетворення [17] при обчисленні перетворення Гільберта у виразі (36). Крім того, виміряні значення коефіцієнта відбиття $L(\omega)$ задані на скінченновимірній множині частот, що вносить похибку дискретизації у безпосередньому інтегруванні. Тому обчислення елементів матриці розсіювання вимагає іншого підходу. Новий алгоритм непрямого обчислення всіх елементів матриці розсіювання обґрунтовується такою теоремою.

Теорема. Якщо $L(\omega)$ є коефіцієнтом відбиття від плоскої шаруватої діелектричної структури у вільному просторі (рис. 1, а), а $\tilde{L}(\omega)$ – коефіцієнт відбиття цієї ж структури на ідеально провідній підкладці (рис. 1, б), то відповідну матрицю розсіювання структури з точністю до знака можна визначити як

$$S := \begin{bmatrix} R(\omega) & T(\omega) \\ T(\omega) & L(\omega) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\overline{L(\omega)} e^{-\delta(\omega)} & \sqrt{1-|L(\omega)|^2} e^{\left(-\frac{1}{2}\delta(\omega)\right)} \\ \sqrt{1-|L(\omega)|^2} e^{\left(\frac{1}{2}\delta(\omega)\right)} & L(\omega) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

де $\delta(\omega)$ – неперервна чисто уявна функція, отримана шляхом розгортання фази аргументу функції комплексної змінної з областю значень на колі одиничного радіуса:

$$\delta(\omega) = i \cdot \text{unwrap} \left[\arg \left(\frac{\overline{L(\omega)} \tilde{L}(\omega) - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) \right]. \quad (38)$$

Тут $\text{unwrap}[f] \in \mathbb{C}$ є функцією розгортання фази [18] від функції, що має область значень $f \in [-\pi, \pi]$.

Доведення. Згідно з рівністю (26) відношення комплексно спряженого значення $\overline{T(\omega)} = T(-\omega)$

коефіцієнта відбиття до оригіналу $T(\omega)$ має вигляд

$$\frac{T(-\omega)}{T(\omega)} = \frac{|T(\omega)|^2}{(T(\omega))^2} = \frac{1-|L(\omega)|^2}{(T(\omega))^2}. \quad (39)$$

Звідси можна отримати вираз

$$\frac{1}{(T(\omega))^2} = \frac{1}{1-|L(\omega)|^2} \frac{T(-\omega)}{T(\omega)}, \quad (40)$$

квадратний корінь з якого дозволяє визначити спектральний коефіцієнт $A_0(\omega)$ у формі

$$A_0(\omega) = \frac{1}{T(\omega)} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}} \sqrt{\frac{T(-\omega)}{T(\omega)}}. \quad (41)$$

Порівняння виразів (36) та (41) дає можливість зробити висновок, що відношення комплексно спряженого значення $\overline{T(\omega)} = T(-\omega)$ коефіцієнта відбиття до оригіналу $T(\omega)$ є комплекснозначною функцією з областю значень на колі одиничного радіуса:

$$\left| \sqrt{\frac{T(-\omega)}{T(\omega)}} \right| = 1, \quad (42)$$

$$\left| \frac{T(-\omega)}{T(\omega)} \right| = 1. \quad (43)$$

З іншого боку, відношення комплексно спряженого значення $\overline{T(\omega)} = T(-\omega)$ коефіцієнта відбиття до оригіналу $T(\omega)$ можна записати, використовуючи вираз (36):

$$\begin{aligned} \frac{T(-\omega)}{T(\omega)} &= \frac{A_0(\omega)}{A_0(-\omega)} = \\ &= \exp \left(\frac{i}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |1-|L(\omega')|^2|}{\omega - \omega'} d\omega' \right) = e^{\delta(\omega)}, \quad (44) \end{aligned}$$

де $\delta(\omega)$ – деяка неперервна комплекснозначна функція, яку необхідно встановити для реконструкції як коефіцієнта проходження $T(\omega)$, так і спектрального коефіцієнта $A_0(\omega)$ за коефіцієнтом відбиття $L(\omega)$ згідно формули (41). З умови (43) можна зробити висновок, що ця функція є чисто уявною.

Для того щоб уникнути числового інтегрування у виразі (36), внесемо надлишкову інформацію у задачу, розглядаючи значення коефіцієнта відбиття досліджуваної багат шарової структури на ідеально провідній підкладці як додаткові дані. Така стратегія розв’язання задачі реконструкції матриці розсіювання за коефіцієнтами відбиття передбачає виконання подвійного експерименту. Спочатку коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ визначаємо для шаруватої структури, яка знаходиться у вільному просторі, як показано на рис. 1, а. Друге вимірювання спрямоване на визначення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ цієї ж структури за умови повного відбиття у просторі справа від структури. Це забезпечується встановленням підкладки з безмежною провідністю $\gamma = \infty$ (рис. 1, б). В засобах неруйнівного контролю, на відміну від дистанційного зондування, виконання експерименту з метою такого перевизначення задачі, як правило, не викликає особливих труднощів.

Нехай коефіцієнти $\tilde{a}_0(\omega)$ і $\tilde{b}_0(\omega)$ визначають амплітуди хвиль, які поширюються назустріч одна одній у просторі, де вимірюється коефіцієнт відбиття від діелектричної структури з ідеально провідним екраном справа (рис. 1, б). Тоді $\tilde{a}_{N+1}(\omega)$ і $\tilde{b}_{N+1}(\omega)$ є амплітудами хвиль на поверхні ідеально провідної підкладки, де виконується гранична умова:

$$\tilde{a}_{N+1}(\omega) = -\tilde{b}_{N+1}(\omega). \quad (45)$$

Взаємозв’язок між амплітудами хвиль із протилежних боків багат шарової структури можна подати за аналогією до виразу (10):

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_0(\omega) \\ \tilde{b}_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{N+1}(\omega) \\ \tilde{b}_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Беручи до уваги граничну умову (45), вимірний у цьому випадку коефіцієнт відбиття визначимо відношенням коефіцієнтів $\tilde{a}_0(\omega)$ та $\tilde{b}_0(\omega)$:

$$\tilde{L}(\omega) = \frac{\tilde{b}_0(\omega)}{\tilde{a}_0(\omega)} = \frac{B_0(-\omega) - A_0(-\omega)}{-B_0(\omega) + A_0(\omega)}. \quad (47)$$

Виразивши спектральний коефіцієнт $B_0(\omega)$ через $A_0(\omega)$ в рівняннях (16) та (47), отримуємо вираз:

$$\frac{A_0(-\omega)}{A_0(\omega)} = \frac{T(\omega)}{T(-\omega)} = \frac{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)}{L(-\omega)\tilde{L}(\omega) - 1}. \quad (48)$$

Отже, рівняння щодо невідомої функції $\delta(\omega)$ можна безпосередньо записати, прирівнявши відношення коефіцієнтів відбиття у виразах (44) та (48):

$$\exp(\delta(\omega)) = \frac{\overline{L(\omega)\tilde{L}(\omega)} - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)}. \quad (49)$$

Оскільки функція $\delta(\omega)$ є чисто уявною, то логарифмування виразу (49) у правій частині дасть значення аргументу комплекснозначної функції:

$$\log \left(\frac{\overline{L(\omega)\tilde{L}(\omega)} - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) = i \left(\arg \left(\frac{\overline{L(\omega)\tilde{L}(\omega)} - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) + 2\pi n \right), \quad (50)$$

де n – довільне ціле число.

Як відомо, для функції аргументу $\arg(\cdot)$ інтервал $[-\pi, \pi]$ є областю значень. Тому для знаходження шуканої неперервної функції $\delta(\omega)$ необхідно застосувати функцію розгортання фази: $\text{unwrap}[f]: [-\pi, \pi] \rightarrow C$ [18]. Звідси розв’язок рівняння (49) можна записати у вигляді:

$$\delta(\omega) = i \cdot \text{unwrap} \left[\arg \left(\frac{\overline{L(\omega)\tilde{L}(\omega)} - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) \right]. \quad (51)$$

Таким чином, для відомої функції $\delta(\omega)$ спектральні коефіцієнти $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ отримано з виразів (16) та (41) у формі:

$$A_0(\omega) = \theta \frac{1}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}} \exp\left(\frac{1}{2}\delta(\omega)\right), \quad (52)$$

$$B_0(\omega) = \theta \frac{\overline{L(\omega)}}{\sqrt{1-|L(\omega)|^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(\omega)\right), \quad (53)$$

де $\theta = \pm 1$ – коефіцієнт неоднозначності знаку.

Доведення теореми завершено, подаючи всі значення матриці розсіювання через знайдену функцію $\delta(\omega)$ згідно з виразом (51). Отже, на основі формул (15), (16), (19), (20), а також (52) та (53) матрицю розсіювання з точністю до знака запишемо через функцію $\delta(\omega)$ у вигляді (37). Матрицю розсіювання, визначену за результатами вимірювань коефіцієнта відбиття на відстані d_0 від поверхні, записано як:

$$S_m := \begin{bmatrix} R_m(\omega) & T_m(\omega) \\ T_m(\omega) & L_m(\omega) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\overline{L_m(\omega)} e^{-\delta_m(\omega)} & \sqrt{1-|L_m(\omega)|^2} e^{\left(\frac{1}{2}\delta_m(\omega)\right)} \\ \sqrt{1-|L_m(\omega)|^2} e^{\left(\frac{1}{2}\delta_m(\omega)\right)} & L_m(\omega) \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Варто зауважити, що виміряні значення коефіцієнтів відбиття $L_m(\omega)$ та $\tilde{L}_m(\omega)$ матимуть набіг фази $\exp(i2k_0 d_0)$ у відповідності до виразу (33). Тому за аналогією з формулами (51)-(53) значення допоміжної функції $\delta(\omega)$ обчислимо як

$$\delta_m(\omega) = i \cdot \text{unwrp} \left[\arg \left(\frac{\overline{L_m(\omega)} \tilde{L}_m(\omega) - 1}{\tilde{L}_m(\omega) - L_m(\omega)} \right) \right], \quad (55)$$

а реконструйовані спектральні коефіцієнти даватимуть формули

$$A_m(\omega) = \theta \frac{1}{\sqrt{1-|L_m(\omega)|^2}} \exp\left(\frac{1}{2}\delta_m(\omega)\right), \quad (56)$$

$$B_m(\omega) = \theta \frac{\overline{L_m(\omega)}}{\sqrt{1-|L_m(\omega)|^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\delta_m(\omega)\right) \quad (57)$$

відповідно.

4. Властивості спектральних коефіцієнтів

Ідея нового методу розв'язання оберненої задачі розсіювання полягає у зведенні вихідних даних до параметризованої форми (31), (32) та визначенні характеристик багат шарової структури за значеннями коефіцієнтів цих сум. Тому для конструктивної реалізації нового методу необхідно проаналізувати властивості коефіцієнтів сум (27), (28) та встановити взаємозв'язки між цими коефіцієнтами для фіксованої частоти ω . Подальші твердження вирішують сформульовані завдання.

Твердження 1. Нехай $l_q = \sqrt{\epsilon_q} d_q$ – оптична товща q -го шару діелектричної структури. Тоді кількість експоненціальних доданків M_j з різними коефіцієнтами та значеннями аргументів у сумах (27), (28), $j = 0, (N-1)$, є рівною:

$M_j = 2^{N-j}$, якщо у структурі немає шарів з однаковою оптичною товщею, тобто $l_w \neq l_q, \forall w, q \in \{1, 2, \dots, (N-j)\} | w \neq q$;

$M_j = N-j+1$, якщо структура складається лише з шарів однакової оптичної товщі $l_w = l_q, \forall w, q \in \{1, 2, \dots, (N-j)\}$.

У загальному випадку кількість експоненціальних доданків лежить у межах $(N-j+1) \leq M_j \leq 2^{N-j}$.

Обґрунтування цього твердження можна здійснити на підставі виразу (10). Кожна операція перемноження матриці на матрицю в (10) подвоює кількість експоненціальних доданків, якщо у структурі немає шарів з однаковою оптичною товщею. Наявність шарів з однаковою оптичною товщею приводить до рекомендації експоненціальних доданків з однаковими аргументами, тому кількість експонент при

перемноженні двох матриць у виразі (10) у даному випадку збільшується щонайменше на одиницю.

Твердження 2. Значення аргументів $v_j(p)$, $p=1, M_j$, експоненціальних доданків у сумах (27), (28) є однаковими та визначаються комбінаціями $(\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3 \dots \pm l_{N-j})\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. При цьому мінімальне значення аргументу $v_j(1) = -(l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_{N-j})\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ матиме доданок з індексом $p=1$, а максимальне значення $v_j(M_j) = (l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_{N-j})\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ – доданок з індексом $p=M_j$.

Як видно з виразу (10), кожне перемноження матриць збільшує вдвічі множину експоненціальних аргументів. При цьому нові значення аргументів відрізнятимуться від своїх попередніх на величину $\pm l_q \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Твердження 3. З попереднього твердження випливає, що для впорядкованих аргументів $v_j(1) < \dots < v_j(p) < \dots < v_j(M_j)$, $p=1, M_j$, в експонентах сум (27), (28) властива симетрія абсолютних значень, так що

$$v_j(p) = -v_j(q), \quad p=1, M_j/2, \quad q = \overline{(M_j/2+1), M_j}$$

для парних M_j ;

$$v_j(p) = -v_j(q), \quad p = \overline{(M_j-1)/2}, \quad q = \overline{(M_j+1)/2}, M_j$$

для непарних M_j .

Твердження 4. Значення дійсних коефіцієнтів при експонентах із максимальним та мінімальним значенням аргументу в сумах (27), (28) співвідносяться як

$$\frac{\beta_j(1)}{\alpha_j(1)} = \frac{\alpha_j(M_j)}{\beta_j(M_j)} = \frac{(\rho_{j+1} - \rho_j)}{(\rho_{j+1} + \rho_j)}, \quad (58)$$

де $\alpha_j(1) = X_j(1)(\rho_{j+1} - \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ та $\beta_j(1) = X_j(1)(\rho_{j+1} - \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ – коефіцієнти при експоненційному доданку з найменшим значенням аргументу; $\alpha_j(M_j) = Y_j(M_j)(\rho_{j+1} - \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ та $\beta_j(M_j) = Y_j(M_j)(\rho_{j+1} + \rho_j)/(2\rho_{j+1})$ – коефіцієнти при доданку з найбільшим значенням аргументу експоненти; $X_j(1)$ та $Y_j(M_j)$ – деякі величини, що в загальному випадку залежать від значень характеристичних імпедансів $\rho_{j+1}, \rho_{j+2}, \dots, \rho_{N+1}$.

На достовірність цього твердження вказує структура першої матриці-множника у виразі

(10), елементи якої безпосередньо визначають саме такий характер співвідношення (58).

Твердження 5. У частковому випадку, якщо в структурі немає шарів з однаковими оптичними товщами: $l_w \neq l_q, \forall w, q \in \{1, 2, \dots, (N-j)\} | w \neq q$, то відношення всіх коефіцієнтів $\alpha_j(p)$ та $\beta_j(p)$, $p=1, M_j$, при експонентах з однаковим значенням аргументів може набувати одного з двох значень:

$$\frac{\beta_j(p)}{\alpha_j(p)} \in \left\{ \frac{(\rho_{j+1} - \rho_j)}{(\rho_{j+1} + \rho_j)}, \frac{(\rho_{j+1} + \rho_j)}{(\rho_{j+1} - \rho_j)} \right\}. \quad (59)$$

Твердження 6. Якщо елементи векторів $\alpha'_j = [\alpha'_j(1), \alpha'_j(2), \dots, \alpha'_j(M_j)]^T$ та $\beta'_j = [\beta'_j(1), \beta'_j(2), \dots, \beta'_j(M_j)]^T$ (символ $[]^T$ означає транспонування матриці) для $q=1, M_j$ та $j=0, (N-1)$ визначено формулою:

$$\begin{bmatrix} \alpha'_{j+1}(q) \\ \beta'_{j+1}(q) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_j} \times \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) & -(\rho_{j+1} - \rho_j) \\ -(\rho_{j+1} - \rho_j) & (\rho_{j+1} + \rho_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j(q) \\ \beta_j(q) \end{bmatrix}, \quad (60)$$

то в кожному з векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} буде однакова кількість M_{j+1} ненульових елементів, і ця кількість на загал є меншою, ніж M_j , тобто $M_j > M_{j+1}$.

Обґрунтування цього твердження можна отримати, використавши обернене перетворення до (10):

$$\begin{bmatrix} A_{j+1}(\omega) \\ B_{j+1}(-\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_j} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} & -(\rho_{j+1} - \rho_j)e^{ik_{j+1}d_{j+1}} \\ -(\rho_{j+1} - \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} & (\rho_{j+1} + \rho_j)e^{-ik_{j+1}d_{j+1}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_j(\omega) \\ B_j(-\omega) \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Перетворення (61) для коефіцієнтів при експонентах з однаковим значенням аргументу в сумах (27), (28) матиме вигляд (60). Крім того, нерівність $M_j > M_{j+1}$ впливає безпосередньо з першого твердження.

Твердження 7. Нехай $F := \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{M_{j+1}}\}$ – множина індексів ненульових елементів $\alpha'_{j+1}(q) \neq 0, q \in F$, у векторі α'_{j+1} , а $G := \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{M_{j+1}}\}$ – множина індексів ненульових елементів $\beta'_{j+1}(q) \neq 0, q \in G$, у векторі β'_{j+1} , що обчислені за формулою (60). Нехай також індекси в кожній з цих множин впорядковані так, що $v_j(f_1) < v_j(f_2) < \dots < v_j(f_{M_{j+1}})$ та $v_j(g_1) < v_j(g_2) < \dots < v_j(g_{M_{j+1}})$. Тоді справедлива рівність:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} l_{j+1} &= |v_j(f_1) - v_j(g_1)| = \\ &= |v_j(f_2) - v_j(g_2)| = \dots = |v_j(f_{M_{j+1}}) - v_j(g_{M_{j+1}})|. \end{aligned} \quad (62)$$

При цьому значення коефіцієнтів сум (31), (32) для $(j+1)$ -го шару можна визначити для $p = 1, M_{j+1}$ як

$$\alpha_{j+1}(p) = \alpha'_{j+1}(f_p), \quad (63)$$

$$\beta_{j+1}(p) = \beta'_{j+1}(g_p), \quad (64)$$

$$v_{j+1}(p) = v_j(f_p) + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} l_{j+1}, \quad (65)$$

$$\text{або } v_{j+1}(p) = v_j(g_p) - \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} l_{j+1}. \quad (66)$$

Справедливість цього твердження впливає з обґрунтування твердження 2 та формули (10).

5. Спектральний метод ідентифікації коефіцієнтів сум

Важливим етапом розв'язання оберненої задачі дифракції є ідентифікація параметрів $\tau_p, M_0, \alpha_0(p)$ та $\beta_0(p), p = 1, M_0$, у сумах (31),

(32) за значеннями спектральних коефіцієнтів, визначених шляхом перерахунку результатів вимірювання. Складність такої процедури зумовлена тим, що у виміряних даних завжди присутня випадкова складова, а самі вимірювання виконують на скінченній множині частот в обмеженому діапазоні. Для більшої адекватності математичної моделі процесу вимірювання введемо припущення про адитивний характер гаусівської випадкової складової. Тоді оцінку спектральних коефіцієнтів можна виразити сумою точного значення спектрального коефіцієнту та похибки [19]:

$$\hat{A}_m(\omega) = A_m(\omega) + n_A, \quad (67)$$

$$\hat{B}_m(\omega) = B_m(\omega) + n_B. \quad (68)$$

Тут n_A та n_B – комплексні гаусівські випадкові складові з розподілами $N(0, \sigma_A^2)$ та $N(0, \sigma_B^2)$, відповідно.

Варто зазначити, що припущення про гаусівський характер випадкових складових у формулах (67), (68), строго кажучи, є хибним, оскільки спектральні коефіцієнти $A_m(\omega)$ та $B_m(\omega)$ отримано за результатами нелінійних перетворень коефіцієнтів відбиття під час реконструкції матриці розсіювання. Однак таке припущення на практиці є допустимим, а процедура ідентифікації параметрів у сумах (31), (32) для адитивної гаусівської моделі суттєво спрощується. При цьому обґрунтованим є припущення щодо рівності дисперсій $\sigma_S^2 = \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ випадкової складової для спектральних коефіцієнтів $\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$.

Оскільки значення $\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$ визначені лише для скінченної множини частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N_m}$, вирази (67) та (68) можна звести до скінченновимірної форми. Нехай $\mathbf{W}(\boldsymbol{\tau})$ є матрицею експонент із чисто уявними аргументами, що залежать від вектора невідомих $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{M_0}]$:

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\tau}) = [\mathbf{V}(\tau_1), \mathbf{V}(\tau_2) \dots \mathbf{V}(\tau_{M_0})] =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{i\omega_1\tau_1} & e^{i\omega_1\tau_2} & \dots & e^{i\omega_1\tau_{M_0}} \\ e^{i\omega_2\tau_1} & e^{i\omega_2\tau_2} & \dots & e^{i\omega_2\tau_{M_0}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{i\omega_{N_m}\tau_1} & e^{i\omega_{N_m}\tau_2} & \dots & e^{i\omega_{N_m}\tau_{M_0}} \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{V}(\tau_p) = [e^{i\omega_1\tau_p}, e^{i\omega_2\tau_p}, \dots, e^{i\omega_{N_m}\tau_p}]^T$.

Тоді, вирази (67) та (68) можна записати як:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}(\tau) \cdot \boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{n}_A, \quad (69)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}(\tau) \cdot \boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{n}_B, \quad (70)$$

де $\mathbf{x} = [\hat{A}_m(\omega_1), \hat{A}_m(\omega_2), \dots, \hat{A}_m(\omega_{N_m})]^T$ та $\mathbf{y} = [\hat{B}_m(\omega_1), \hat{B}_m(\omega_2), \dots, \hat{B}_m(\omega_{N_m})]^T$ – вектори вибірок комплексних значень спектральних коефіцієнтів; $\mathbf{n}_A \in C^{N_m \times 1}$ та $\mathbf{n}_B \in C^{N_m \times 1}$ – вектори миттєвих значень випадкових складових n_A та n_B ; $\boldsymbol{\alpha}_0 = [\alpha_0(1), \alpha_0(2), \dots, \alpha_0(M_0)]^T \in R^{M_0 \times 1}$ та $\boldsymbol{\beta}_0 = [\beta_0(1), \beta_0(2), \dots, \beta_0(M_0)]^T \in R^{M_0 \times 1}$ – вектори шуканих коефіцієнтів сум (31) та (32).

Якщо результати вимірювань задано на регулярній сітці частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N_m}$ з кроком $\Delta\omega$, то матриця $\mathbf{W}(\tau)$ є матрицею Вандермонда.

У скінченновимірному формулюванні задачі спектрального аналізу полягає у знаходженні векторів невідомих параметрів $\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ та \hat{M}_0 за відомими векторами \mathbf{x} та \mathbf{y} . Розв'язання поставленої задачі методом дискретного перетворення Фур'є не дозволяє отримати високу точність, яку можна досягнути методом найменших квадратів [19]. В теорії спектрального аналізу [19, 20] розвинуто низку статистично обґрунтованих підходів, які надають можливість забезпечити точність розв'язку поставленої задачі, близьку до точності за методом найменших квадратів. У відомих підходах до розв'язання задачі спектрального аналізу [21, 22] прийнято розділяти та послідовно здійснювати оцінку порядку моделі \hat{M}_0 , встановлення невідомих аргументів експонент $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ та значень коефіцієнтів $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$ і $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$.

Спільність параметрів M_0 та $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{M_0}]$ для моделей (69), (70) вказує на те, що для їх оцінки можна використати надлишковість у вихідних даних, які виражено двома незалежними векторами \mathbf{x} та \mathbf{y} . Тому розглядатимемо вектори \mathbf{x} та \mathbf{y} як дві статистично незалежні реалізації деякого випадкового процесу, моделлю якого є скінченна сума періодичних функцій з випадковими значеннями амплітуд.

Беручи до уваги регулярність сітки частот, на яких виконують вимірювання, коваріаційні матриці $\mathbf{K}_A \in C^{D \times D}$ та $\mathbf{K}_B \in C^{D \times D}$ кожного з векторів \mathbf{x} та \mathbf{y} можна оцінити шляхом усереднення коваріаційних матриць їх підвекторів (з $C^{D \times 1}$) за формулами [20]:

$$\mathbf{K}_A = \frac{1}{N_m - D} \sum_{d=D}^{N_m} \begin{bmatrix} \hat{A}_m(\omega_d) \\ \vdots \\ \hat{A}_m(\omega_{d-D+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_m(\omega_d) \\ \vdots \\ \hat{A}_m(\omega_{d-D+1}) \end{bmatrix}^H, \quad (71)$$

$$\mathbf{K}_B = \frac{1}{N_m - D} \sum_{d=D}^{N_m} \begin{bmatrix} \hat{B}_m(\omega_d) \\ \vdots \\ \hat{B}_m(\omega_{d-D+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_m(\omega_d) \\ \vdots \\ \hat{B}_m(\omega_{d-D+1}) \end{bmatrix}^H, \quad (72)$$

де $[]^H$ – операція ермітового спряження матриці.

Тоді оцінку коваріаційної матриці досліджуваного випадкового процесу можна отримати як середнє між (71) та (72):

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B) / 2. \quad (73)$$

Відомо, що таку матрицю можна факторизувати і записати у вигляді [20]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}(\tau) \mathbf{S} \mathbf{W}^H(\tau) + \sigma_s^2 \mathbf{I}, \quad (74)$$

де \mathbf{S} – кореляційна матриця, яка характеризує статистичний взаємозв'язок між випадковими

значеннями амплітуди періодичних складових досліджуваного процесу.

Статистичні методи спектрального аналізу [19-21] базуються на операції проектування у так звані сигнальні та шумові підпростори, які сформовано системою власних векторів коваріаційної матриці. Враховуючи ермітову структуру коваріаційної матриці $\mathbf{K} = \mathbf{K}^H$, розклад її оцінки (74) у базисі власних векторів можна подати у вигляді

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\Lambda}_s \hat{\mathbf{U}}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\Lambda}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H, \quad (75)$$

де \mathbf{U}_s та \mathbf{U}_n ($\mathbf{U}_s \in C^{D \times M_0}$ та $\mathbf{U}_n \in C^{D \times (D - M_0)}$) – матриці, стовпці яких відповідають власним векторам сигнальної та шумової компоненти; Λ_s та Λ_n – діагональні матриці, уздовж діагоналей яких розташовано власні значення $\hat{\lambda}_{sq}$ для $q = 1, M_0$ та $\hat{\lambda}_{nw}$ для $w = (M_0 + 1), D$ відповідно.

Факторизована форма (74) коваріаційної матриці досліджуваного випадкового процесу та розклад оцінки коваріаційної матриці (75) є базою для побудови оцінок невідомих параметрів у моделях (69) та (70). Так, для оцінки порядку моделі M_0 можна використати статистичний підхід, який базується на відношенні правдоподібностей [21, 22]. Порівнюючи вирази (74) та (75), можна безпосередньо знайти оцінку для дисперсії випадкової складової у векторах \mathbf{x} та \mathbf{y} :

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{D - M_0} \sum_{w=M_0+1}^D \hat{\lambda}_{nw}. \quad (76)$$

Для оцінки вектора $\hat{\mathbf{t}}$ в моделях (69) та (70) доцільно використати ідею алгоритму MUSIC (Multiple Signal Classification) [23]. На відміну від методу найменших квадратів цей метод не потребує пошуку глобального екстремуму багатоекстремальної функції та характеризується досить високою точністю. Ідея вказаного алгоритму полягає у проектуванні тестового вектора спостережень $\mathbf{V}(\varphi)$ на підпростір, який натягнутий на власні вектори коваріаційної матриці шумової складової. Най-

менше значення такої проекції вказуватиме на відповідність параметра φ одній із шуканих величин τ_p . Розв'язок цієї задачі пошуку зводиться до мінімізації функції однієї змінної:

$$\hat{\mathbf{t}} = \arg \min_{\varphi} Q_{\text{MUSIC}}(\varphi), \quad (77)$$

де $Q_{\text{MUSIC}}(\varphi) = \mathbf{V}^H(\varphi) (\hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H) \mathbf{V}(\varphi)$ – значення проекції, яке в околі точок $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{M_0}$ має локальний мінімум.

Замість (77) прийнято обчислювати обернену функцію $1/Q_{\text{MUSIC}}(\varphi)$, яку називають спектром. За максимумами цієї функції оцінюють $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \dots, \hat{\tau}_{M_0}]$.

Зазначимо, що введена модель процесу, який є сумою періодичних складових з випадковими амплітудами, дає можливість досягнути кращої точності оцінювання невідомих параметрів у векторі $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \dots, \hat{\tau}_{M_0}]$ порівняно з моделлю, де періодичні складові мають детерміновані амплітуди (69) та (70). Крім того, краща точність оцінки є прямим наслідком усереднення коваріаційної матриці (73).

Коефіцієнти $\hat{\mathbf{a}}_0$ і $\hat{\mathbf{b}}_0$ для відомих параметрів $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \dots, \hat{\tau}_{M_0}]$ можна оцінити за принципом найменших квадратів:

$$\hat{\mathbf{a}}_0 = [\mathbf{W}^H(\hat{\mathbf{t}}) \mathbf{W}(\hat{\mathbf{t}})]^{-1} \mathbf{W}^H(\hat{\mathbf{t}}) \mathbf{x}, \quad (78)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = [\mathbf{W}^H(\hat{\mathbf{t}}) \mathbf{W}(\hat{\mathbf{t}})]^{-1} \mathbf{W}^H(\hat{\mathbf{t}}) \mathbf{y}. \quad (79)$$

6. Послідовність розв'язання оберненої задачі

Встановлені властивості матриці розсіювання та виявлені взаємозв'язки між коефіцієнтами скінченного ряду, яким параметризовано спектральні коефіцієнти, дозволяють сформулювати таку процедуру розв'язання оберненої задачі.

1. На першому етапі згідно з виразами (56) та (57) обчислюємо спектральні коефіцієнти

$\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$. Для цього використаємо значення коефіцієнта відбиття $L_m(\omega)$ від багат шарової діелектричної структури та коефіцієнта відбиття $\tilde{L}_m(\omega)$ від цієї ж структури на ідеально провідній підкладці. Вважаємо, що ці коефіцієнти відбиття є результатом безпосередніх вимірювань на сітці частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N_m}$ з кроком $\Delta\omega$.

2. Описаний у попередньому розділі спектральний метод дає можливість оцінити параметри $\hat{M}_0, \hat{\alpha}_0(p), \hat{\beta}_0(p)$ та $\hat{\tau} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \dots, \hat{\tau}_{M_0}]$ за дискретними значеннями спектральних коефіцієнтів $\hat{A}_m(\omega)$ та $\hat{B}_m(\omega)$.

3. Подальші обчислення спрямовані на визначення відстані d_0 від поверхні структури до точки, де вимірюються значення розсіяного поля. Їх результат дозволяє оцінити параметри $\hat{v}_0(p)$ для $p = 1, M_0$ та оперувати ними у розв'язанні оберненої задачі для вихідних даних, заданих у формі (27) та (28), замість (31) та (32). Для цього використаємо властивість симетрії абсолютного значення аргументів, описану в твердженні 3.

Набіг фази $\exp(i\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}d_0)$ у спектральних коефіцієнтах $\hat{A}_m(\omega)$ і $\hat{B}_m(\omega)$ змінює аргументи експоненціальних функцій у моделях (31) та (32) на постійну величину. З властивості симетрії, яку встановлює твердження 3, випливає тотожність:

$$\omega(\tau_p - \tau_{M_0-p+1}) = 2\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}d_0 \quad (80)$$

для $p = 1, M_0/2$ у випадку парних M_0 і $p = 1, (M_0 - 1)/2$ для непарних M_0 .

Відстань d_0 можна обчислити з виразу (80), маючи значення будь-якої пари параметрів τ_p і τ_{M_0-p+1} :

$$d_0 = \frac{(\tau_p - \tau_{M_0-p+1})}{2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (81)$$

Оскільки параметри τ_p відомі лише наближено, для покращення точності оцінки d_0 усе ріднюємо результат для кожної з пар $\hat{\tau}_p$ і $\hat{\tau}_{M_0-p+1}$:

$$\hat{d}_0 = \frac{1}{\text{round}(M_0/2)} \sum_{p=1}^{\text{round}(M_0/2)} \frac{(\hat{\tau}_p - \hat{\tau}_{M_0-p+1})}{2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \quad (82)$$

де $\text{round}(\)$ – функція заокруглення до найближчого цілого числа.

З виразу (31) можна встановити аргументи всіх $p = 1, M_0$ експоненціальних доданків у сумах (27) та (28):

$$\hat{v}_0(p) = \hat{\tau}_p - \hat{d}_0. \quad (83)$$

Подальші процедури складають тіло рекурентного процесу для обчислення характеристик кожного $j = 0, (N - 1)$ із шарів діелектричної структури.

4. Тотожність (58) дозволяє виразити характеристичний імпеданс ρ_{j+1} поверхневого шару структури через значення ρ_j . Цю тотожність запишемо для коефіцієнтів при експонентах з максимальним та мінімальним значеннями аргументу:

$$\rho_{j+1} = \frac{\alpha_j(1) + \beta_j(1)}{\alpha_j(1) - \beta_j(1)} \rho_j, \quad (84)$$

$$\rho_{j+1} = \frac{\beta_j(M_j) + \alpha_j(M_j)}{\beta_j(M_j) - \alpha_j(M_j)} \rho_j. \quad (85)$$

Для зменшення похибок імпеданс ρ_{j+1} оцінюємо як середнє значення з (84) та (85):

$$\hat{\rho}_{j+1} = \left(\frac{\hat{\alpha}_j(1) + \hat{\beta}_j(1)}{\hat{\alpha}_j(1) - \hat{\beta}_j(1)} + \frac{\hat{\beta}_j(M_j) + \hat{\alpha}_j(M_j)}{\hat{\beta}_j(M_j) - \hat{\alpha}_j(M_j)} \right) \frac{\hat{\rho}_j}{2}. \quad (86)$$

Відповідно значення діелектричної проникності $(j + 1)$ -го шару обчислюємо як

$$\hat{\epsilon}_{j+1} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0 \hat{\rho}_{j+1}^2}. \quad (87)$$

5. Коефіцієнти $\alpha'_{j+1}(q)$ та $\beta'_{j+1}(q)$ для $q=1, M_j$ обчислимо, застосувавши перетворення (60) для відомих параметрів середовищ $\hat{\rho}_j$ та $\hat{\rho}_{j+1}$ у j -му та $(j+1)$ -му шарі, а також за відомими параметрами моделі $\hat{\alpha}_j(p)$ та $\hat{\beta}_j(q)$ спектральних коефіцієнтів j -го шару.

6. У відповідності до твердження 6, частина коефіцієнтів, обчислених згідно з (60), є нульовими. Отже задачею, що вирішується на цьому етапі, є знаходження елементів множини індексів $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{M_{j+1}}\}$ ненульових коефіцієнтів $\alpha'_{j+1}(q) \neq 0$, $q \in F$, у векторі α'_{j+1} та множини $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{M_{j+1}}\}$, для якої $\beta'_{j+1}(q) \neq 0$, $q \in G$, у векторі β'_{j+1} .

Наявні похибки в оцінках $\hat{\rho}_{j+1}$ та $\hat{\rho}_j$, а також $\hat{\alpha}_j(p)$ та $\hat{\beta}_j(q)$ можуть спричинити відмінність від нуля коефіцієнтів $\alpha'_{j+1}(q)$ та $\beta'_{j+1}(q)$, які насправді мають бути нульовими. Тому ідентифікацію множин індексів $F := \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{M_{j+1}}\}$ та $G := \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{M_{j+1}}\}$ слід здійснювати, виходячи з умови перевищення коефіцієнтами певного порогу Σ_j . Вважатимемо коефіцієнт $\alpha'_{j+1}(q)$ чи $\beta'_{j+1}(q)$ нульовим, якщо виконується умова:

$$|\alpha'_{j+1}(q)| < \Sigma_j, \quad (88)$$

$$|\beta'_{j+1}(q)| < \Sigma_j. \quad (89)$$

Порядок моделей (31) та (32) для спектральних коефіцієнтів $(j+1)$ -го шару можна оцінити за кількістю елементів векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} , що задовольняють умовам (88) та (89): $\hat{M}_{j+1} = \#F$ або $M_{j+1} = \#G$ (тут використано позначення $\#$ кількості елементів у множині).

7. З виразу (62) можна знайти оптичну товщину l_{j+1} шару з номером $(j+1)$. Покращення точності оцінки оптичної товщі досягаємо усередненням результату обчислення l_{j+1} для всіх пар $\hat{v}_j(f_q)$ та $\hat{v}_j(g_q)$, $q=1, M_{j+1}$:

$$\hat{l}_{j+1} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}M_{j+1}} \sum_{q=1}^{M_{j+1}} |\hat{v}_j(f_q) - \hat{v}_j(g_q)|. \quad (90)$$

Для відомих оптичної товщі та діелектричної проникності шару можна знайти його метричну товщину:

$$\hat{d}_{j+1} = \hat{l}_{j+1} / \sqrt{\hat{\epsilon}_{j+1}}. \quad (91)$$

8. На останньому етапі рекурентної процедури встановлюємо параметри моделі спектральних коефіцієнтів $(j+1)$ шару:

$$\alpha_{j+1}(p) = \alpha'_{j+1}(f_p), \quad (92)$$

$$\beta_{j+1}(p) = \beta'_{j+1}(g_p), \quad (93)$$

а також

$$v_{j+1}(p) = v_j(f_p) + \sqrt{\epsilon_0\mu_0}l_{j+1}, \quad \text{або} \quad (94)$$

$$v_{j+1}(p) = v_j(g_p) - \sqrt{\epsilon_0\mu_0}l_{j+1}.$$

Рекурентну процедуру повторюємо з четвертого кроку, розглядаючи наступний шар, аж поки не виконається умова $M_{j+1} = 2$. Така умова свідчить про те, що в $(j+1)$ -му шарі будуть поширюватися лише хвилі, які перейшли поверхню розділу середовищ між j -м та $(j+1)$ -м шаром, та немає проникнення хвиль із шару $(j+2)$.

7. Статистичний аналіз точності та визначення порогу

Для впровадження розробленого методу розв'язання оберненої задачі дифракції необхідно визначити значення порогу Σ_j , у відповідності до якого відбираються ненульові елементи векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} за критеріями (88) та (89). Важливість цього кроку підтверджується тим, що при заниженому значенні порогу випадкова складова спричинятиме появу хибно ідентифікованих ненульових елементів у векторах α'_{j+1} та β'_{j+1} . У випадку завищеного порогу "малі" елементи векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} вважатимуться нульовими. Така помилка може

привести до недостовірного розв'язку оберненої задачі або до втрати збіжності описаного рекурентного процесу.

Для встановлення значення порогу Σ_j виконаємо статистичний аналіз точності оцінок коефіцієнтів $\alpha_j(p)$ та $\beta_j(p)$ у сумах (31) та (32), які обчислюються на кожному циклі рекурентної процедури за формулами (60), (92) та (93). Такий аналіз базується на припущенні щодо гаусівського розподілу похибок оцінки параметрів. Для цього оцінки коефіцієнтів запишемо у вигляді адитивної моделі їх дійсних значень та випадкової складової:

$$\hat{\alpha}_j(p) = \alpha_j(p) + n_{\alpha,j}, \quad (95)$$

$$\hat{\beta}_j(p) = \beta_j(p) + n_{\beta,j}, \quad (96)$$

де $n_{\alpha,j}$ та $n_{\beta,j}$ – випадкові складові, що характеризуються нормальним законом розподілу $N(0, \sigma_j^2)$ з нульовим середнім та дисперсією σ_j^2 .

Запропонований метод спектрального аналізу дає можливість оцінити дисперсію випадкової складової в обчислених спектральних коефіцієнтах за формулою (76). Ця величина служить вихідною для статистичного аналізу, задача якого полягає у визначенні впливу похибки вихідних даних на дисперсію оцінок елементів векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} .

Співвідношення між дисперсією σ_s^2 випадкової складової спектральних коефіцієнтів та дисперсією оцінки коефіцієнтів $\hat{\alpha}_j(p)$, $\hat{\beta}_j(p)$ можна встановити, виходячи з границі Рао–Крамера [19, 20]. Для моделі спостереження у формі (31), (32) обчислення такої границі становить істотну трудність. Тому будемо використовувати значення цієї границі для спрощеної моделі, що описує адитивну суміш періодичної гармонічної функції з детермінованою амплітудою та випадкової гаусівської складової [18].

Дисперсію оцінки амплітуди гармонічної складової можна приблизно визначити як

$$\sigma_0^2 \approx \sigma_s^2 / N_m. \quad (97)$$

Підставляючи статистичні моделі похибок (95) і (96) у вираз (60), встановимо модель спостереження для коефіцієнтів $\hat{\alpha}'_{j+1}(p)$ та $\hat{\beta}'_{j+1}(p)$:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}'_{j+1}(q) &= \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} \alpha_j(p) - \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} \beta_j(p) + \\ &+ \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} n_{\alpha,j} - \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} n_{\beta,j}, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}'_{j+1}(q) &= -\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} \alpha_j(p) + \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} \beta_j(p) - \\ &- \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} n_{\alpha,j} + \frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} n_{\beta,j}. \end{aligned} \quad (99)$$

Зауважимо, що впливом похибок параметрів $\hat{\rho}_j$ та $\hat{\rho}_{j+1}$ на дисперсію оцінки $\hat{\alpha}'_{j+1}(p)$ та $\hat{\beta}'_{j+1}(p)$ у даному дослідженні знехтувано.

Використовуючи правила додавання та множення випадкових величин із виразів (98) та (99), матимемо взаємозв'язок між значеннями дисперсії оцінки коефіцієнтів $\hat{\alpha}_j(p)$, $\hat{\beta}_j(p)$ та $\hat{\alpha}'_{j+1}(p)$, $\hat{\beta}'_{j+1}(p)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{j+1}^2 &= \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2\rho_j} \right)^2 \sigma_j^2 + \left(\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_j} \right)^2 \sigma_j^2 = \\ &= \left(\frac{\rho_{j+1}^2 + \rho_j^2}{2\rho_j^2} \right) \sigma_j^2. \end{aligned} \quad (100)$$

Оскільки замість нульових коефіцієнтів у векторах α'_{j+1} та β'_{j+1} у обчисленнях буде спостерігатися випадкова величина з дисперсією σ_{j+1}^2 , значення порогу Σ_j можна вибрати у відповідності до значення середньоквадратичного відхилення σ_{j+1} . Чисельні експерименти підтвердили прийнятність такого значення порогу:

$$\Sigma_j = 1.5 \sqrt{\left(\frac{\rho_{j+1}^2 + \rho_j^2}{2\rho_j^2} \right) \sigma_j^2}. \quad (101)$$

8. Висновок

Результати числового моделювання розсіювання плоскої хвилі на діелектричних шаруватих структурах та розв'язання відповідної оберненої задачі підтверджують справедливність розроблених теоретичних положень та свідчать про дієвість підходу до непрямого визначення характеристик таких структур. Як видно з рис. 2, де порівняно результати реконструкції багатошарової структури запропонованим алгоритмом (рис. 2, а) та методом пошарового зрізання [7] (рис. 2, б) з оригінальною функцією діелектричної проникності (пунктирна лінія на рисунках), точність нового методу є суттєво вищою.

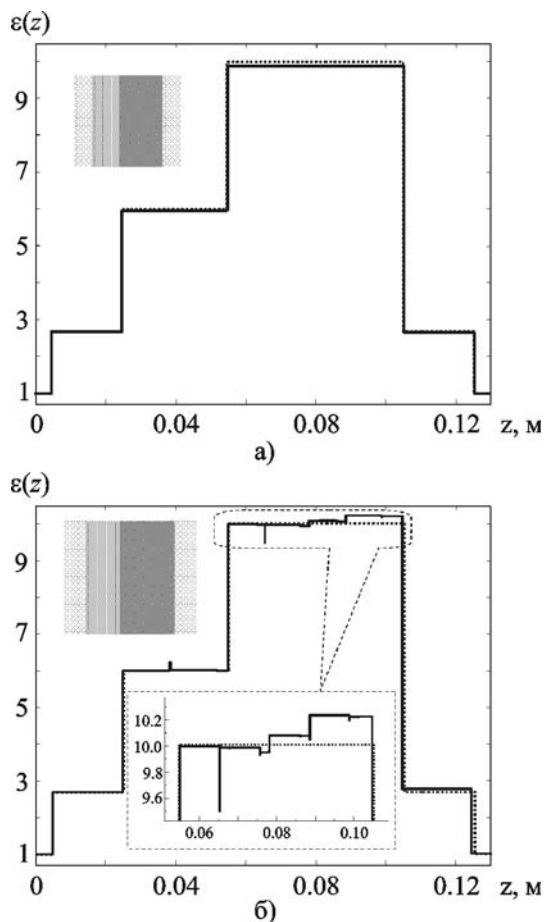


Рис. 2. Порівняння результатів розв'язання оберненої задачі запропонованим методом (а) та методом пошарового зрізання [7] (б). Пунктирною лінією показано точний розв'язок, а суцільною – результати числового обчислення

Поєднавши результати односторонніх вимірювань коефіцієнта відбиття від діелектричної структури та коефіцієнта відбиття від цієї ж структури на ідеально провідному екрані розв'язано задачу реконструкції всіх елементів матриці розсіювання для обмеженого діапазону частот. Це дало можливість оперувати спектральними коефіцієнтами, які на відміну від коефіцієнтів відбиття та проходження можна параметризувати скінченим рядом. Таке трактування вихідних даних спростило розв'язання оберненої задачі, дозволивши уникнути необхідності розв'язку інтегральних рівнянь типу Вольтерра, які зазвичай використовуються у відомих методах [3, 12, 13].

Досягнення високої точності значною мірою зумовлено використанням статистично обґрунтованих методів оцінювання параметрів скінченного ряду як моделі спектральних коефіцієнтів, та вибором порогу для виявлення значущих коефіцієнтів цього ряду. Розвиток ідеї використання скінчених рядів для розв'язання оберненої задачі дозволив уникнути ідентифікації хибних поверхонь розділу середовищ (рис. 2, б), що характерно для методу пошарового зрізання. Крім того, запропонований підхід на відміну від оптимізаційних методів розв'язання оберненої задачі [9, 10] не потребує апріорних даних про розв'язок, що суттєво розширює множину класів досліджуваних діелектричних структур.

Зазначимо, що реконструкцію матриці розсіювання та розв'язання оберненої задачі виконано за коефіцієнтами відбиття, заданими у смузі частот від 20 до 70 ГГц з кроком 50 МГц, а у вихідні дані введено випадкову складову з дисперсією $\sigma_n^2 = 0.013^2$. Висока точність реконструкції параметрів шаруватої структури за таких умов дає можливість стверджувати, що запропонований підхід можна ефективно використати як новий метод обробки результатів вимірювання у засобах неруйнівного контролю діелектричних матеріалів.

Література

1. Cakoni F. and Colton D. Qualitative methods in inverse scattering theory. – Berlin: Springer, 2005. – 227 p.
2. Pike R. and Sabatier P. Scattering and inverse scattering in pure and applied science. – San Diego: Academic press, 2002. – 1831 p.

3. Khruslov E. Ya. and Shepelsky D. G. Review article: Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // *Inverse problems*. – 1994. – Vol. 10, No. 1. – P. 1-37.
4. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – К.: Наукова думка, 1977. – 332 с.
5. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // *Известия АН СССР. Сер. матем.* – 1951. – Т. 15, №4. – С. 309-360.
6. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 1971. – Т. 61, вып. 1(7). – С. 118-134.
7. Синявський А. Т., Шахін М. Високороздільне відновлення розривів функції діелектричної проникності за вимірюваннями коефіцієнта відбиття в обмеженому спектральному діапазоні // *Відбір і обробка інформації*. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2008. – Вип. 29(105). – С. 10-20.
8. Vatrakov D. O. and Zhuck N. P. Solution of a general inverse scattering problem using the distorted Born approximation and iterative technique // *Inverse Problems*. – 1994. – Vol. 10, No. 1. – P. 39-54.
9. Ramm A. G. and Gutman S. Optimization methods in direct and inverse scattering. In: *Continuous Optimization: Current Trends and Modern Applications* / Ed. by A. M. Rubinov. – NY: Springer-Verlag New York, 2005. – P. 51-110.
10. Джала В. Р., Капко Л. І. Радіохвильова діагностика плоскошарових діелектриків на підставі розв'язку оберненої задачі // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. – 2009. – Т. 45, №3. – С. 117-122.
11. Gladwell G. M. L. *Inverse Problems in Scattering: An Introduction*. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 380 p.
12. Newton R. G. Inversion of reflection data for layered media: a review of exact methods // *Geophys. J. Int.* – 1982. – Vol. 69, No. 2. – P. 571-572.
13. Burridge R. The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi integral equations of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems // *Wave Motion*. – 1980. – Vol. 2. – P. 305-323.
14. Ware J. A. and Aki K. Continuous and discrete inverse-scattering problems in a stratified elastic medium. I. Plane waves at normal incidence // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1969. – Vol. 45, No. 1. – P. 911-921.
15. Aktosun T., Klaus M., and van der Mee C. Recovery of discontinuities in a non-homogeneous medium // *Inverse Problems*. – 1996. – Vol. 12, No. 1. – P. 1-25.
16. Klibanov M. V., Sacks P. E., and Tikhonravov A. V. The phase retrieval problem // *Inverse Problems*. – 1995. – Vol. 11, No. 1. – P. 1-28.
17. *The transforms and applications handbook* / Ed. by Poularikas A. D. – Boca Raton: CRC Press, 2000. – 1120 p.
18. Tribolet J. M. A new phase unwrapping algorithm // *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* – 1977. – Vol. 25. – P. 170-177.
19. Kay S. M. *Fundamentals of Statistical signal processing: estimation theory*. – NY: Prentice-Hall, 1993. – 595 p.
20. Stoica P. and Moses R. *Spectral analysis of signals*. – NY: Prentice-Hall, 2005. – 480 p.
21. Uber J. A. Estimation of the dimensionality of the signal subspace: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. – Virginia: George Mason University, 2003. – 183 p.
22. Synyavskyy A. T., Antonyuk V. P., Lobur M. V., and Klepfer Ye. I. Spectral analysis in problems of electromagnetic sources detection and multilayer structures identification // *Radioelektronika i informatika*. – 2008. – No. 4. – P. 50-56.
23. Schmidt R. O. Multiple emitter location and signal parameter estimation // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 1986. Vol. 34. – P. 276-280.

**Определение характеристик
многослойной структуры
по реконструированной
по коэффициентам отражения
матрице рассеяния**

З. Т. Назарчук, А. Т. Синявский

Представлен метод определения диэлектрических проницаемостей и толщин слоев плоской многослойной структуры исходя из результатов измерений коэффициента отражения плоской электромагнитной волны. В этом методе используется подход к реконструкции частотной зависимости всех элементов матрицы рассеяния в ограниченном диапазоне частот. Восстановление матрицы рассеяния осуществлено путем перерасчета измеренных коэффициентов отражения от такой структуры в свободном пространстве и на идеально проводящей подложке. Высокой точности определения диэлектрической проницаемости и толщины слоев удалось достичь за счет идентификации спектральных коэффициентов, которые выделены из элементов матрицы рассеяния и представлены в виде конечного ряда незатухающих комплексных экспонент.

Determination of Multilayer Structure Parameters by Means of Reconstruction of Scattering Matrix from Known Reflection Coefficients

Z. T. Nazarchuk and A. T. Synyavskyy

A new method for determination of both layers' permittivity and thickness of a plain multilayer structure is proposed. The reflection coefficient of a plain electromagnetic wave is considered as initial data in the problem. The method is based on an approach to reconstruction of the frequency dependences of all scattering matrix elements in a limited waveband. The scattering matrix has been recovered by recalculation of the measured reflection coefficients for this structure in free space and on a perfectly-conducting screen. A high accuracy in both permittivity and thickness determination is achieved due to identification of spectral coefficients which are distinguished from scattering matrix elements and expressed as a finite series of undamped complex exponents.