УДК 534.611

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В СЛОЕ СКАЧКА

© О.С.Голод, А.И. Гончар, Ю.А. Гончар, С.И. Неверова, Л.И. Шлычек, 2010

Государственный Северо-Западный технический университет, г. Санкт-Петербург

Научно-технический центр панорамных акустических систем НАН Украины, г. Запорожье

Теоретично досліджено фазу розсіяного звукового поля в шаруватому океанічному середовищі з багатомасштабними випадковими неоднорідностями. Показано, що поряд зі змінами, обумовленими шаруватістю, середня фаза зазнає невеликого «тремтіння» при розсіюванні на мікроструктурі температурного поля.

Теоретически исследована фаза рассеянного звукового поля в слоистой океанической среде с многомасштабными случайными неоднородностями. Показано, что наряду с изменениями, обусловленными слоистостью, средняя фаза испытывает «дрожание», которое мало при рассеянии на микроструктуре температурного поля.

The phase of the scattered sound field in a stratified ocean environment containing large-scale random inhomogeneity's is studied theoretically. It is shown that along with the changes caused by stratification, the middle phase is experiencing "shaking", which is small for scattering on the microstructure of the temperature field.

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА, СРЕДНЯЯ ФАЗА, СЛОЙ ЭПШТЕЙНА, МИКРОСТРУКТУРА СЛОЯ, РАЗНОСТЬ ФАЗ, УСТРОЙСТВО ФАЗОВОЕ, СХЕМА ЗАДЕРЖКИ, ДЕТЕКТОР ФАЗОВЫЙ

Данная статья является продолжением работы авторов над проблемой исследования распространения звука в слое скачка [1]. В предыдущей публикации [1] был представлен расчет звукового поля в слоистой среде с многомасштабными случайными неоднородностями. В этой статье предлагается разработанный способ регистрации слоя скачка, который заключается в зондировании толщи воды моноимпульсными сигналами на частотах 9-90 кГц и измерении средней разности фаз реверберационных сигналов, разнесенных во времени на интервал, не превышающий время прохождения слоя зондирующим импульсом. Средняя разность фаз принимаемых из области термоклина (ТК) сигналов испытывает регулярные изменения только на интервале вышеуказанного времени, что позволяет наряду с обнаружением тонкой структуры толщи воды судить и о толщине звукорассеивающих слоёв, а по результатам многих посылок изучать внутреннюю волну (ВВ).

1. Влияние неоднородностей океана на среднюю фазу однократно рассеянного звукового поля

Долгоживущие по сравнению со временем акустического эксперимента неоднородности, например, сезонный термоклин, следует считать регулярными и учитывать через соответствующие регулярные изменения поля средней скорости звука.

Стратификация океанической среды по вертикали ведет к слоистому строению гидрофизических полей в океане.

Для слоистых сред наиболее естественными и простыми для анализа являются интегральные представления акустических полей P_0 и G_0 [2-4], например,

$$P_0 = (2\pi)^{-2} \int \tilde{P}_0(\vec{x}, z) e^{i\vec{x}\vec{r}} d^2\vec{x} \ , \qquad (1.1)$$

$$G_0(\vec{R}, \vec{R}') = (2\pi)^{-2} \int \tilde{G}_0(\vec{x}, z, z') e^{i\vec{x}(\vec{r}-\vec{r}')} d^2\vec{x} \ , \qquad (1.2)$$

где $\vec{x} = (x_x, x_y)$, $\vec{r} = (x, y)$.

Их достоинство состоит в том, что при их анализе можно применять асимптотические методы, например, метод перевала [2-5]. Их легко преобразовать в представление в виде нормальных волн или лучевое представление [3].

P₁ является линейным функционалом от гауссова поля $\mu(\vec{R})$ [6] с нулевым средним значением. Тогда $< e^{i\alpha P_1} >$ характеристический функционал этого поля. Его значение хорошо известно [7] и равно:

$$< e^{i\alpha P_1} > = e^{-2\alpha^2 \Gamma} , \qquad (1.3)$$

где

$$\Gamma = \int\int \vartheta(\vec{R}, \vec{R}_1) \vartheta(\vec{R}, \vec{R}_2) B(\vec{R}_1, \vec{R}_2) d^3\vec{R}_1 d^3\vec{R}_2 \ , \qquad (1.4)$$

$$\vartheta(\vec{R}, \vec{R}') = G_0(\vec{R}, \vec{R}') k^2(\vec{R}') P_0(\vec{R}_1') M(\vec{R}'), \qquad (1.5)$$

$$B(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = < \mu(\vec{R}_1) \mu(\vec{R}_2) > , \qquad (1.6)$$

Подставим выражения (1.5), (1.1), (1.2) в формулу (1.4). Тогда получим следующий результат:

$$\Gamma(\vec{r}, z) = (2\pi)^{-4} \int\int dz_1 dz_2 \int\int d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 k^2(\vec{r}_1, z_1) k^2(\vec{r}_2, z_3) M(\vec{r}_1, z_1) M(\vec{r}_2, z_2) \times$$

$$\times B\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1 - z_2, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \int\int\int\int d^2\vec{x} d^2\vec{x}_1 d^2\vec{x}_2 d^2\vec{x}_3 \tilde{G}_0(\vec{x}; z, z_1) \tilde{P}_0(\vec{x}_1, z_1) \times \qquad (1.7)$$

$$\times \tilde{G}_0(\vec{x}_2; z_1, z_2) \tilde{P}_0(\vec{x}_3, z_2) \cdot \exp\left\{ i\left[(\vec{x} + \vec{x}_2)\vec{r} - (\vec{x} - \vec{x}_1)\vec{r}_1 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_3)\vec{r}_2 \right] \right\},$$

который с помощью новых переменных интегрирования:

$$\eta = z_1 - z_2\,,\;\; \overline{z} = \tfrac{1}{2}\left(z_1 + z_2\right),$$

$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,,\;\; \vec{s} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right),$$

$$q_1 = \vec{x} - \vec{x}_1\,,\; \vec{Q}_1 = \tfrac{1}{2}\left(\vec{x} + \vec{x}_1\right),$$

$$\vec{q}_2 = \vec{x}_2 - \vec{x}_3\,,\; \vec{Q}_2 = \tfrac{1}{2}\left(\vec{x}_2 + \vec{x}_3\right),$$

преобразуем к виду:

$$\Gamma\left(\vec{r}, z\right) = \left(2\pi\right)^{-4} \iint d\overline{z}\, d\eta \iint d^2\vec{s}\, d^2\vec{\rho} \iiiint d^2\vec{Q}_1\, d^2\vec{Q}_2\, d^2\vec{q}_1\, d^2\vec{q}_2 \times$$

$$\times B\left(\vec{\rho};\eta, z\right) k^2\left(\vec{s} + \tfrac{1}{2}\vec{\rho}, \overline{z} + \tfrac{\eta}{2}\right) k^2\left(\vec{s} - \tfrac{1}{2}\vec{\rho}, \overline{z} - \tfrac{1}{2}\eta\right) M\left(\vec{s} + \tfrac{1}{2}\vec{\rho}, \overline{z} + \tfrac{1}{2}\eta\right) \times$$

$$\times M\left(\vec{s} - \tfrac{1}{2}\vec{\rho}, \overline{z} - \tfrac{1}{2}\eta\right) \tilde{G}_0\left(\vec{Q}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{q}_1; z, \overline{z} + \tfrac{1}{2}\eta\right) \tilde{P}_0\left(\vec{Q}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{q}_1, \overline{z} + \tfrac{1}{2}\eta\right) \times \tag{1.8}$$

$$\times \tilde{G}_9\left(\vec{Q}_2 + \tfrac{1}{2}\vec{q}_2; z, \overline{z} - \tfrac{1}{2}\eta\right) \tilde{P}_0\left(\vec{Q}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{q}_2, \overline{z} - \tfrac{1}{2}\eta\right) \cdot \exp\Big\{ i \Big[\Big(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 +$$

$$+ \frac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}{2} \Big) \vec{r} - \left(\vec{q}_1 + \vec{q}_2\right) \vec{s} - \frac{1}{2}\left(\vec{q}_1 - \vec{q}_2\right) \vec{\rho} \Big] \Big\}.$$

Полагая, что поле k^2 практически не меняется не только в пределах одной случайной неоднородности, но и в горизонтальных пределах озвученной области, будем иметь:

$$k^2\left(\vec{s} + \tfrac{1}{2}\vec{\rho},\, \overline{z} + \tfrac{\eta}{2}\right) k^2\left(\vec{s} - \tfrac{1}{2}\vec{\rho},\, \overline{z} + \tfrac{\eta}{2}\right) \cong k^4\left(\overline{z}\right). \tag{1.9}$$

Последнее, очевидно, имеет место при звуковом зондировании толщи океана над слоем скачка вдали от его границ.

Если точка наблюдения отстоит от точки рассеяния на лучевом расстоянии L значительно большем, чем средний горизонтальный размер случайных неоднородностей $\rho_н$, то:

$$M\left(\vec{s} + \tfrac{1}{2}\vec{\rho}, \overline{z} + \tfrac{1}{2}\eta\right) M\left(\vec{s} - \tfrac{1}{2}\vec{\rho}, \overline{z} - \tfrac{1}{2}\eta\right) \cong M^2\left(\vec{s}, \overline{z}\right) = M\left(\vec{s}, \overline{z}\right). \tag{1.10}$$

Допускаемая при замене (1.10) ошибка порядка [8] $\rho_н/L << 1$.

Из предположения (1.9) следует, что характер изменения полей $\tilde{P}_0, \tilde{G}$ фактически не меняется на толщине одной неоднородности. Все это позволяет значительно упростить формулу (1.8) и получить:

$$\Gamma(\vec{r},z)=\int d\overline{z}\,k^4(\overline{z})\iiiint d^2\vec{Q}_1\,d^2\vec{Q}_2\,d^2\vec{q}_1\,d^2q_2\Delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2,\overline{z})\tilde{B}_1\left(\frac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2},\overline{z}\right)\times$$

$$\times\tilde{G}_0\left(\vec{Q}_1+\frac{1}{2}\vec{q}_1;z,\overline{z}\right)\tilde{P}_0\left(\vec{Q}_1-\frac{1}{2}\vec{q}_1,\overline{z}\right)\tilde{G}_0\left(\vec{Q}_2+\frac{1}{2}\vec{q}_2;z,\overline{z}\right)\times \tag{1.11}$$

$$\times\tilde{P}_0\left(\vec{Q}_2-\frac{1}{2}\vec{q}_2,\overline{z}\right)\exp\left\{\left[\left(\vec{Q}_1+\vec{Q}_2+\frac{\vec{q}_1+\vec{q}_2}{2}\right)\vec{r}-(\vec{q}_1+\vec{q}_2)\vec{s}_0\right]\right\},$$

где $\Delta(\vec{q},\overline{z})$ - дельтаобразная функция, которая, например, для прямоугольного пятна с полуразмерами $a(\overline{z}),b(\overline{z})$ соответственно по x и y равна:

$$\Delta(\vec{q},\overline{z})=\frac{\sin q_x\,a(\overline{z})}{\pi q_x}\frac{\sin q_y\,b(\overline{z})}{\pi q_y}. \tag{1.12}$$

Если горизонтальные размеры озвученного пятна значительно превосходят длину волны, то эту функцию можно заменить на дельта-функцию Дирака $\delta(\vec{q})$.

Действительно, при выполнении условий $k_0a>>1$, $k_0b>>1$ для первого множителя в (1.12) имеем:

$$\frac{\sin q_x\,a}{\pi q_x}=\frac{\sin k_0^{-1}q_xk_0a}{k_0\pi k_0^{-1}q_x}\cong\frac{1}{k_0}\delta\left(\frac{q_x}{k_0}\right)=\delta(q_x),$$

и аналогично для второго.

Функция $\tilde{B}_1(\vec{q},\overline{z})$ задается выражением:

$$\tilde{B}_1(\vec{q},\overline{z})=(2\pi)^{-2}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2\vec{\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta\,B(\vec{\rho};\eta,\overline{z})e^{-i\vec{q}\vec{\rho}}\,. \tag{1.13}$$

Предположим, что:

$$B(\vec{\rho};\eta,\overline{z})=<\mu^2(\overline{z})>e^{-\frac{|\rho_x|+|\rho_y|}{\rho_H}-\frac{\eta}{\rho_v}}, \tag{1.14}$$

где $\rho_н$, ρ_v - горизонтальный и вертикальный масштабы корреляции неоднородностей.

Подставляя (1.14) в (1.13) и интегрируя, находим:

$$\tilde{B}_1\left(\vec{q},\overline{z}\right)=2<\mu^2\left(\overline{z}\right)>\rho_v\frac{1}{\pi}\frac{\rho_н}{1+q_x^2\rho_н^2}\frac{1}{\pi}\frac{\rho_н}{1+q_y^2\rho_н^2}.$$

Если в горизонтальном направлении неоднородности крупномасштабны $k_0\rho_н>>1$, то:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\rho_н}{1+q_x^2\rho_н^2}=\frac{1}{\pi}\frac{k_0^{-1}k_0\rho_н}{1+k_0^{-2}q_x^2k_0^2\rho_н^2}\cong k_0^{-1}\delta\left(k_0^{-1}q_z\right)=\delta\left(q_x\right).$$

Аналогично:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\rho_н}{1+q_y^2\rho_н^2}=\delta\left(q_y\right),$$

$$\tilde{B}_1\left(\vec{q},\overline{z}\right)=2\rho_v<\mu\left(\overline{z}\right)>\delta\left(\vec{q}\right).$$

Полагая в (1.11) в соответствии с вышесказанным:

$$\Delta\left(\vec{q}_1+\vec{q}_2,\overline{z}\right)=\delta\left(\vec{q}_1+\vec{q}_2\right),$$

$$\tilde{B}_1\left(\frac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2},\overline{z}\right)=2\rho_v<\mu^2\left(\overline{z}\right)>\delta\left(\frac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2},\overline{z}\right),$$

и интегрируя по $\vec{q}_2$, а затем по $\vec{q}_1$, получим:

$$\Gamma\left(\vec{r},z\right)=2\rho_v\int k^4\left(\overline{z}\right)<\mu^2\left(\overline{z}\right)>j^2\left(\vec{r};z,\overline{z}\right), \tag{1.15}$$

где

$$j\left(\vec{r};z,\overline{z}\right)=\int e^{i\vec{Q}\vec{r}}\tilde{G}_0\left(\vec{Q};z,\overline{z}\right)\tilde{P}_0\left(\vec{Q},\overline{z}\right)d^2\vec{Q}. \tag{1.16}$$

Для импульсных сигналов интегрирование в (1.15) ведется по толщине эффективно рассеивающего объёма.

Средняя фаза рассеянного поля имеет вид:

$$\begin{aligned}<\varphi_1>&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\Theta+\left[2\pi/\left|\Gamma\right|\right]^{1/2}\left(\operatorname{Im}U\cos\frac{\Theta}{2}-\operatorname{Re}U\sin\frac{\Theta}{2}\right)-\\&-\left(2\pi\right)^{1/2}\left|\Gamma\right|^{-3/2}\left(\operatorname{Im}W\cos\frac{3}{2}\Theta-\operatorname{Re}W\sin\frac{3}{2}\Theta\right),\end{aligned} \tag{1.17}$$

где $\Theta = arg\, \Gamma$.

Из выражений (1.15), (1.16), (1.17) ясно, что средняя фаза однократно рассеянного на микроструктуре поля скорости звука сигнала целиком определяется в точке наблюдения регулярным полем скорости звука через поля $k^2, \tilde{G}, \tilde{P}_0$ и его случайной микроструктурой через $<\mu^2(\bar{z})>$ на глубине погружения зондирующего импульса.

По литературным данным [6] температурная микроструктура с глубиной затухает и сменяется микроструктурой, обусловленной глубинными течениями. В работе [9] показано, что течения модулируют амплитуду проходящего сигнала. Из сказанного выше ясно, что для рассеянного сигнала имеет место фазовая модуляция.

Для конкретных численных оценок $arg\, \Gamma$ необходимо знать поля $\tilde{G}_0$ *и* $\tilde{P}_0$, что для произвольного профиля скорости звука $c(z)$ остается и поныне неразрешимой задачей.

Можно применить коротковолновые асимптотики, например, ВКБ решения, однако, имея в виду обсуждение возможности применения фазового метода к обнаружению термоклина, мы используем точные решения для модели слоя скачка в виде слоя Эпштейна.

2. Звуковое поле монохроматического точечного источника в слое Эпштейна-Бреховских

Поле $k^2(z)$ в слое Эпштейна зададим зависимостью Бреховских [4]:

$$k^2 = k_0^2\left[1 - N_1\sigma - 4N_2\sigma(1-\sigma)\right], \tag{2.1}$$

где $k_0=\omega/c_0$,

$c_0=c(-\infty)$ - скорость звука до слоя,

$$N_1 = 1 - c_0^2 c_1^{-2}, \tag{2.2}$$

$c_1=c(\infty)$ - скорость звука после слоя,

$$\sigma = \frac{e^{mz}}{1+e^{mz}}, \tag{2.3}$$

$m=2\pi/\delta$ - толщина слоя,

$$N_2 = 1 - c_{00}^{-2} c_0^2 - \tfrac{1}{2} N_1, \tag{2.4}$$

$c_{00}=c(0)$.

При $N_1 \neq 0$, $N_2=0$ имеем «переходной слой» – модель скачка скорости звука.

При $N_1=0$, $N_2\neq0$ – «симметричный слой», или модель скачка градиента скорости звука.

Функция Грина уравнения (2.5):

$$\left(\Delta+k^2\right)P_0=0\,, \tag{2.5}$$

является решением неоднородного уравнения

$$\left(\Delta+k^2\right)G_0=\delta\left(\vec{R}-\vec{R}'\right), \tag{2.6}$$

и с точностью до постоянного множителя, задающего силу источника, описывает звуковое поле точечного источника в среде.

Подставляя (1.2) в (2.6) и учитывая соотношение

$$\delta\left(\vec{R}\right)=\left(2\pi\right)^{-2}\delta\left(z\right)\int e^{i\vec{x}\vec{r}}d^2\vec{x}\,,$$

получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\tilde{G}}{dz^2}+\left[k^2\left(z\right)-x^2\right]\tilde{G}=\delta\left(z-z'\right).$$

Функция Грина $\tilde{G}\left(\vec{x};z,z'\right)$ этого уравнения строится обычным образом [10], как

$$\tilde{G}_0\left(\vec{x};z,z'\right)=\frac{1}{\Delta\left(z'\right)}\Psi_1\left(\vec{x},z_>\right)\Psi_2\left(\vec{x},z_<\right), \tag{2.7}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 два линейно независимых решения однородного уравнения:

$$\frac{d^2\Psi}{d\,z^2}+\left[k^2\left(z\right)-x^2\right]\Psi=0\,, \tag{2.8}$$

$$\Delta\left(z'\right)=\left.\frac{d\Psi_1}{d\,z}\Psi_2-\frac{d\Psi_2}{d\,z}\Psi_1\right|_{z=z'} \tag{2.9}$$

$$z_>=\max\left(z,z'\right),\quad z_<=\min\left(z,z'\right).$$

Для слоя Эпштейна частные решения Ψ_1 и Ψ_2 волнового уравнения (2.8) имеют следующий вид [4]:

$$\Psi_1 = U(\xi) W_1(\xi) , \tag{2.10}$$

$$\Psi_2 = U(\xi) W_2(\xi) , \tag{2.11}$$

где

$$\xi = -e^{mz} , \tag{2.12}$$

$$U(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}(j-1)} (1-\xi)^{\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta-\gamma)} , \tag{2.13}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} + d_2 + im^{-1}(q_0 - q_1) + id_1 , \tag{2.14}$$

$$\beta = \tfrac{1}{2} + d_2 + im^{-1}(q_0 + q_1) + id_2 , \tag{2.15}$$

$$\gamma = 1 + 2im^{-1} q_0 , \tag{2.16}$$

$$d_2 + id_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 - 16k_0^2 m^{-1} N_2\right)^{1/2} , \tag{2.17}$$

$$q_0 = \sqrt{k_0 - x^2} , \quad q_1 = \sqrt{k_1^2 - x^2} , \tag{2.18}$$

а ω_1 и ω_2 - частные решения гипергеометрического уравнения

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\omega}{d\xi^2} - \left[(\alpha+\beta+1)\xi - \gamma\right]\frac{d\omega}{d\xi} - \alpha\beta\omega = 0 . \tag{2.19}$$

При $z>z'$:

$$\tilde{G}_0(\vec{x}; z, z') = \frac{1}{\Delta(z')} U(\xi) U(\xi') \omega_1(\xi) \omega_2(\xi') . \tag{2.20}$$

Из (2.9) – (2.13) следует:

$$\Delta(z) = m\xi U^2(\xi)\left(\frac{d\omega_1}{d\xi}\omega_2 - \frac{d\omega_2}{d\xi}\omega_1\right) = m\xi U^2(\xi)\Delta_\omega(\xi). \tag{2.21}$$

Непосредственно из уравнений вида (2.19) для ω_1 и ω_2 для функции:

$$\Delta_{\omega}(\xi)=\frac{d\omega_1}{d\xi}\omega_2-\frac{d\omega_2}{d\xi}\omega_1, \tag{2.22}$$

находим:

$$\frac{d\Delta_{\omega}}{d\xi}=\frac{(\alpha+\beta+1)\xi-\gamma}{\xi(1-\xi)}\Delta_{\omega}. \tag{2.23}$$

Из уравнения (2.23) интегрируя, получим:

$$\Delta_{\omega}(\xi)=\frac{c}{(1-\xi)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\xi^{\gamma}}. \tag{2.24}$$

Постоянную интегрирования c определяем из условия:

$$c=\lim_{\xi\to 0}(1-\xi)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\xi^{\gamma}\Delta_{\omega}(\xi). \tag{2.25}$$

Пользуясь частными решениями гипергеометрического уравнения:

$$\omega_1=F(\alpha,\beta,\gamma,\xi), \tag{2.26}$$

$$\omega_2=\xi^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,\xi), \tag{2.27}$$

формулой для производной от гипергеометрической функции $F(\alpha,\beta,\gamma,\xi)$:

$$\frac{d}{d\xi}F(\alpha,\beta,\gamma,\xi)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ \xi), \tag{2.28}$$

значением гипергеометрической функции в нуле $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 0)=1$, а также соотношениями (2.22) и (2.25) имеем:

$$\begin{gathered}c=\lim_{\xi\to\infty}(1-\xi)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\xi^{\gamma}\left[\frac{\alpha\beta}{\gamma}\xi^{1-\gamma}-(1-\gamma)\xi^{-\gamma}-\xi^{1-\xi}\times\right.\\ \left.\times\frac{(\alpha-\beta+1)(\beta-\alpha+1)}{2-\gamma}\right]=\gamma-1.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Из выражения (2.21) с учётом (2.13), (2.24) и (2.29) следует:

$$\Delta(z') = m\xi' U^2(\xi')\Delta_\omega(\xi') = m(\gamma-1)\,.$$

Поэтому согласно формуле (2.7):

$$\tilde{G}_0(\vec{x},z,z') = \frac{1}{m(\gamma-1)}(\xi\xi')^{\frac{1}{2}(\gamma-1)}\left[(1-\xi)(1-\xi')\right]^{\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta-\gamma)}\times$$

$$\times\begin{cases}\omega_1(\xi)\ \omega_2(\xi') & при\ \ z>z',\\ \omega_2(\xi)\ \omega_1(\xi') & при\ \ z<z'.\end{cases} \tag{2.30}$$

На основании (2.12), (2.26), (2.27), (2.14)-(2.16), (2.25) известного [11] преобразования:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\xi) = (1-\xi)^{-\alpha}\,F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{\xi}{\xi-1}\right),$$

приходим к следующему окончательному результату:

$$\tilde{G}_0(\vec{x};z,z') = \frac{1}{2iq_0}\left(\frac{1+e^{mz_>}}{1+e^{mz_<}}\right)^{im-1(q_1-q_0)} e^{iq_0(z_>-z_<)}\times$$

$$\times F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\sigma_>\right)F\left(1-\alpha,\beta-\gamma+1,2-\gamma,\sigma_<\right),$$

где $\sigma_> = \dfrac{e^{mz_>}}{1+e^{mz_>}}$, $\sigma_< = \dfrac{e^{mz_<}}{1+e^{mz_<}}$, который удобно представить в виде:

$$\tilde{G}_0(\vec{x};z,z') = \frac{1}{2iq_0}\Pi(x;z_>,z_<)\exp\left\{i\left[q_0(z_>-z_<)+im^{-1}(q_1-q_0)\,\ell(z_>,z_<)\right]\right\}. \tag{2.31}$$

Здесь:

$$\Pi(x;z_>,z_<) = F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma,\sigma_>\right)F\left(1-\alpha,\beta-\gamma+1,2-\gamma,\sigma_<\right), \tag{2.32}$$

$$\ell(z_>,z_<) = \ell n\left(1+e^{mz_>}\right)-\ell n\left(1+e^{mz_<}\right)\,. \tag{2.33}$$

Полагая точечный источник расположенным в точке (0, 0, -*h*) , где $h>>\delta$, определим функцию $\tilde{P}_0(\vec{x},z)$ выражением, аналогичным (2.31), а именно:

$$\tilde{P}_0(\vec{x},z) = i\frac{A_1}{2q_0}D_н(\vec{x})F(x,z)\exp\left\{i\left[(z+h)q_0 + m^{-1}(q_1 - q_0)l(z)\right]\right\}, \qquad (2.34)$$

где $D_н(\vec{x})$ - диаграмма направленности по давлению излучающей антенны,

A_1 – постоянная, численно равная амплитуде звукового давления на единичном расстоянии от точечного источника в направлении главного максимума диаграммы направленности.

$$\mathrm{F}(\vec{x},z) = F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\sigma), \qquad (2.35)$$

$$\ell(z) = \ell n\left(1+e^{mz}\right). \qquad (2.36)$$

3. Средняя фаза звукового поля рассеянного мелкомасштабной термоструктурой слоя скачка

В работе [12], по-видимому, впервые была высказана мысль о том, что рассеивание звука на мелкомасштабных температурных неоднородностях даёт возможность неконтактного определения глубины залегания слоя скачка и его колебаний.

Настоящий раздел является теоретическим развитием этой идеи в несколько нетрадиционном направлении, а именно, в плане обоснования реализованного авторами в фазовом устройстве регистрации скачка (ФУРС) фазового метода.

Разумеется, наряду с рассеиванием на термоструктуре происходит рассеивание на биологических рассеивателях.

Для нашего метода принципиально важным является сам факт рассеяния звука в слое скачка, но теоретически наиболее просто рассмотреть рассеяние на микроструктуре звукового поля индуцированной флуктуациями температуры. Путь к этому подготовлен результатами предыдущих разделов.

Средняя фаза рассеянного мелкомасштабными анизотропными температурными неоднородностями звукового поля при наличии слоя скачка определяется формулой

$$<\varphi_m> = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arg\Gamma, \qquad (3.1)$$

и соотношениями (1.15), (1.16), (2.31) – (2.34). Подстановкой выражений (2.31) и (2.34) в (1.16) находим при обратном рассеянии, когда $z_< = z = -h$, $h>>\delta$, $r \to 0$:

$$j(0,0,-h,\bar{z}) = \frac{1}{4}\lim_{\vec{r}\to 0}\int\int\frac{A_1}{k_0^2 - Q^2}D^2(\vec{Q})F^2(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\overline{\sigma})\cdot e^{is(k_0,\vec{r},h,\bar{z},Q)}d^2\vec{Q}, \qquad (3.2)$$

где D – диаграмма направленности приёмо-излучающей антенны,

$$\sigma = \frac{e^{m\overline{z}}}{1+e^{m\overline{z}}}\ , \tag{3.3}$$

$$S\left(k_0, \vec{r}, h, \overline{z}, \vec{Q}\right) = 2\left(k_0^2 - Q^2\right)^{1/2}\left[\left(\overline{z}+h\right) - m^{-1}\ell\left(\overline{z}\right)\right] + 2m^{-1}\left(k_1^2 - Q^2\right)^{1/2}\ell\left(\overline{z}\right) + \vec{Q}\vec{r}. \tag{3.4}$$

При выводе (3.2) учтено, что при $h >> \delta$, $e^{-mh} \to 0$, $\sigma(-h) \approx 0$, а $F\left(1-\alpha, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, 0\right) \cong 1$.

Положить в фазовой функции (3.4) сразу $\vec{r} = 0$ нельзя, поскольку это не позволит правильно определить стационарные точки и лучи, дающие наибольший вклад в интеграл (3.2), если его вычислять методом стационарной фазы.

Введем переменную $\vec{\zeta} = k_0^{-1}\vec{Q}$ и перейдем в интеграле (3.2) к полярным координатам ζ, ϑ, тогда:

$$j\left(0,0,-h,\overline{z}\right) = \frac{1}{4}\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} d\zeta \frac{\zeta}{1-\zeta^2} D^2\left(k_0\zeta\right) {*} F^2\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \overline{\sigma}\right) e^{ik_0 f\left(r,h,\overline{z},\zeta\right)}, \tag{3.5}$$

где

$$\vec{\zeta} = \left(\zeta\cos\vartheta, \zeta\sin\vartheta\right),$$

$$f\left(r,h,\overline{z},\zeta,\vartheta\right) = 2\left(1-\zeta^2\right)^{1/2}\left[\left(\overline{z}+h\right) - m^{-1}\ell\left(\overline{z}\right)\right] + 2m^{-1}\left(n_1^2-\zeta^2\right)^{1/2}\ell\left(\overline{z}\right) + \zeta r\cos\vartheta\ , \tag{3.6}$$

$$n = \frac{k_1}{k_0} = \frac{c_0}{c_1}\ . \tag{3.7}$$

Теперь легко оценить интеграл (3.5) двумерным методом стационарной фазы.

Если $k_0\left(\overline{z}+h\right) >> 1$, то:

$$j\left(0,0,-h,\overline{z}\right) = -i\frac{\pi A_1 D_0^2}{4k_0}\frac{F^2\left(\alpha_0, \gamma_0-\beta_0, \gamma_0, \overline{\sigma}\right)}{\overline{z}+h+c_0^{-1}\Delta c m^{-1}\ell\left(\overline{z}\right)}\times$$
$$\times\exp\left\{2ik_0\left[\left(\overline{z}+h\right)+\left(n_1-1\right)m^{-1}\ell\left(\overline{z}\right)\right]\right\}\ , \tag{3.8}$$

где D_0 - значение диаграммы направленности в вертикальном направлении,

$$\alpha_0 = \tfrac{1}{2} + d_2 + im^{-1}\left(k_0 - k_1\right) + id_1 \ , \tag{3.9}$$

$$\beta_0 = \tfrac{1}{2} + d_2 + im^{-1}\left(k_0 + k_1\right) + id_1 \ , \tag{3.10}$$

$$\gamma_0 = 1 + 2im^{-1}k_0 \ , \tag{3.11}$$

$$\Delta c = c_1 - c_0 \ . \tag{3.12}$$

На основании выражений (1.15), (3.8), вводя переменную $H = \overline{z} + h$, находим:

$$\Gamma\left(k_0, 0, 0, -h, H\right) = -\frac{1}{8}\pi^2 A_1^2 D_0^4 k_0^2 \rho_v \int\limits_{H-L}^{H+L} n^4\left(H\right) < \mu^2\left(H\right) > \times$$

$$\times F^4\left(\alpha_0, \gamma_0 - \beta_0, \gamma_0, \sigma\left(H-h\right)\right)\left(H + c_0^{-1}\Delta c m^{-1}\ell\left(H-h\right)\right)^{-2} \times \tag{3.13}$$

$$\times \exp\left\{4ik_0\left[H + \left(n_1 - 1\right)m^{-1}\ell\left(H-h\right)\right]\right\} dH \ ,$$

где L – толщина эффективно рассеивающего объёма,

$$n^2 = 1 - N_1\sigma - 4N_2\sigma\left(1-\sigma\right) , \tag{3.14}$$

$$\sigma = \sigma\left(H-h\right) = \frac{e^{m\left(H-h\right)}}{1 + e^{m\left(H-h\right)}} \ , \tag{3.15}$$

$<\mu^2(H)>$ - дисперсия относительных флуктуаций скорости звука на глубине H под источником звука.

$$\ell\left(H-h\right) = \ell n\left(1 + e^{m\left(H-h\right)}\right) \ . \tag{3.16}$$

Известно [6], что $< \mu^2\left(H\right) > = < \mu_0^2 > e^{-\frac{3H}{B_0}}$, где B_0=1000 м. При $L << \frac{1}{3}B_0$ изменением $<\mu^2(H)>$ в пределах рассеивающего объёма можно пренебречь и вынести этот множитель за знак интеграла.

Гипергеометрическую комплексную функцию F представим в показательной форме:

$$F = \left|F\right| e^{i\varphi_F} \ . \tag{3.17}$$

Тогда выражение (3.13) принимает вид:

$$\Gamma\left(k_0,0,0,-h,H\right)=-\frac{1}{8}\pi^2 A_1^2 D_0^4 k_0^2 \rho_v < \mu^2\left(H\right) > \times$$

$$\times\int_{H-L}^{H+L} E\left(k_0,h,H\right)\exp\left\{4ik_0\left[H+S\left(k_0,h,H\right)\right]\right\}dH \ , \tag{3.18}$$

где

$$E\left(k_0,h,H\right)=\frac{n^4\left(H\right)\left|F\left(\alpha_0,\gamma_0-\beta_0,\gamma_0,\sigma\left(H-h\right)\right)\right|^4}{\left(H+c_0^{-1}\Delta c m^{-1}\ell\left(H-h\right)\right)^2} \ , \tag{3.19}$$

$$S\left(k_0,h,H\right)=\left(n_1-1\right)m^{-1}\ell\left(H-h\right)+k_0^{-1}\varphi_F\left(k_0,h,H\right). \tag{3.20}$$

Интеграл в формуле (3.18) для высоких частот, когда $k_0L>>1$, что и будем предполагать в дальнейшем, легко оценить последовательным интегрированием по частям [5]:

$$\int_{H-L}^{H+L} E\left(k_0,h,H\right)\exp\left\{4ik_0\left[H+S\left(k_0,h,H\right)\right]\right\}dH=$$

$$=\left(4ik_0\right)^{-1}e^{4ik_0H}\left[\frac{E\left(k_0,h,H+L\right)}{1+S'\left(k_0,h,H+L\right)}e^{4ik_0\left[S\left(k_0,h,H+L\right)+L\right]}-\right. \tag{3.21}$$

$$\left.-\frac{E\left(k_0,h,H-L\right)}{1+S'\left(k_0,h,H-L\right)}e^{4ik_0\left[S\left(k_0,h,H-L\right)-L\right]}\right]+O\left(\frac{1}{16k_0^2}\right),$$

где $S'=\dfrac{dS}{dH}$.

Амплитудные множители:

$$A\left(k_0,h,H\pm L\right)=\frac{E\left(k_0,h,H\pm L\right)}{1+S'\left(k_0,h,H\pm L\right)} \tag{3.22}$$

и фазовые функции:

$$S\left(k_0,h,H\pm L\right)=\left(n_1-1\right)m^{-1}\ell\left(H\pm L-h\right)+k_0^{-1}\varphi_F\left(k_0,h,H\pm L\right) \tag{3.23}$$

испытывают изменения в области скачка. Полагая толщину L рассеивающего импульсного объёма V значительно меньше толщины ТК δ, ограничимся в (3.22) двумя членами разложения в ряды по L, а в (3.23) - тремя.

$$A(k_0,h,H\pm L)\cong A(k_0,h,H)\pm A'(k_0,h,H)L\,, \tag{3.24}$$

$$S(k_0,h,H\pm L)\cong S(k_0,h,H)\pm S'(k_0,h,H)L+\frac{1}{2}S''(k_0,h,H)L^2\,. \tag{3.25}$$

Учитывая соотношения (3.21), (3.22), (3.24), (3.25), легко преобразовать (3.18) к виду:

$$\begin{gathered}\Gamma(k_0,0,0,-h,H)=\frac{\pi^2A_1^2D_0^4k_0\rho_v}{16}<\mu^2(H)>\{iA'(k_0,h,H)L\times\\ \times\cos\left[4k_0\left(1+S'(k_0,h,H)L\right)\right]-A(k_0,h,H)\sin\left[4k_0\left(1+S'(k_0,h,H)L\right)\right]\}\times\\ \times\exp\left[4ik_0\left(H+S(k_0,h,H)+\frac{1}{2}S''(k_0,h,H)L^2\right)\right].\end{gathered} \tag{3.26}$$

Поэтому для средней фазы обратно рассеянного на тепловой микроструктуре монохроматического звукового сигнала из (3.26) и (3.1) следует формула:

$$\begin{gathered}<\varphi_m>=\frac{\pi}{2}+2k_0\left[H+S(k_0,h,H)+\frac{1}{2}S''(k_0,h,H)L^2\right]-\\ -\frac{1}{2}\arg tg\left\{\frac{A'(k_0,h,H)}{A(k_0,h,H)}L\,ctg\left[4k_0\left(1+S'(k_0,h,H)L\right)\right]\right\}\,,\end{gathered} \tag{3.27}$$

которая и положена авторами в основу экспериментального метода определения глубины залегания слоя скачка и его толщины.

В устройстве ФУРС находится разность средних фаз реверберационных сигналов, отстоящих во времени на $\tau_3 \ll c_0^{-1}L$.

Поэтому:

$$\Delta\varphi=<\varphi_m(H+c_0\tau_3)>-<\varphi_m(H)>\cong\frac{d<\varphi_m(H)>}{dH}c_0\tau_3\,. \tag{3.28}$$

Дифференцируя выражение (3.27) и пренебрегая несущественными членами, не содержащими множитель k_0, окончательно получим:

$$\left(2k_0c_0\tau_3\right)^{-1}\Delta\varphi = 1 + S'\left(k_0,h,H\right) + \frac{1}{2}S'''\left(k_0,h,H\right)L^2 +$$
$$+\frac{2\aleph\left(k_0,h,H\right)S''\left(k_0,h,H\right)L^2}{1+\aleph^2\left(k_0,h,H\right)L^2-\left(1-\aleph^2\left(k_0,h,H\right)L^2\right)\cos\left[8k_0\left(1+S'\left(k_0,h,H\right)L\right)\right]}, \tag{3.29}$$

где

$$\aleph\left(k_0,h,H\right) = \frac{A'\left(k_0,h,H\right)}{A\left(k_0,h,H\right)}. \tag{3.30}$$

Все функции в формуле (3.29) существенно меняются только в области скачка. Поэтому можно ожидать, что значительные изменения $\Delta\varphi$ будут происходить при приходе реверберационных сигналов из района ТК.

Для проверки этого обстоятельства и определения чувствительности метода необходимо было провести численный эксперимент. Его проведение потребовало разработки методики представления гипергеометрической функции F в показательной форме (3.17). Оказалось, что очень удобно исходить непосредственно из интегральных представлений [11] гипергеометрической функции и при больших значениях мнимых частей её параметров воспользоваться асимптотическими представлениями гамма-функций, а для вычисления интегралов применить метод перевала. Так, например, в случае $\alpha = \frac{1}{2} + i\alpha_2$, $\beta = \frac{1}{2} + i\beta_2$, $\gamma = 1 + i\gamma_2$, где $\alpha_2 >> 1$, $/\beta_2/ >> 1$, $\gamma_2 - \beta_2 >> 1$, который нам встретился при численном моделировании $\Delta\varphi$ по формуле (3.29), получено следующее асимптотическое представление гипергеометрической функции:

$$F\left(\tfrac{1}{2}+i\alpha_2, \tfrac{1}{2}+i\beta_2, 1+i\gamma_2, \sigma\right) = A_F\left(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\sigma\right)e^{i\varphi_F\left(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\sigma\right)}, \tag{3.31}$$

где

$$A_F\left(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\sigma\right) = \left[\frac{\gamma_2\left(\eta-\sigma\right)\left(\eta-1\right)}{\left(\gamma_2-\beta_2\right)\left(\eta-\sigma\right)^2-\alpha_2\sigma\left(\eta-1\right)^2}\right]^{1/2}, \tag{3.32}$$

$$\eta = \frac{\gamma_2+\left(\beta_2-\alpha_2\right)\sigma}{2\beta_2} + \left[\left(\frac{\gamma_2+\left(\beta_2-\gamma_2\right)\sigma}{2\beta_2}\right)^2 - \frac{\gamma_2-\alpha_2}{\beta}\sigma\right]^{1/2} Sgn\beta, \tag{3.33}$$

$$\varphi_F\left(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\sigma\right)=\alpha_2\ell n\frac{\eta}{\eta-\sigma}-\beta_2\ell n\left[\frac{\beta_2}{\gamma_2-\beta_2}\left(\eta-1\right)\right]+\gamma_2\ell n\left[\frac{\eta-1}{\eta}\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\beta_2}\right]. \qquad (3.34)$$

В заключение этого раздела дадим оценку «дрожания» средней фазы реверберационного сигнала, вызванного распространением через крупномасштабные случайные неоднородности океанической среды. Это явление, описываемое двумя последними членами в формуле (1.17), является своеобразной помехой, от которой, при необходимости, нужно избавляться путем фильтрации сигнала.

Правда, характер «дрожания» несколько меняется, если рассеяние звука происходит в области скачка.

Возможно, что это позволит в будущем получать дополнительную информацию о скачке температуры.

Обозначая два последних члена выражения (1.17) как $\delta\tilde{\varphi}$, будем иметь:

$$\left|\delta\tilde{\varphi}_1\right|\le\frac{2\left(2\pi\right)^{1/2}}{\left|\Gamma\right|^{1/2}}\left(\left|U\right|+\left|\frac{W}{\Gamma}\right|\right). \qquad (3.35)$$

Оценку правой части неравенства (3.35) проведем для случая в среднем однородной среды, т.е. в отсутствии скачка непосредственно из выражений (3.26), (3.22), (3.19) для этого случая следует:

$$\left|\Gamma\right|\sim\frac{\pi^2A_1^2D_0^4k_0\rho_v}{16H^2}<\mu^2\left(H\right)>\sim k_0\rho_v<\mu^2\left(H\right)>\frac{A_1^2}{H^2}. \qquad (3.36)$$

Аналогичные оценки $|U|$ и $|W|$ можно получить путем, который привел к формуле (3.26), или соображений размерности из вида выражений (3.39), (3.40).

Первое приближение, известное при описании полного поля P как приближение плавных возмущений Рытова, имеет вид:

$$\Psi_1=2P_1^{-1}\int G_0k^2\mu P_1d^3\vec{R}'. \qquad (3.37)$$

Найдем $<\Psi>$, применяя к P_1^{-1} представление Фейнмана, превратим (3.37) в произведение двух гауссовых функционалов, статистическое среднее которого легко вычисляется методом, развитым в работе [6].

Результат имеет вид:

$$<\Psi>=i^{-1}\left[2\pi/\Gamma\left(\vec{R}\right)\right]^{1/2}\left[U\left(\vec{R}\right)-W\left(\vec{R}\right)\Gamma^{-1}\left(\vec{R}\right)\right], \qquad (3.38)$$

где

$$U\left(\vec{R}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \vartheta\left(\vec{R},\vec{R}_1\right)P_0^{-1}\left(\vec{R}_1\right)\vartheta\left(\vec{R}_1,\vec{R}_2\right)B\left(\vec{R}_1,\vec{R}_2\right)d^3\vec{R}_1 d^3\vec{R}_2\ , \qquad (3.39)$$

$$W\left(\vec{R}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \vartheta\left(\vec{R},\vec{R}_1\right)P_0^{-1}\left(\vec{R}_1\right)\vartheta\left(\vec{R}_1,\vec{R}_2\right)\vartheta\left(\vec{R}_1,\vec{R}_3\right)\times$$
$$\times B\left(\vec{R}_1,\vec{R}_3\right)\vartheta\left(\vec{R}_2,\vec{R}_4\right)B\left(\vec{R}_2,\vec{R}_4\right)d^3\vec{R}_1 d^3\vec{R}_2 d^3\vec{R}_3 d^3\vec{R}_4\ . \qquad (3.40)$$

Подынтегральная функция ϑ, включающая в себя функцию источника P_0, порождает множитель A_1H^{-1}, в противном случае - единицу.

Корреляционная функция B порождает множитель $k_0\rho_v<\mu^2(H)>$. На основании этого правила, подтвержденного непосредственным расчетом, легко усмотреть, что:

$$\left|U\right|\sim k_0\rho_v<\mu^2\left(H\right)>\frac{A_1}{H}\ , \qquad (3.41)$$

$$\left|W\right|\sim k_0^2\rho_v^2<\mu^2\left(H\right)>^2\frac{A_1^3}{H^3}, \qquad (3.42)$$

Подстановка выражений (3.41) и (3.42) в правую часть (3.35) приводит к оценке:

$$\left|\delta\tilde{\varphi}_1\right|\sim\left[k_0\rho_v<\mu^2\left(H\right)>\right]^{1/2}. \qquad (3.43)$$

Формула (3.43) наводит на мысль об использовании явления «дрожания» фазы с целью экспериментального изучения закона затухания флуктуаций скорости звука с глубиной.

Так, для k_0~10^3 м$^{-1}$, ρ_v~10^{-1} м, что характерно для микроструктуры температурного поля слоя скачка, и $<\mu_0^2>$~10^{-4} у поверхности, получим $\left|\delta\tilde{\varphi}\right|\sim 10^{-3}$, что является пренебрежимо малой величиной.

Развитая в данном материале теория рассеяния звука в слоистом океане с многомасштабными случайными неоднородностями позволила вскрыть физические закономерности поведения средней фазы рассеянного звукового поля. Оказалось, что наряду с изменениями, вызванными слоистостью среды, имеет место «дрожание» средней фазы, индуцированное крупномасштабными неоднородностями.

При рассеянии звука в квазиоднородных слоях это «дрожание» очень мало.

Предлагаемый способ обнаружения слоя скачка температуры по сравнению фаз двух реверберационных сигналов, один из которых задержан на время, не превышающее времени прохождения термоклина звуковым импульсом, позволяет получить наглядную картину слоя и определить глубину его залегания и его границы с достаточной для практики точностью.

Наиболее выгодно вести приём реверберационных сигналов с вертикального направления, но обнаружение ТК данным методом возможно и по наклонным направлениям гидролокатором бокового обзора. Это, по-видимому, позволит наряду с определением толщины и глубины залегания ТК определять его протяженность.

Исследовать возможности метода для этой цели не входило в задачу авторов, хотя изложенная выше теория позволяет это сделать.

Полученные результаты являются новыми и представляют собой теоретическую базу для разработки специализированных гидроакустических средств разведки термоклина. Эти же устройства могут применяться для визуального наблюдения глубинных течений.

Литература

1. Голод О.С., Гончар А.И., Шлычек Л.И. Рассеянное звуковое поле в слоистой среде с многомасштабными случайными неоднородностями» // Гидроакустический журнал (Проблемы, методы и средства исследований Мирового океана): Сб. науч. тр. – Запорожье: НТЦ ПАС НАН Украины. – 2004. - №1. - С. 44-48
2. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. – Л.: Наука, 1982.– 228 с., ил.
3. Алувэлья Д.С., Келлер Дж. Б. Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане. – В кн. Распространение волн и подводная акустика. Пер. с англ./ Под ред. Л.М. Бреховских. – М.: Мир, 1980, с. 20 –75.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Изд. 2-е доп. и перераб. – М.: Наука, 1973. - 343 с., ил.
5. Федорюк М.В. Метод перевала. - М.: Наука, 1977. - 368 с., ил.
6. Дашен Р., Захариасен Ф., Манк У. и др. Распространение звука во флуктуирующем океане// Пер. с англ./ Под ред. С. Флатте. – М.: Мир, 1982. – 336 с., ил.
7. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1980. – 336 с., ил.
8. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.Н. Случайные поля. - М.: Наука, 1978. - 464 с., ил.
9. Голод О.С., Григорьева Н.С. Оценка влияния течения на поле давления монохроматического точечного источника в однородном океане. – Акуст. ж., 1982, т. 28, № 6. - С. 758 – 762.
10. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Изд. 4-е.-М.: Наука, 1966. – 444 с., ил.
11. Бетмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Пер. с англ. – М.: Наука, 1965. - 296 с., ил.
12. Андреева И.Б. Рассеяние звука в океанических звукорассеивающих слоях. – В кн.: Акустика океана. – М.: Наука, 1977, ч.7. - С. 491-588.