УДК 622.831: 624.131 (043.3)

Д.Л. Васильев, канд. техн. наук, научн. сотр.
(ИГТМ НАН Украины)

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА РАСЧЁТА ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Аннотация. В основе метода расчёта положено дифференциальное уравнение предельного состояния с учётом внутреннего и контактного трения. В качестве закономерности распределения нормальных и касательных контактных напряжений использовано решение Л. Прандтля. Дано совершенствование метода расчёта предела прочности образца горных пород при одноосном сжатии с учётом постоянных интегрирования горизонтальных напряжений при x = 0. Достоверность расчётного предела прочности по сравнению с экспериментальными данными повысилась на 7-8 %.

Ключевые слова: контактные напряжения, сжатие образцов, предел прочности, горная порода

D.L. Vasilyev, Ph. D. (Tech.), Researcher
(IGTM NAS of Ukraine)

THE IMPROVED METHOD OF CALCULATION OF THE ULTIMATE STRENGTH OF ROCKS UNDER AXIAL COMPRESSION

Abstract. The calculation method is based on differential equation of limit state with taking into account internal and external contact friction. Prandtl solution is applied as the law of distribution of normal and tangential contact stresses. The improvement method of calculating the ultimate strength of rock samples under uniaxial compression at constant integration of horizontal stresses at x = 0 is given. The accuracy of the calculated ultimate strength compared with the experimental data increased by 7-8 %.

Keywords: contact stresses, samples compression, ultimate strength, rock

Одним из основных параметров, который входит в формулы расчёта напряжённо-деформированного состояния массивов горных пород и разрушения их исполнительными органами горных машин, является предел прочности. Этот предел определяется экспериментально на специальных прессах.

Но эти прессы требуют высококвалифицированного обслуживания и находятся в НИИ, вдали от горных предприятий, которым и как раз нужна оперативная информация о свойствах горных пород. Поэтому существует необходимость в разработке аналитического метода расчёта предела прочности при наличии показателей свойств горных пород (предела сопротивления сдвигу k_n, коэффициентов внутреннего μ и контактного f трения), определяемых более простыми способами, доступными для лабораторий предприятий.

Известно, что при раздавливании образцов горных пород образуется пять форм разрушения: усечённо-клиновая, клиновая, диагональная, продольная, взрывоподобная. При раздавливании пород средней крепости образуется усечённо-клиновая, наиболее простая из известных. Усечено-клиновая форма разрушения образцов горных пород характеризуется отсутствием пересечения линий скольжения вертикальной линии симметрии (рис. 1).

Касательные напряжения, направления которых совпадают с положительными направлениями координатных осей считаем положительными при условии, что направление сжимающего нормального напряжения совпадает с положительным направлением координатной оси (или если растягивающее напряжение направлено по отрицательному направлению координатной оси).

Образец в процессе деформирования принимает выпуклую форму, поэтому принимаем, что в угловых его областях соблюдается правило парности касательных напряжений.

Ранее в работе [1] автором проведена корректировка применительно к горным породам метода расчёта напряжений Л. Прандтля, при котором решение обеспечивается при постоянном контактном касательном напряжении. В результате решения двух дифференциальных уравнений и одного алгебраического для плоской задачи получена система расчётных уравнений

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{2\tau_к}{h}x + \dfrac{2\left(k_n + \mu\sigma_y\right)}{\cos\rho}\left(\sin\rho - \sqrt{1-b^2}\right) + C; & (1) \\ \sigma_y = \dfrac{2\tau_к}{h}\cdot x + C; & (2) \\ \tau_{xy} = \tau_к\left(1 - \dfrac{2y}{h}\right), & (3) \end{cases}$$

где y – ордината;

h – высота образца.

Л. Прандтль пришёл к выводу, что на горизонтальной линии симметрии τ_{xy} равно нулю. Поэтому последнее выражение (3) написано из предположения, что затухание касательного напряжения вдоль продольной оси происходит по линейному закону, продольное нормальное напряжение σ_y является линейной функцией x и не зависит от y, касательное напряжение τ_{xy} не зависит от x, а зависит от y, горизонтальное напряжение σ_x зависит от x и y, а параметр

$$b = \frac{\tau_{xy}}{k_n + \mu\sigma_y},$$

где k_n – предел прочности материала сдвигу;

μ – коэффициент внутреннего трения.

В дальнейших разработках методов расчёта [2, 3] автором не использовалось значение постоянной C из предположения, что на свободной боковой поверхности отсутствуют напряжения. Полученные из расчётов значения предела прочности всегда были заниженными по сравнению с экспериментальными данными.

С использованием предложения А.Д. Томленова [4] по совершенствованию метода Л. Прандтля представляется возможным повысить достоверность расчёта предела прочности горных пород.

По А.Д. Томленову постоянная C в угловой точке a (рис. 1) определяется из условия, что способ

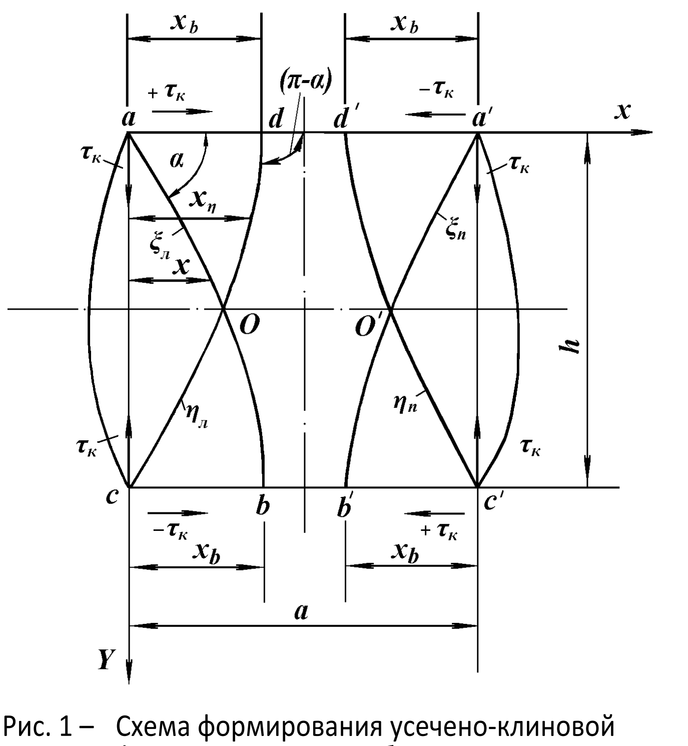


Рис. 1 – Схема формирования усечено-клиновой формы разрушения образца приложения сил не влияет на распределение напряжений в сечениях, достаточно удалённых от места их приложения. Это условие является распространением принципа Сен-Венана, применяемого в теории упругости на напряжённое состояние. Тогда в сечении $x = 0$, свободном от нагрузки,

$$\int_0^{h/2} \sigma_x \cdot d_y = 0\,. \tag{4}$$

Подставляя значение σ_x из (1) в выражение (4) при $x = 0$, после интегрирования находим

$$C = \frac{1}{2}k_n \arcsin\left(\frac{\tau_к\left(1-\dfrac{2y}{h}\right)}{k_n + \mu\sigma_y}\right). \tag{5}$$

Для упрощения записи введём обозначение

$$d = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\tau_к\left(1-\dfrac{2y}{h}\right)}{k_n + \mu\sigma_y}\right). \tag{6}$$

Теперь определим нормальные напряжения на линиях скольжения (ЛС) ξ и η (рис. 1).

Для этого используем дифференциальное уравнение [5] на ЛС

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \mp 2\left(k_n + \mu\sigma_\alpha\right), \tag{7}$$

где минус относится к ЛС ξ, плюс – к ЛС η.

Из решения этого уравнения получено для ЛС

$$\frac{k_n + \mu\sigma_{\alpha_a}}{k_{b(c)} + \mu\sigma_{\alpha_b}} = e^{\mp 2\mu\alpha_{ba(cd)}}, \tag{8}$$

где k_n – предел прочности сдвигу в точке a (d);

σ_{α_a} и σ_{α_b} нормальное напряжение на ЛС ξ в точках a и b, для ЛС η – в точках d и c;

$k_{b(c)}$ – текущее значение эффективного касательного напряжения в точке b (c);

α_{ba} – угол поворота ЛС ξ между точками b и a, для ЛС η – между точками d и c.

Нормальное напряжение на ЛС в общем виде определяется по формуле [5]

$$\sigma_\alpha = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\cdot\cos^2\rho - k\cdot\cos\rho\cdot\sin\rho\,. \tag{9}$$

Теперь необходимо определить для точки a сумму нормальных напряжений, используя выражения (1) и (2) при $x = 0$

$$\frac{\sigma_x + C}{2} = \frac{\left(k_n + \mu C\right)\left(\sin\rho + \sqrt{1-b_a^2}\right)}{\cos\rho} + C\,. \tag{10}$$

Тогда нормальное напряжение σ_α согласно формуле (9) будет

$$\sigma_\alpha = \left(\frac{\left(k_n + \mu C\right)\left(\sin\rho + \sqrt{1-b_a^2}\right)}{\cos\rho} + C\right)\cos^2\rho - k_n\cdot\sin\rho\cdot\cos\rho\,. \tag{11}$$

Выражение активного касательного напряжения [5] с учётом уравнения (11) для зависимости (8) в точке *a* будет иметь вид

$$\tau_{\alpha_a} = \left(k_n + \mu C\right)\left(1 + \sin\rho\sqrt{1 - b_a^2}\right). \tag{12}$$

Аналогично определим активные эффективные касательные напряжения в точке *b*

$$\tau_{\alpha_b} = \left(k_b + \mu C\right)\left(1 - \sin\rho\sqrt{1 - b_b{}^2}\right) + \mu\sigma_y\left(1 - \sin\rho\sqrt{1 - b_b{}^2}\right). \tag{13}$$

Из решения уравнения (8) с использованием выражений (12) и (13) на ЛС ξ и ЛС η имеем

$$\sigma_{y_{\xi(\eta)}} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{k_n\left(1 + \mu d\right)\left(1 + \sin\rho\sqrt{1 - b_{\xi(\eta)}^2}\right)\cdot\exp\left(\mp 2\mu\alpha_{ba(dc)}\right)}{1 - \sin\rho\sqrt{1 - b_{b(c)}^2}} - k_b\left(1 + \mu d\right)\right). \tag{14}$$

Угол поворота $\alpha_{ba(dc)}$ определяется из разности углов поворота $\alpha_{b(d)}$-$\alpha_{a(c)}$, которые с учётом [5] сводятся к разности углов поворота ЛС от контактного трения $|b_{b(c)}|$-$|b_{a(d)}|$. Учитывая, что при определении угла $b_{a(d)}$ мы имеем при нем отрицательный знак, угол $\alpha_{ba(dc)}$ формуле (13) записывается в виде суммы ($b_{b(c)}$+ $b_{a(d)}$). Угол $b_{a(d)}$ определяется по формуле

$$\beta_{a(d)} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b_{a(d)}\cos\rho}{\sin\rho - \sqrt{1 - b_{a(d)}^2}},$$

а угол

$$\beta_{b(c)} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b_{b(c)}\cos\rho}{\sin\rho - \sqrt{1 - b_{b(c)}^2}}.$$

Далее определяем параметр $k_{b(c)}$ из условия решения задачи в направлении от точки *b* (*c*) в точку *a* (*d*):

$$k_{\ b(c)} = \frac{\left(k_n\left(1 + \mu d\right) + \mu\sigma_{y_{\xi(\eta)}}\right)\left(1 - \sin\rho\sqrt{1 - b_{\xi(\eta)}^2}\right)}{\left(\left(1 + \mu d\right)\left(1 + \sin\rho\sqrt{1 - b_{b(c)}^2}\right)\exp\left(\mp 4\mu\beta_{b(c)}\right)\right)}. \tag{15}$$

Теперь необходимо определить параметры $b_{a(d)}$ и $b_{b(c)}$, которые в общем виде равны

$$b_{a(d)} = \pm\frac{\tau_{xy}\left(1 - \frac{2Y}{h}\right)}{k_n + \mu\sigma_y}, \tag{16}$$

$$b_{b(c)} = \mp\frac{\tau_{xy}}{k_{b(c)} + \mu\sigma_y}. \tag{17}$$

Угол наклона ЛС ξ и ЛС η определяются соответственно по формулам

$$\alpha_\xi = \frac{\pi}{4} + \rho/2 - \beta_\xi; \qquad \alpha_\eta = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 + \beta_\xi.$$

Верхние знаки в формулах (13)-(15) относятся к ЛС ξ, нижние к ЛС η.

Из условия Л. Прандтля контактное касательное напряжение принимается постоянным. Значение его рекомендовано принимать по закону Кулона-Амонтона равным $f\sigma_{y_0}$ [6], где f коэффициент контактного трения, σ_{y_0} – максимальное нормальное напряжение в угловой точке a (d) в момент разрушения.

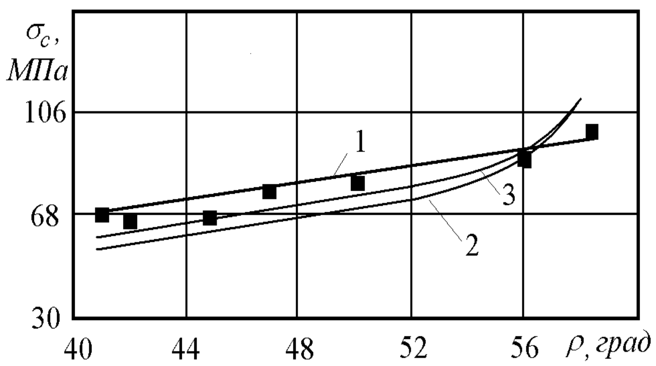
Теперь по закону Л. Прандтля распределение нормального напряжения изменяется по линейному закону (рис. 2). Тогда текущее значение нормальных напряжений

$$\sigma_y = \sigma_{y_0}\left(1+\frac{2fx}{h}\right). \tag{18}$$

Из этого уравнения может быть определено значение среднего давления на контактной поверхности при разрушении образца – предел прочности

$$p=\frac{2}{a}\int_0^{a/2}\sigma_{y_0}\left(1+\frac{2f\cdot x}{h}\right)dx=\sigma_{y_0}\left(1+\frac{0{,}5fa}{h}\right). \tag{19}$$

Оценку уровня достоверности расчётного предела прочности проводим по экспериментальным данным, позаимствованным из кадастра горных пород [7], пересчитанные под значения $k_n = 10$ МПа (рис. 2). Сравнение расчётных данных при проведённом усовершенствовании метода расчёта предела прочности свидетельствует о повышении достоверности по сравнению с экспериментальными данными на 7-8 %.



1 – экспериментальная; 2 – расчётная по [2], $f_m = 0{,}25$, $k_n = 10$ МПа; 3 – по формуле (19)

Рис. 2 – Зависимости предела прочности от угла внутреннего трения

Выводы

1. В основе метода расчёта положено дифференциальное уравнение предельного состояния с учётом внутреннего и контактного трения.

2. В качестве закономерности распределения нормальных и касательных контактных напряжений использовано решение Л. Прандтля.

3. Дано совершенствование метода расчёта предела прочности образца горных пород при одноосном сжатии с учётом постоянных интегрирования горизонтальных напряжений при $x = 0$. Достоверность расчётного предела прочности по сравнению с экспериментальными данными повысилась на 7-8 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, Д.Л. Метод расчета распределения нормальных контактных напряжений в образцах горных пород при постоянном значении контактного трения / Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2003. – Вып. 44. – С. 37-44.
2. Васильев, Д.Л. Расчет предела прочности образцов горных пород при их разрушении в виде усеченных пирамид / Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2003. – Вып. 47. – С. 91-98.
3. Васильев, Д.Л. Метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при постоянстве контактного касательного напряжения / Д.Л. Васильев // Зб. наук. пр. НГУ. – Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2009. – № 33, Т. 1. – С 111-117.
4. Томленов, А.Д. Теория пластического деформирования металлов / А.Д. Томленов. – М.: Металлургия, 1972. – 480 с.
5. Васильев, Л.М. Дифференциальное уравнение предельного состояния деформируемого твердого материала с учетом внутреннего и внешнего трения / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2003. – Вып. 41. – С.

145-152.
6. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, В.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
7. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. – М.: Недра, 1975. – 278 с.
8. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – Т. 1.

Об авторе

Васильев Дмитрий Леонидович, кандидат технических наук, научный сотрудник отдела Проблем разработки месторождений на больших глубинах, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), г. Днепропетровск, Украина

About the author

Vasilyev Dmitry Leonidovich, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Researcher in Department of Mineral Mining at Great Depth, N.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine

---

УДК 678.4.06: 621.81

В.И. Дырда, д-р техн. наук, профессор
(ИГТМ НАН Украины),
С.П. Сокол, ст. преподаватель, декан,
Е.В. Калганков, ст. преподаватель,
В.А. Колбасин, канд. техн. наук, доцент,
А.В. Толстенко, канд. техн. наук, доцент
(ДГАУ)

РАСЧЁТ ДОЛГОВЕЧНОСТИ УПРУГО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Аннотация. Рассматривается расчёт долговечности упруго-наследственных сред с использованием наиболее важных критериев разрушения.

Ключевые слова: диссипация, энтропия, долговечность, повреждённость, критерий разрушения

V.I. Dyrda, D. Sc. (Tech.), Professor
(IGTM NASU),
S.P. Sokol, Senior Teacher, Dean,
Ye.V. Kalgankov, Senior Teacher,
V.A. Kolbasin, Ph. D. (Tech.), Associate Professor,
A.V. Tolstenko, Ph. D. (Tech.), Associate Professor
(DSAU)

CALCULATION OF DURABILITY OF ELASTIC-HEREDITARY ENVIRONMENT AT A LONG CYCLIC LOADING

Abstract. Calculation of durability of elastic-hereditary environment is observed using the most important criteria of destruction.

Keywords: dissipation, entropy, durability, damage, fracture criterion

К упруго-наследственным средам [1], т.е. к таким средам, для расчёта которых классическая теория упругости не всегда приемлема вследствие наличия в них значительной части вязкой составляющей, памяти о предыдущих воздействиях и нестабильности механических свойств во времени (эффекты старения), относятся многие конструкционные материалы и, прежде всего, эластомеры (резины, полиуретаны). Принцип Больцмана – Вольтерра в определённой степени позволяет преодолеть эти разногласия, о чем свидетельствует создание теории вязкоупру-