

УДК 532.536

Авраменко А.А., Тыринов А.И., Домашев В.Е.

Институт технической теплофизики НАН Украины

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСКАЛЬЗЫВАЮЩЕГО ПОТОКА В КРИВОЛИНЕЙНОМ ТЕЧЕНИИ ТЕЙЛОРА-КУЭТТА

Досліджено нестійкість течії Тейлора-Куэтта із проковзуванням у криволінійному каналі, сформованому двома концентричними циліндричними поверхнями. Використано метод кінцевих різниць для чисельного знаходження критичних значень чисел Тейлора, які визначають критерії відцентрової нестійкості для потоку. Отримано залежності критичних значень від відношення між радіусами ввігнутих і опуклих стінок і від коефіцієнта проковзування.

Исследована неустойчивость течения Тейлора-Куэтта с проскальзыванием в криволинейном канале, сформированном двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями. Использован метод конечных разностей для численного нахождения критических значений чисел Тейлора, которые определяют критерии центробежной неустойчивости для потока. Исследованы зависимости критических значений от отношения между радиусами вогнутых и выпуклых стенок и от коэффициента проскальзывания.

Instability of slipping Taylor-Kuetta flow in the curvilinear channel generated by two con-centric cylindrical surfaces is studied. The finite difference method for a numerical calculation of critical values of Taylor numbers, which define criteria of centrifugal instability, is used. Dependences for critical values of Taylor numbers from the relation between radiuses of the concave and convex walls and from slipping factor are obtained.

h – ширина промежутка между цилиндрическими поверхностями;

L – длина свободного пробега;

\tilde{p} – давление;

$p_0(r)$ – давление невозмущенного потока;

p_A – безразмерная амплитуда давления;

R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней цилиндрических поверхностей, соответственно;

Re – число Рейнольдса;

\tilde{r} , $\tilde{\varphi}$ и \tilde{z} – радиальные, азимутальные, и осевые цилиндрические координаты, соответственно;

t – безразмерное время;

\tilde{t} – время;

Ta – число Тейлора;

$u_0(r)$ – безразмерная азимутальная скорость;

u_A , v_A , w_A – безразмерные амплитуды возмущения азимутальных, радиальных и осевых;

\tilde{v} , \tilde{u} , \tilde{w} – скоростные компоненты для \tilde{r} , $\tilde{\varphi}$ и \tilde{z} , соответственно;

$\tilde{\beta}$ – безразмерный фактор усиления;

β – фактор усиления скоростей;

ζ – коэффициент вязкостного проскальзывания;

γ – безразмерное волновое число;

$\tilde{\gamma}$ – волновое число;

ν – кинематическая вязкость;

ρ – плотность жидкости.

Введение

Развитие различных микрожидкостных устройств за несколько последних десятилетий продиктовало увеличение интереса к микро-масштабным потокам. Производственные процессы были направлены на создание устройств с характерными размерами порядка 10^{-6} м.

Для реализации процессов перемешивания, эмульгирования и гомогенизации различных гетерогенных систем широко применяются роторно-пульсационные аппараты (РПА) ци-

линдрического типа, разработанные в Институте технической теплофизики НАН Украины. Принцип работы аппаратов – это принцип ДИВЭ (дискретно – импульсного ввода энергии), разработанный академиком НАН Украины А.А. Долинским [1]. Он основан на создании в потоке жидкости высоких градиентов скорости, ускорения и пульсаций давления, приводящих к разрушению межфазных поверхностей дисперсных включений. Указанные эффекты достигаются за счет конструктивных особенно-

стей аппаратов роторного типа, рабочими органами которых являются коаксиальные перфорированные цилиндры с зазорами между ними. Часть цилиндров (статоры) жестко закреплена, а другая часть (роторы), расположенная между статорами, вращается с высокой угловой скоростью. Межцилиндровые зазоры являются областями наиболее эффективного гидродинамического воздействия на среду. Гидродинамические процессы этих устройств подвержены влиянию центробежных сил, что может привести к центробежной неустойчивости, приводящей к появлению продольных вихрей.

Трудность исследования микромасштабного массопереноса состоит в том, что применение законов, традиционно используемых в теплопередаче и гидродинамике макроустройств, не описывает истинное поведение микропотока. Характер микропереноса в них зависит не столько от эффектов разреженности, являющихся результатом сокращения плотности, а скорее от уменьшения масштабов размеров, связанных с областью течения [2].

В настоящей работе проведено исследование центробежной неустойчивости в микропотоках между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями (рис. 1). Внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью ω , внешний цилиндр неподвижен. При

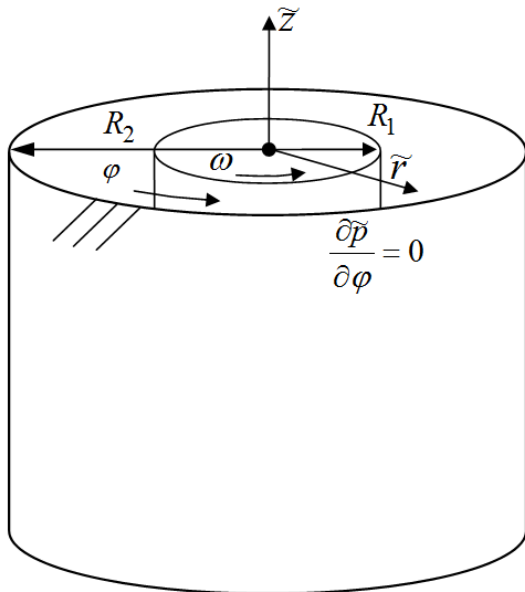


Рис. 1. Исследуемая область.

этом отсутствует азимутальный градиент давления.

Теоретический подход базируется на уравнениях Навье-Стокса с граничным условием проскальзывания. Цель данной работы – получение критериев неустойчивости для течения Тейлора-Куэтта как функции коэффициента проскальзывания и отношения между радиусами вогнутых и выпуклых стенок.

Математическая модель и решение для невозмущенного потока

Течение в канале, показанном на рис. 1, описывается следующими уравнениями в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\varphi}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\varphi}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{r}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\rho \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\varphi}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\varphi}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\varphi}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (4)$$

Где \tilde{r} , $\tilde{\varphi}$ и \tilde{z} – радиальные, азимутальные, и осевые цилиндрические координаты, соответственно; \tilde{v} , \tilde{u} и \tilde{w} – скоростные компоненты для \tilde{r} , $\tilde{\varphi}$ и \tilde{z} , соответственно; \tilde{p} – давление; \tilde{t} – время; ν – кинематическая вязкость и ρ – плотность жидкости.

Для потока в микроканале граничное условие проскальзывания на стенке определяется следующим уравнением [3]

$$\tilde{u} = \zeta L \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \right) \Big|_{\text{wall}}, \quad (5)$$

где ζ – коэффициент вязкостного проскальзывания и L – длина свободного пробега. Современ

менная теория коэффициента вязкостного проскальзывания может быть найдена в [4].

Чтобы исследовать неустойчивость потока, необходим профиль скорости невозмущенного течения. Этот профиль получен из азимутальной проекции уравнения импульса (3). Так как поток независим от азимутальной координаты φ , все инерционные члены равны нулю. Учитывая, что поток гидродинамически развит, профиль скорости также независим от осевой координаты \tilde{z} . Тогда уравнение невозмущенного потока в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{du}{d\xi} - \frac{u}{\xi^2} = 0, \quad (6)$$

где безразмерные параметры определены следующим образом:

$$u = \frac{\tilde{u}}{U_m}, \quad \xi = \frac{\tilde{r}}{R_2} = \eta + (1 - \eta) \left(r + \frac{1}{2} \right),$$

$$\eta = \frac{R_1}{R_2}, \quad r = \frac{\tilde{r} - (R_1 + R_2)/2}{h}. \quad (7)$$

В уравнении (7), для течения Тейлора-Куэтта (рис. 1), U_m определен как скорость на внутренней цилиндрической поверхности:

$$U_m = \omega R_1. \quad (8)$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутренних и внешних цилиндрических поверхностей, соответственно; и $h = R_2 - R_1$ является шириной промежутка между цилиндрическими поверхностями.

Уравнение (5) – это однородное уравнение. Для этого случая уравнение (6) должно быть решено при следующих граничных условиях:

$$u = 1 + \sigma \left(\frac{du}{d\xi} - \frac{u}{\eta} \right) \text{ при } \xi = \eta, \quad (9)$$

$$u = -\sigma \left(\frac{du}{d\xi} - u \right) \text{ при } \xi = 1,$$

которые являются результатом условия потока с проскальзыванием, описываемого уравнением (5). В уравнениях (9) $\sigma = \zeta L / R_2$.

Уравнение (6) имеет симметрию растяжения, которая описывается следующей подал-

геброй

$$q = \xi(\partial/\partial\xi), \quad (10)$$

которая генерирует следующую замену

$$\xi = \exp(\xi^*). \quad (11)$$

Эта замена преобразует (6) в уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого имеет следующий вид:

$$u = \frac{\eta^2}{r} \frac{1 + r^2(2\sigma - 1)}{\eta + 2\sigma + \eta^3(2\sigma - 1)}. \quad (12)$$

Для граничных условий без проскальзывания распределение скоростей на стенках цилиндров, полученное из (12), сводится к известному распределению скоростей [5]:

$$u = \frac{\eta}{r} \frac{1 - r^2}{1 - \eta^2}. \quad (13)$$

Анализ неустойчивости

Центростремительная неустойчивость исследована на основе метода малых (линейных) возмущений. В соответствии с этим методом суммарные скорости представим в форме

$$u = u_0(r) + u_A(r) \cdot \cos(\gamma z) \cdot \exp[\beta t], \quad (14)$$

$$v = v_A(r) \cdot \cos(\gamma z) \cdot \exp[\beta t], \quad (15)$$

$$w = w_A(r) \cdot \sin(\gamma z) \cdot \exp[\beta t], \quad (16)$$

$$p = p_0(r) + p_A(r) \cdot \cos(\gamma z) \cdot \exp[\beta t], \quad (17)$$

где $u_0(r)$ и $p_0(r)$ безразмерная азимутальная скорость и давление невозмущенного потока, соответственно; u_A , v_A и w_A – безразмерные амплитуды возмущения азимутальных, радиальных и осевых скоростей, соответственно; и p_A – безразмерная амплитуда давления. Дополнительные безразмерные параметры в уравнениях (14) – (17) определены следующим образом:

$$\gamma = \tilde{\gamma}/h, \quad \beta = \tilde{\beta} h^2/\nu, \quad t = \tilde{t}\nu/h^2 \quad (18)$$

где γ – безразмерное волновое число, $\tilde{\gamma}$ – волновое число, $\tilde{\beta}$ – безразмерный фактор усиления, β – фактор усиления, и t – безразмерное время.

Так как в настоящем исследовании β зада-

ется действительным числом, данная модель позволяет найти только критерий монотонной неустойчивости. Это стандартное предположение для анализа неустойчивости потока в криволинейном канале, сформированном двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями [5...8]. В [5] также указано, что результаты эксперимента не приводят доказательства колебательного движения, а скорее указывают на существование новых стационарных вихревых ячеек (вихри Тейлора), что подтверждает предположение о монотонности неустойчивости.

Подставляя (14) – (17) в уравнения (1) – (4), линеаризируя и исключая амплитуды w_A и p_A , а также положив $\beta = 0$, что соответствует нейтральной кривой стабильности, получим следующие уравнения для азимутальных и радиальных амплитуд:

$$(DD^* - \gamma^2) \cdot u_A = D^* U v_{AR}, \quad (19)$$

$$(DD^* - \gamma^2)^2 \cdot v_{AR} = 2\gamma^2 A U u_A, \quad (20)$$

где

$$D = d/dr, \quad D^* = D + (1 - \eta)/\xi, \quad (21)$$

$$v_{AR} = \text{Re} \cdot v_A, \quad (22)$$

$$A = \text{Ta}^2 \eta. \quad (23)$$

Здесь

$$\text{Ta} = \frac{U_m h}{\nu} \sqrt{\frac{h}{R_1}}, \quad \text{Re} = \frac{U_m h}{\nu}, \quad (24)$$

числа Тейлора, и Рейнольдса, соответственно.

Критерий гидродинамической неустойчивости, который приводит к развитию вторичных вихрей, получен, решая задачу на собственные значения для уравнений (19) и (20) с граничными условиями (1) на стенках цилиндров. Результатом решения задачи на собственное значение является следующая зависимость:

$$\text{Ta} = \text{Ta}(\gamma, \eta, \sigma). \quad (25)$$

Тогда критерий неустойчивости задан следующим уравнением:

$$\text{Ta}_{cr} = \min_{\gamma} \{ \text{Ta}(\gamma, \eta, \sigma) \}. \quad (26)$$

В уравнении (26) минимум взят относительно γ при постоянных значениях η и σ .

Численное решение и анализ полученных результатов

Исследования уравнений (19) и (20) на собственные значения проводились, основываясь на их конечно-разностном представлении [9]. Производные в уравнениях аппроксимировались центральными разностями, имеющими второй порядок точности. В результате была получена система алгебраических линейных уравнений, нетривиальное решение которой существует при условии равенства нулю детерминанта матрицы коэффициентов полученной системы. Параметрами уравнений являются величины γ , η , σ . Задавая численные значения всех параметров, кроме одного, неизвестный параметр находим как собственное значение.

Сначала были выполнены проверочные расчёты для проверки численного метода. Проверочные вычисления выполнены для $\sigma = 0$, что соответствует граничным условиям без проскальзывания:

$$u_A = v_{AR} = Du_A = 0 \quad \text{при} \quad r = \pm 1/2. \quad (27)$$

Тестовые значения критических чисел Тейлора Ta_{cr} и соответствующих волновых чисел представлены в табл. 1.

Получено хорошее совпадение между результатами вычислений и данными [5]. Таблица 1 показывает, что несовпадение с результатами [5] не превышает 0,4 %.

Табл. 1

η	Результаты вычислений		Данные из [5]	
	γ_{cr}	Ta_{cr}	γ_{cr}	Ta_{cr}
1,0	3,127	41,1886	3,12	41,18
0,95	3,127	42,43466	3,12	42,45
0,9	3,13	43,8724	3,13	43,88
0,7	3,141	52,038	3,14	52,04
0,5	3,162	6818627	3,16	68,18
0,3	3,217	111,8504	3,2	111,889
0,1	3,346	421,4778	3,3	422,79

Табл. 2 показывает влияние параметров η и σ на критические значения числа Тейлора, а также на критические волновые числа. Из таблицы 2 следует, что увеличение σ приводит к увеличению критических значений числа Тейлора. Это происходит из-за увеличения степени заполненности профиль невозмущенной скорости при росте значений параметра σ . Подобная тенденция неустойчивости потока на вогнутой стенке обнаружена в [10]. Кроме того, подобный эффект невозмущенного профиля скорости потока проявляется в уравнении Орра-Зоммерфельда. Влияние σ согласуется с результатами [11], где изучен переход в турбулентный режим для потока с проскальзыванием в параллельном плоском канале. В [11] установлено, что значение критического числа Рейнолдса растет при увеличении параметра σ , т.е. поток становится более устойчивым, когда σ увеличивается. Хотя неустойчивость течения Тейлора, изученная в этом разделе, не связана с переходом в турбулентный режим, а скорее связана с развитием продольных вихрей, есть определенные общие черты во влиянии формы профиля скорости на начало этой неустойчивости. Подобное влияние для параллельного плоского канала, заполненного макропористой средой, обнаружено в [12].

Нужно отметить, что для значений параметра σ , больше или равного 0,3, число Кнудсена лежит на границе между течением с проскальзыванием и переходным режимом; поэтому, точность анализа, основанного на уравнении

Навье-Стокса, несколько ухудшится для значений σ , превышающих 0,3. Для этих случаев может быть необходим дальнейший анализ, основанный на прямом моделировании Монте Карло или использовании уравнений Барнетта.

Зависимости критических чисел Тейлора от η при $\sigma > 0$ имеют минимум. Критическое число Тейлора имеет минимальное значение приблизительно при $\eta = 0,7$. Для случая граничных условий без проскальзывания ($\sigma = 0$) этот минимум не наблюдается. Существование минимума объясняется следующим образом: увеличение параметра η может интерпретироваться как уменьшение ширины криволинейного канала ($\eta = 1 - h/R_2$, где h – ширина канала), и при $\eta \rightarrow 1$ канал становится микроканалом. В этом случае затрудняется развитие гидродинамической неустойчивости. Это объясняет, почему система становится более устойчивой при $\eta \rightarrow 1$ и критические значения чисел Тейлора. При $\eta \rightarrow 0$ также увеличиваются критические значения числа Тейлора, что происходит при любых значениях σ (для граничных условий с проскальзыванием и без проскальзывания на стенках). Чтобы объяснить это, рассмотрим, например, зависимость Ta_{cr} от η . Значение Ta_{cr} связано со значением критического числа Рейнолдса следующим образом:

$$Ta_{cr}(\eta) = Re_{cr} \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}. \quad (28)$$

При $\eta \rightarrow 0$ значение Re_{cr} остается конечным, но $1/\eta \rightarrow \infty$, что объясняет увеличение Ta_{cr} при $\eta \rightarrow 0$.

Табл. 2

η	$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,3$		$\sigma = 0,5$		$\sigma = 0,7$		$\sigma = 0,9$	
	γ_{cr}	Ta_{cr}	γ_{cr}	Ta_{cr}	γ_{cr}	Ta_{cr}	γ_{cr}	Ta_{cr}	γ_{cr}	Ta_{cr}
0,999	5,38	1984,78	5,38	3891,9	5,38	5943,68	5,38	9078,45	-	-
0,9	3,93	85,352	3,31	144,40	2,82	216,16	3,15	329,52	1,41	911
0,7	3,14	74,83	3,13	121,44	3,11	181,06	3,12	278,68	3,12	557,56
0,5	3,15	94,71	3,15	154,55	3,14	236,63	3,15	374,35	3,14	768,98
0,3	3,17	165,80	3,2	296,72	3,19	483,85	3,19	803,63	3,17	1716,6
0,1	3,33	917,80	3,32	2186,7	3,31	4061,8	3,30	7298	3,30	16452

Выводы

Исследована гидродинамическая неустойчивость потока с проскальзыванием в криволинейном микроканале между двумя концентрическими цилиндрами, один из которых вращается (течение Тейлора-Куэтта). Получены невозмущенные профили скорости для потока с проскальзыванием. Проблема линейной неустойчивости решена численно, используя конечно-разностный метод. Граничные условия проскальзывания потока приводят к увеличению заполненности профиля скорости невозмущенного потока (профиль становится более плоским). Это, в свою очередь, приводит к увеличению критических значений числа Тейлора, характеризующего начало гидродинамической неустойчивости в этом случае. Также показано, что для $\sigma > 0$ зависимости критического числа Тейлора от параметра η имеют минимум, наблюдающийся при $\eta = 0,7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долинский А.А. Дискретно импульсный ввод энергии в теплотехнологиях. / А.А. Долинский, Б.И. Басок, С.И. Гулый, А.И. Накорчевский, Ю.А. Шурчкова. – К.: ИТТФ НАНУ. – 1996. – 208 с.
2. M. Calvert, J. Baker. Thermal conductivity and gaseous microscale transport, J. Thermophysics and Heat Transfer. – № 12 (1998). – P. 138 – 145.
3. L.M.G. Cumin, G.M. Kremer, F. Sharipov. The influence of slip and jump boundary conditions on the cylindrical Couette flow, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – № 12. – (2002). P. 445 – 459.
4. A. Agrawal and S.V. Prabhu. Deduction of slip coefficient in slip and transition regimes from existing cylindrical Couette flow data, Experimental Thermal and Fluid Science. – № 32 (2008). – P. 991 – 996.
5. J. Walowit, S. Tsao, R.C. DiPrima. Stability of flow between arbitrary spaced concentric cylindrical surfaces including the effect of a radial temperature, ASME J. Appl. Mech. – № 31 (1964). – P. 585 – 594.
6. W.R. Dean. Fluid motion in a curved channel, Proc. Roy. Soc. A. – № 122 (1928). – P. 402–420.
7. W.H. Reid. On the stability of viscous flow in a curved channel, Proc. Roy. Soc. A. – № 244 (1958). – P. 186 – 198.
8. G. Hämmerlin. Die Stabilität der Strömung in einem gekrümmten Kanal, Archives for Rational Mechanics and Analysis. – № 1 (1958). – P. 212 – 224.
9. Коллатц Л. Задачи на собственные значения М.: Физматгиз, 1968. – 504 с.
10. R. Kobayashi. Stability of laminar boundary layer on a concave permeable wall with homogeneous suction, Report Inst. High Speed Mech. – № 27 (1973). – P. 31 – 47.
11. E. Lauga, C. Cossu. A note on the stability of slip channel flows, Phys. Fluids. – № 17 (2005). – article 088106.
12. A.A. Avramenko, A.V. Kuznetsov, D.A. Nield. Instability of slip-flow in a channel occupied by a hyper-porous medium, Journal of Porous Media. – № 10 (2007). – P. 435 – 442.

Получено 03.02.2012 г.