УДК 536.25

Фиалко Н.М., Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Юрчук В.Л., Блинов Д.Г., Сариогло А.Г.

Институт технической теплофизики НАН Украины

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОЛИАРГУМЕНТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Розглянуто можливість застосування методів поліаргументних систем для вирішення нелінійних задач тепломасопероносу. Виконано зіставлення результатів рішення модельної задачі для рівняння Бюргерса методами поліаргументних систем і Гальоркіна. Показана ефективність і перспективність застосування запропонованого підходу також у випадку нелінійних задач тепломасопереносу.

Рассмотрена возможность применения методов полиаргументных систем для решения нелинейных задач тепломассопереноса. Выполнено сопоставление результатов решения модельной задачи для уравнения Бюргерса методами полиаргументных систем и Галеркина. Показана эффективность и перспективность применения предлагаемого подхода также и в случае нелинейных задач тепломассопереноса.

The approach of non-linear heat- and mass-transfer problems solving, on the base of the method of polyargumental systems is considered. The results comparison for solution of a model problem by the methods of polyargumental systems and Galerkin for the Burgers equation is made. The high efficiency and availability of proposed approach application in the case of non-linear heat- and mass-transfer problem is shown.

f – свободный («источниковый») член в уравнении;
u – искомая функция;
N – число членов в форме представления решения;
Re – параметр, аналог числа Рейнольдса;
x, y – координаты;
X, Y – аргументные функции;
МПС – метод полиаргументных систем;
ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение.

Индексы нижние:

i, j, p – индексы;
0 – левый, начальный;
1 – правый.

Решение проблемы повышения эффективности теплотехнического оборудования приводит к необходимости математического моделирования сложных нелинейных многомерных процессов тепломассопереноса. Разработке новых и совершенствованию существующих подходов к исследованию таких процессов посвящен целый ряд работ. К данному направлению относятся и работы [1–4], касающиеся развития специального класса методов – методов полиаргументных систем (МПС) и их практическому использованию для исследования процессов переноса различной физической природы.

Данный класс методов можно рассматривать как дальнейшее развитие и совершенствование классических проекционных методов в плане устранения в последних их основного, принципиального недостатка – априорности введения при построении решения базисных и прочих функций. Устранение данной априорности, реализуемое в МПС, приводит к существенному увеличению их эффективности в сравнении с другими методами, в которых используется в той или иной форме априорный базис и другие априорные функции. Данное обстоятельство широко освещается в ряде работ (например [1–4]), где исследуются процессы кондуктивного и конвективного теплопереноса, напряженно-деформированного состояния тел и др. При этом показано, что быстрота сходимости МПС в сравнении с известными классическими методами в относительно сложных ситуациях для указанных классов задач может отличаться на несколько порядков.

В данной работе освещается возможность и эффективность применения МПС для более сложных нелинейных процессов тепломассопереноса. В качестве модельного уравнения для описания таких процессов, а также для уравнений пограничного слоя, «параболизованных» и полных уравнений Навье-Стокса, уравнений нелинейной акустики, физики плазмы и др. используется, как известно, уравнение Бюргерса [5–8]. Рассмотрим следующую постановку задачи для этого уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y),\; x_0\le x\le x_1,$$

$$y_0\le y\le y_1; \tag{1}$$

$$u\big|_{x=x_0}=u_0(y); \tag{2}$$

$$u\big|_{y=y_0}=u\big|_{y=y_1}=0. \tag{3}$$

Традиционно представим искомое решение в виде

$$u(x,y)=\sum_{1\le i\le N}X_i(x)Y_i(y). \tag{4}$$

Здесь $X_i(x)$ и $Y_i(y)$ – подлежащие определению функции одного аргумента, аргументные функции. Подчеркнем, что в отличие от проекционных методов, где одна из систем функций $\{X_i\}$ или $\{Y_i\}$ является заданной (базис), а определению подлежит другая, в МПС как $\{X_i\}$, так и $\{Y_i\}$ неизвестны и подлежат определению в ходе решения так называемой полиаргументной системы, получаемой специальным образом из исходной постановки при помощи процедуры редукции. Указанная процедура заключается в следующем. В соответствии с общей методикой МПС [1–3], подставим (4) в (1) – (3), домножим обе части уравнения (1) и начального условия (2) на весовые функции $W_p^x(y)$, p = 1,…, N, в качестве которых используем неизвестные пока функции $Y_p(y)$ и проинтегрируем каждое уравнение образованной системы по y. Полученную систему (5, a) можно рассматривать как задачу Коши для системы ОДУ относительно функций $X_i(x)$, при условии, что коэффициенты A_x и F_x известны:

$$\begin{cases}\sum\limits_{1\le i\le N}A_{ip}^{x1}X_i'+\sum\limits_{1\le i\le N}\sum\limits_{1\le j\le N}A_{ijp}^{xx}X_iX_j=\sum\limits_{1\le i\le N}A_{ip}^{x}X_i+F_p^x,\\ \sum\limits_{1\le i\le N}A_{ip}^{xL}X_i(x_0)=F_p^{xL},\; p=1,\ldots,N.\end{cases} \tag{5, a}$$

Здесь $A_{ip}^{x1}=\int\limits_{y_0}^{y_1}Y_iY_pdy$, $A_{ijp}^{xx}=\int\limits_{y_0}^{y_1}Y_iY_j'Y_pdy$, $A_{ip}^{x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{y_0}^{y_1}Y_i''Y_pdy$,

$F_p^x=\int\limits_{y_0}^{y_1}fY_pdy$, $A_{ip}^{xL}=\int\limits_{y_0}^{y_1}Y_iY_pdy$, $F_p^{xL}=\int\limits_{y_0}^{y_1}u_0Y_pdy$. Аналогично, домножив, после подстановки (4), обе части уравнения (1) и граничных условий (3) на весовые функции $W_p^y(x)=X_p(x)$, p = 1,…, N, и проинтегрировав каждое уравнение образованной системы по x, получим систему (5, b), которая также является замкнутой при известных значениях коэффициентов A^y и F^y и представляет собой краевую задачу для системы ОДУ относительно функций $Y_i(y)$:

$$\begin{cases}\sum\limits_{1\le i\le N}A_{ip}^{y}Y_i+\sum\limits_{1\le i\le N}\sum\limits_{1\le j\le N}A_{ijp}^{yy1}Y_iY_j'=\sum\limits_{1\le i\le N}A_{ip}^{y2}Y_i''+F_p^y,\\ Y_p(y_0)=0,\\ Y_p(y_1)=0,\; p=1,\ldots,N.\end{cases} \tag{5, b}$$

Здесь $A_{ip}^{y}=\int\limits_{x_0}^{x_1}X_i'X_pdx$, $A_{ijp}^{yy1}=\int\limits_{x_0}^{x_1}X_iX_jX_pdx$,

$A_{ip}^{y2}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{x_0}^{x_1}X_iX_pdx$, $F_p^y=\int\limits_{x_0}^{x_1}fX_pdx$. Обе полученные системы (5, a) и (5, b) вместе составляют полиаргументную систему одномерных задач (5). Т.о., редуцированной постановкой для исходной задачи (1) – (3) является полиаргументная система (5). Следует обратить внимание на то, что взаимосвязь одномерных задач (подсистем (5, a) и (5, b)) в полиаргументной системе (5) осуществляется через так называемые приведенные коэффициенты A и F. Действительно, коэффициенты A^x и F^x в одномерной задаче по x (5, a) определяются через неизвестные функции Y_i и их производные, а коэффициенты A^y и F^y в задаче по y (5, b) – через функции X_i и их производные. Ввиду отмеченной особенности представляется целесообразным использование для решения полиаргументной системы итерационного метода. Причем, в рамках итерационного процесса может быть реализована также линеаризация полиаргументной системы (5), что во многих случаях существенно упрощает процесс решения задачи в целом [3].

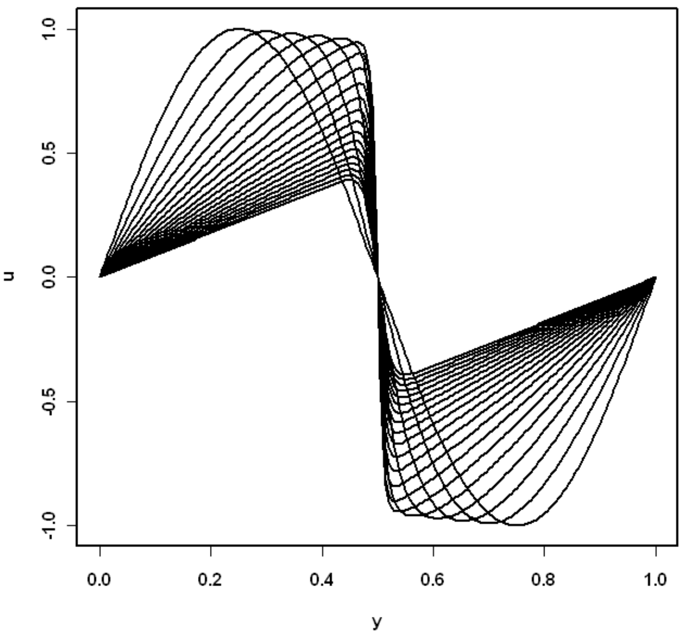
Перейдем к анализу полученных результатов. Решение задачи (1) – (3) с начальным распределением

$$u_0(y) = a_1 \sin\left(\pi \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right) + a_2 \sin\left(2\pi \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right),$$

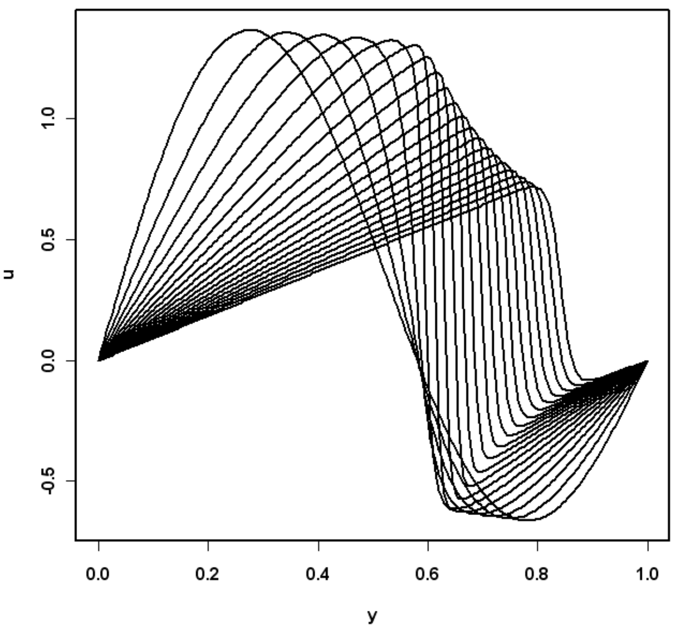
где a_1 и a_2 – параметры, с помощью МПС сопоставлено с решением ее же методом Галеркина, где в качестве базисных были выбраны функции, отвечающие собственным функциям соответствующей линейной задачи, т.е, в данном случае $\left\{\sin\left(i\pi \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right)\right\}$. Сопоставления проводились при варьировании коэффициентов a_1 и a_2 в достаточно широких пределах, соответствующих данным, приводимым в [5–7]. Характерные результаты решения представлены на рис. 1 – 3. На рис. 1 приведены характерные поля решений уравнения Бюргерса при различных начальных распределениях $u_0(y)$.

На рис. 2 представлены три первые аргументные функции из формы представления (4), найденные МПС. Как видно (рис. 2, б), функции $Y_i(y)$ далеки от собственных (базис по синусам), однако их характер достаточно хорошо отражает резкое изменение соответствующего поля при y = 0,5 (рис. 1, а). Этим и объясняется высокая сходимость МПС (по числу членов ряда (4)) в сравнении с методом Галеркина (рис. 3). Так, например, для решения при входном профиле a_1 = 1, a_2 = 0 и Re = 200 для достижения интегральной погрешности решения в 1 % методу Галеркина понадобилось 54 члена ряда, а МПС – всего лишь 4. Несколько меньшие отличия (соответственно 28 и 4) имеют место для решения при a_1 = 0, a_2 = 1 и Re = 200 (рис. 1, а).

Приведенные данные свидетельствуют, что величины погрешности решения задачи (рис. 3, а) и невязки уравнения (рис. 3, б) в случае использования МПС практически нечувствительны к варьированию параметра Re



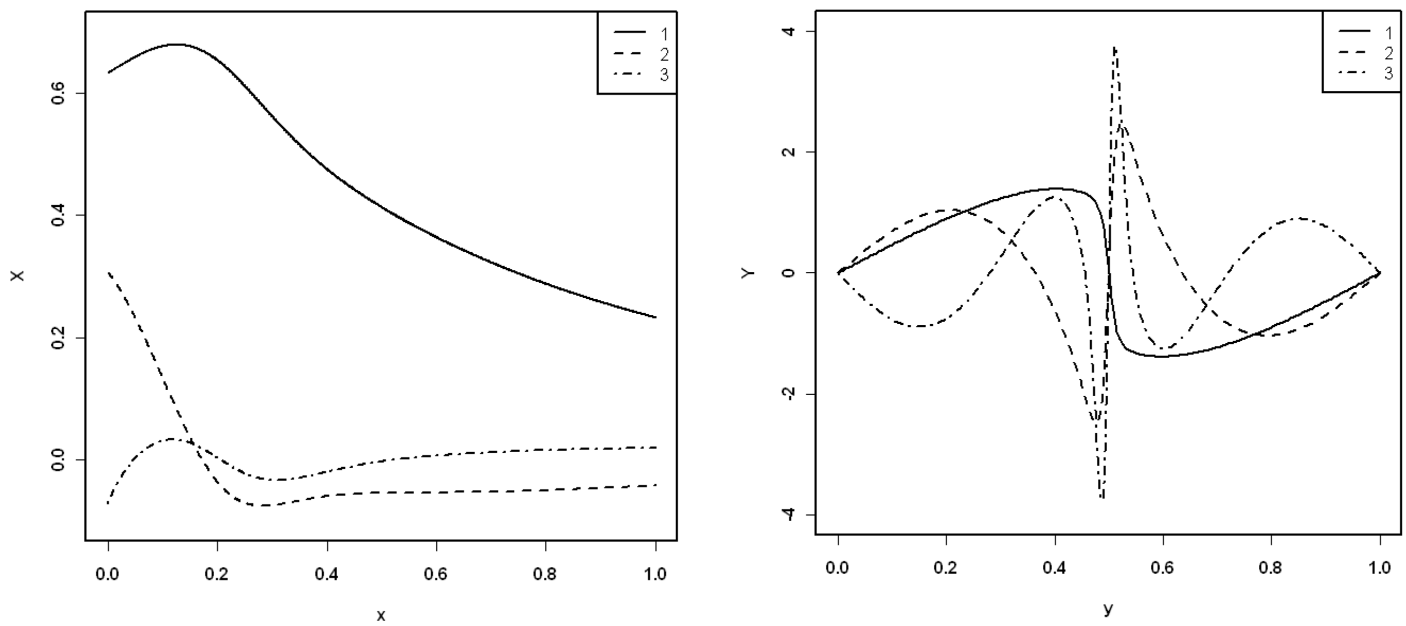
а)



б)

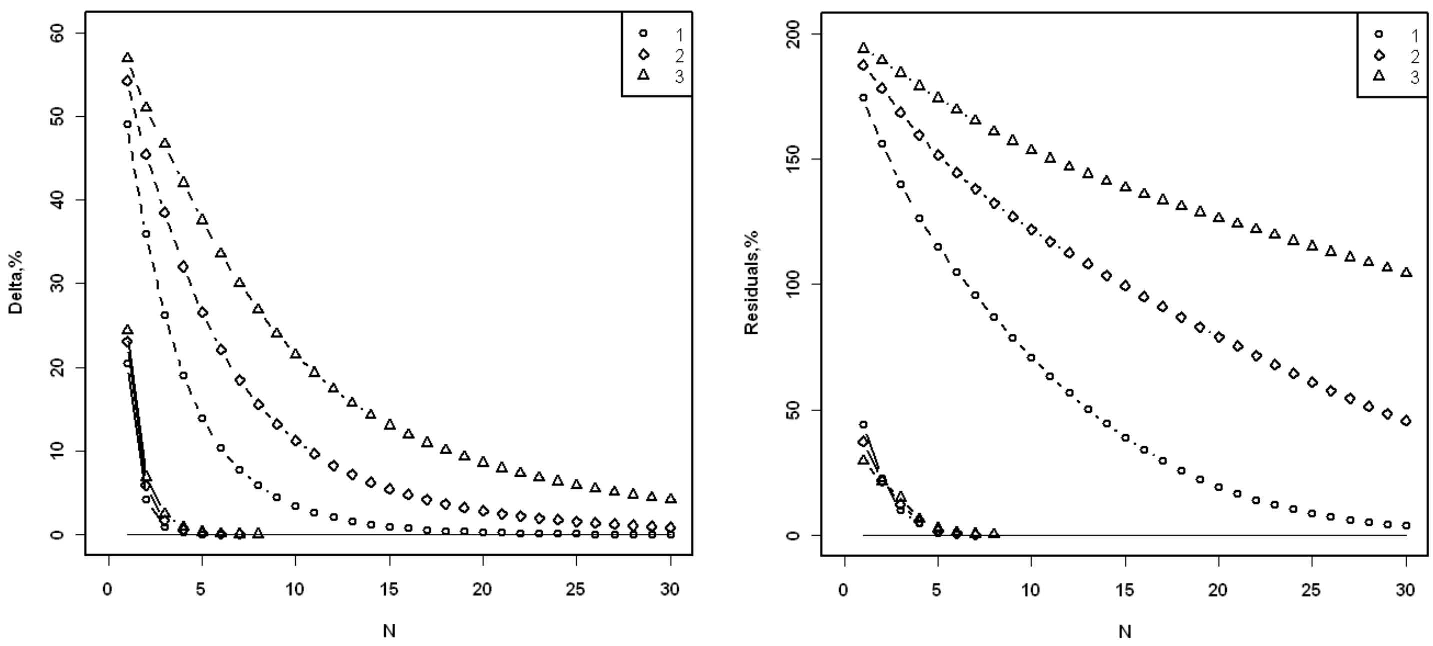
Рис. 1. Решение u(x, y) при Re = 200 и различных начальных распределениях: (а) a_1 = 0, a_2 = 1; (б) a_1 = 0,5, a_2 = 1.

(сплошные кривые на обоих рисунках сливаются). Напротив, эти же характеристики решения для метода Галеркина существенно зависят от величины Re и растут с его увеличением



а) ***б)***

Рис. 2. Аргументные функции $X_i(x)$ (а) и $Y_i(y)$ (б) при $i = 1$, 2 и 3 для $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $Re = 200$.



а) ***б)***

Рис. 3. Изменение интегральной погрешности решения (а) и интегральной невязки уравнения (б) по числу членов N при $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ методом Галеркина (- - -) и МПС (——) для различных значений Re: 1 – Re = 50, 2 – 100, 3 –200.

(пунктирные кривые на обоих рисунках расслаиваются). Это связано с тем, что в случае применения метода Галеркина компоненты базиса $\{X_i\}$ задаются априорно и остаются неизменными для разных значений параметра Re (базис по синусам). В методе же полиаргументных систем все компоненты решения (4) определяются индивидуально для каждой рассматриваемой задачи.

Выводы

Полученные данные свидетельствуют, что главная идея, лежащая в основе метода полиаргументных систем – отсутствие априорной информации в форме представления решения – определяет его высокую эффективность в плане быстроты сходимости как в случае решения линейных, так и нелинейных задач тепломассопереноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В*. Об одном новом методе математического исследования процессов переноса // Пром. теплотехника. – 1979. – Т. 1, № 2. – С. 33–41.

2. *Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Беспалова Е.И*. К созданию методов координатных решеток для решения многомерных задач механики сплошных сред // Проблемы прочности. – 1980. – № 7. – С. 93. – 97.

3. *Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В*. Применение методов полиаргументных систем для решения нелинейных многомерных задач теплопереноса // Известия ВУЗов, «Энергетика». – 1986. – № 3. – С. 84 – 89.

4. *Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Юрчук В.Л., Фиалко Н.М., Блинов Д.Г.* Решение уравнения Бюргерса с помощью метода полиаргументных систем // Матеріали міжн. наук. конф. "Математичні проблеми технічної механіки – 2010", 19 – 22 квітня 2010 р, Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ – 2010. – С. 37.

5. *Уизем Дж*. Линейные и нелинейные волны. М: Мир, 1977. – 621 с.

6. *Петровский С.В*. Точные решения уравнения Бюргерса с источником // Журнал технической физики. – 1999. – Т. 69, вып. 8. – С. 10–14.

7. *Пшеницына Н.А.* Численно-асимптотическое исследование задач нелинейной акустики. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук // М.: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – 2007. – 15 с.

8. *Журавлев В.М., Никитин А.В*. Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула–Хопфа // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5, № 9. – С. 603–611.

Получено 14.12.2011 г.