

7. Халатов А.А., Дашевский Ю.Я., Изгорова И.А. Новые вихревые технологии аэротермодинамики в энергетическом газотурбостроении. Ч. 2. Лопатки с поверхностно-вихревыми углублениями // Промышленная теплотехника.– Т. 30.– № 5.– 2008.– С. 16–22.

8. Халатов А.А. Новые вихревые технологии аэротермодинамики в энергетическом газотурбостроении. Ч. 3. Совершенствование термогазодинамических процессов // Пром. теплотехника.– Т. 30.– № 6.– 2008.– С. 5–19.

Получено 01.09.2011 г.

УДК 532.542.86(088.8)

Басок Б.И.<sup>1</sup>, Гоцуленко В.В.<sup>1</sup>, Гоцуленко В.Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт технической теплофизики НАН Украины

<sup>2</sup> Институт предпринимательства “Стратегия”

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЗОНДХАУСА

Розглянуто теплофізичну модель релаксаційних коливань Зондхауса в горизонтально розташованому резонаторі Гельмгольца. В основу теоретичного опису даних коливань покладено механізм теплового розширення газу при його ізохорному нагріванні в замкнутому об'ємі і подальшому ізобарному розширенні в трубці резонатора. Теоретично встановлено властивості коливань Зондхауса при зміні потужності теплового потоку і діаметра сферичного об'єму резонатора Гельмгольца.

Рассмотрена теплофизическая модель релаксационных колебаний Зондхауса в горизонтально расположенном резонаторе Гельмгольца. В основу теоретического описания данных колебаний положен механизм теплового расширения газа при его изохорном нагреве в замкнутом объеме и дальнейшем изобарном расширении в трубке резонатора. Теоретически установлены свойства колебаний Зондхауса при изменении мощности теплового потока и диаметра сферического объема резонатора Гельмгольца.

We consider the simplest model of relaxation Sondhauss oscillations in a horizontal Helmholtz resonator. The theoretical description of these fluctuations put the mechanism of thermal expansion of the gas at its isochoric heating in a closed volume and further isobaric expansion in the tube cavity. Theoretically, the properties are set when the Sondhauss oscillation of the heat flow and the diameter of the spherical volume of the Helmholtz resonator.

$G$  – массовый расход;

$S$  – площадь;

$V$  – объем;

$R$  – универсальная газовая постоянная;

$P$  – давление;

$h$  – потери давления;

$T$  – температура;

$t$  – время;

$w$  – скорость;

$\lambda$  – коэффициент гидравлических потерь;

$\rho$  – плотность газа.

#### Индексы верхние:

вых – на выходе из трубки резонатора Гельмгольца;

ш – сферический объем резонатора.

#### Индексы нижние:

0 – начальное значение;

тр – трубка резонатора Гельмгольца;

эл – электронагреватель;

н – наполнение объема резонатора;

кр – критическое значение;

ср – среднее значение.

### Введение

Известно, что колебания Зондхауса возбуждаются также как и автоколебания феномена Рийке потоком теплоты от источника постоянной мощности, которая в отличие от трубы Рийке, подается к закрытому концу трубы заполненной газом (закрытым должен быть, по крайней мере, один конец трубы, и расход газа через него должен быть равен нулю [1]). Полезное применение колебания Зондхауса нашли в магнито-гидродинамическом генераторе переменного тока [2], однако возможны и другие их применения [3].

В [4] отмечено, что колебаниям Рийке посвящено значительное количество исследований, тогда как более простым колебаниям Зондхауса уделялось очень мало внимания. В этой же работе рассмотрены генераторы колебаний Зондхауса и отмечено, что основным механизмом, вызывающим данные колебания, является простое тепловое расширение. Основываясь на результатах проведенных экспериментальных исследований обобщены условия возбуждения колебаний. Это позволило сделать вывод, что в отличие от феномена Рийке, колебания Зондхауса самостоятельно не возбуждаются в системе, даже если она неустойчивая. Для этого необходимы начальные возмущения [4]. Механизмы автоколебаний феномена Рийке обоснованы в работах [5, 6], а теоретическое описание автоколебаний в сосредоточенных и распределенных системах – соответственно в [7] и [8].

### Цель и задача исследования

Задачей этой работы является аналитическое определение колебаний Зондхауса и выявление их особенностей в простейшем генераторе, который использовался в экспериментах Зондхауса и Рэля [4], представляющим собой горизонтально расположенный резонатор Гельмгольца (рис. 1).

### Основная часть исследования

При изохорном нагреве воздуха в сферическом объеме осуществляется изобарное его расширение в горизонтальной трубке (рис. 1). Температура нагретого воздуха определяется из уравнения изобары

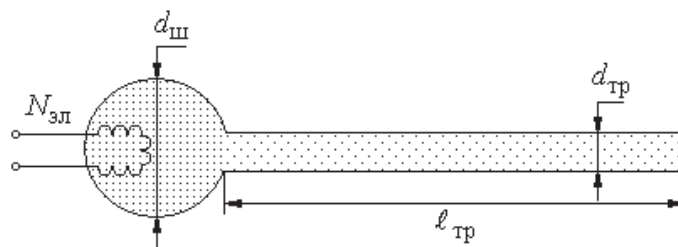


Рис. 1. Схема генератора колебаний Зондхауса.

$$T_1 = T_0 \left( 1 + \frac{V_{тр}}{V_{ш}} \right), \quad (1)$$

где  $T_0$  – начальная температура,  $T_1$  – температура нагретого воздуха,  $V_{ш}$  – объем шара,  $V_{тр}$  – объем горизонтальной трубки. Повышение температуры воздуха в сферическом объеме от значения  $T_0$  до  $T_1$ , осуществляется за время  $\tau_1$ , которое определим из уравнения теплового баланса

$$N_{эл} \tau_1 = m_0 c_v \Big|_{T_0}^{T_1} (T_1 - T_0), \quad (2)$$

где  $N_{эл}$  – мощность источника теплоты,  $m_0$  – масса воздуха в сферическом объеме при температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ .

При расширении воздуха в сферическом объеме его масса уменьшается на величину  $\Delta m_1$ , которая переместится в горизонтальную трубку

$$\Delta m_1 = \rho(P_{ср}, T_1) V_{тр}, \quad (3)$$

где  $P_{ср} = \frac{P_0 + P_0^{III}}{2}$ ,  $\rho(P_{ср}, T_1) = \frac{P_{ср}}{RT_1}$ ,  $P_0^{III} = P_0$ .

В момент времени  $\tau_1$  в сферическом объеме давление достигнет величины  $P_1^{III}$ , которая определится из уравнения состояния

$$P_1^{III} = \frac{m_1 RT_1}{V_{ш}}, \quad (4)$$

где  $m_1 = m_0 - \Delta m_1$ , при этом плотность в сферическом объеме  $\rho_1 = m_1 / V_{ш}$ . В течение времени  $\tau_1$  в горизонтальной трубке перемещается массовый расход воздуха  $G = \Delta m_1 / \tau$ , величина которого определяется из уравнения закона сохранения массы

$$G = \rho(P_{cp}, T_1) S_{tr} w_1, \quad (5)$$

откуда определяется скорость  $w_1$  движения воздуха в горизонтальной трубке. При этом гидравлические потери давления на входе в трубку определяются выражением

$$h_{tr}(w_1) = (1 + \xi_{bx}) \rho(P_{cp}, T_1) w_1^2 / 2, \quad (6)$$

где  $\xi_{bx} \approx 1/2$ . С помощью соотношения (6) можно определить давление в потоке воздуха на входе в горизонтальную трубку в момент времени  $\tau_1$

$$P_1^{вых} = P_1^{III} - h_{tr}(w_1). \quad (7)$$

Используя зависимости (1) – (7) определяются соответствующие величины параметров для каждого последующего  $i$ -го расширения, при котором воздух, заполняющий горизонтальную трубку, вытесняется более нагретым воздухом из сферического объема.

Таким образом, процесс расширения является дискретно последовательным. После  $i$ -го расширения в момент времени  $t_i = \sum_{j=1}^i \tau_j$  в сферическом объеме остается масса воздуха равная  $m_i = m_0 - \sum_{j=1}^i \Delta m_j$ . Покажем, что при этом давление в сферическом объеме является постоянным, т.е.  $P_i^{III} = P_0 \forall i \geq 1$ . Действительно, т.к.

$$P_i^{III} = \frac{m_i R T_i}{V_{III}} = \frac{R}{V_{III}} m_i T_i,$$

то для этого достаточно доказать постоянство произведения  $m_i T_i = \text{const} \forall i \geq 1$ . Для доказательства последнего воспользуемся методом математической индукции. База индукции: при  $i = 1$  получаем

$$\begin{aligned} m_1 T_1 &= [m_0 - \Delta m_1] T_0 \left(1 + \frac{V_{tr}}{V_{III}}\right) = \\ &= \left[ m_0 - \rho \left( \frac{P_0 + P_0^{III}}{2}, T_1 \right) V_{tr} \right] T_0 \left(1 + \frac{V_{tr}}{V_{III}}\right) = \\ &= [m_0 - \rho(P_0, T_1) V_{tr}] T_0 \left(1 + \frac{V_{tr}}{V_{III}}\right) = \end{aligned}$$

$$= \left[ m_0 - m_0 \frac{V_{tr}}{V_{III}} \frac{T_0}{T_1} \right] T_0 \left(1 + \frac{V_{tr}}{V_{III}}\right) = m_0 T_0.$$

Теперь согласно индуктивного перехода, предположим, что  $m_i T_i = m_0 T_0 \forall i = 1; k-1$  и докажем исходя из этого, что  $m_k T_k = m_0 T_0$  при  $i = k$ . Имеем,

$$\begin{aligned} m_k &= m_{k-1} - \Delta m_k, \quad \Delta m_k = \rho \left( \frac{P_0 + P_{k-1}^{III}}{2}, T_k \right) V_{tr} = \\ &= \frac{V_{tr}}{RT_k} \frac{P_0 + P_{k-1}^{III}}{2} = \frac{V_{tr}}{V_{III}} \frac{1}{2RT_k} (m_0 RT_0 + m_{k-1} RT_{k-1}). \end{aligned}$$

По предположению индукции  $m_0 T_0 = m_{k-1} T_{k-1}$  поэтому

$$\begin{aligned} \Delta m_k &= \frac{V_{tr}}{V_{III}} \frac{1}{2RT_k} (m_{k-1} RT_{k-1} + m_{k-1} RT_{k-1}) = \\ &= \frac{V_{tr}}{V_{III}} \left( m_{k-1} \frac{T_{k-1}}{T_k} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} m_k &= m_{k-1} - \Delta m_k = m_{k-1} \left[ 1 - \frac{V_{tr}}{V_{III}} \frac{T_{k-1}}{T_k} \right] = \\ &= m_{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{T_k}{T_{k-1}} - 1 \right) \frac{T_{k-1}}{T_k} \right] = m_{k-1} \frac{T_{k-1}}{T_k} \Rightarrow m_k T_k = m_{k-1} T_{k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно принципу математической индукции получаем, что  $\forall i \geq 1 P_i^{III} = m_0 T_0 R / V_{III} = P_0$ .

Найдем закон изменения во времени массы нагретого воздуха находящегося в сферическом объеме резонатора. Для этого заменим приближенно удельную теплоемкость  $c_v$  на каждом этапе расширения ее средней величиной  $c_{vcp}$ . Тогда из уравнения теплового баланса (2), записанного для  $i$ -го этапа расширения, получаем

$$\begin{aligned} N_{эл} \tau_i &\approx m_{i-1} c_{vcp} (T_i - T_{i-1}) = m_{i-1} T_{i-1} c_{vcp} \left( \frac{T_i}{T_{i-1}} - 1 \right) = \\ &= m_0 T_0 c_{vcp} \left( \frac{T_i}{T_{i-1}} - 1 \right) = c_{vcp} V_{tr} P_0 / R, \end{aligned}$$

откуда  $t_i = \sum_{j=1}^i \tau_j \approx \sigma i$ , где  $\sigma = V_{tr} c_{vcp} N_{эл}^{-1} P_0 R^{-1} = \text{const}$ .

Следовательно, для массы  $m^{III}(t_i)$  воздуха, находящегося в сферическом объеме резонатора в

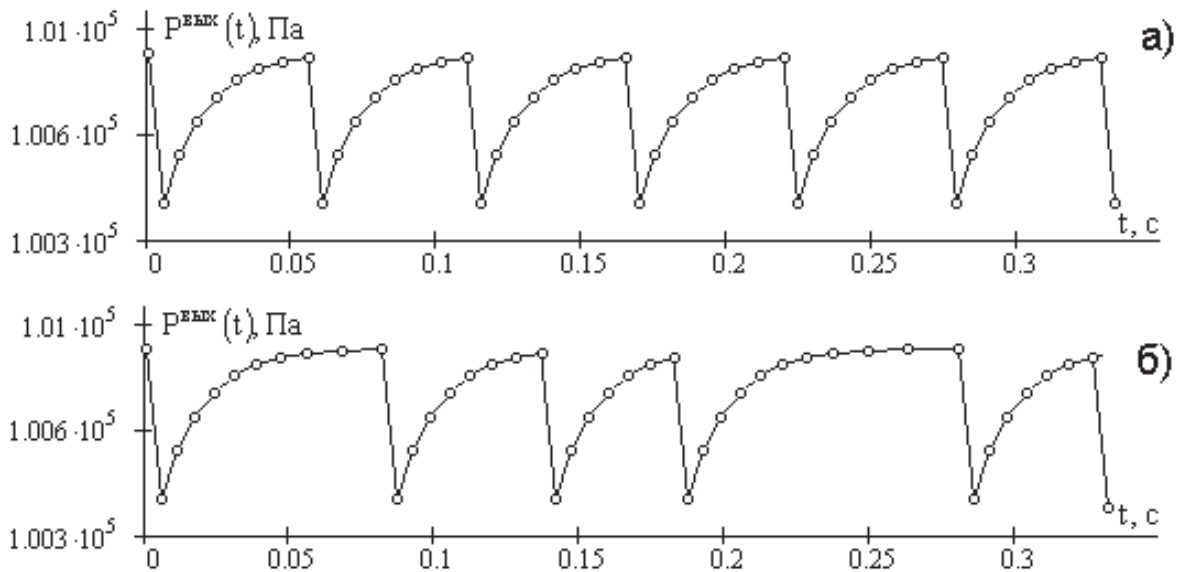


Рис. 2. Колебания Зондхауса в горизонтальном резонаторе Гельмгольца: а) периодические; б) хаотические.

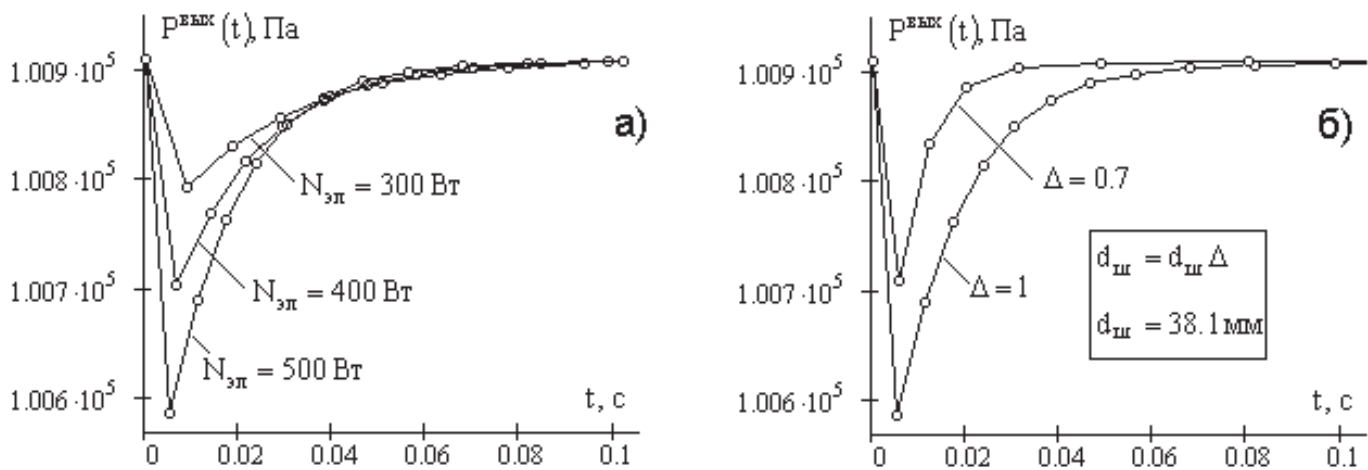


Рис. 3. Характер зависимости релаксационных колебаний Зондхауса от: а) мощности электроннагревателя; б) диаметра сферического объема резонатора.

момент времени  $t_i$ , получается следующее выражение

$$m^m(t_i) = m_i = m_{i-1} \frac{T_{i-1}}{T_i} = m_0 \prod_{j=1}^i \frac{T_{j-1}}{T_j} = m_0 \left( 1 + \frac{V_{TP}}{V_{ш}} \right)^{-i} = m_0 \left( 1 + \frac{V_{TP}}{V_{ш}} \right)^{-t_i/\sigma}$$

Таким образом, в произвольный момент времени  $t \geq 0$  получаем

$$m^m(t) = m_0 \exp \left( -\frac{t}{\sigma} \ln \left[ 1 + \frac{V_{TP}}{V_{ш}} \right] \right). \quad (8)$$

Зависимость (8) показывает, что с течением времени масса воздуха в сферическом объеме экспоненциально асимптотически стремится к нулю. Это приводит к тому, что после некоторого момента времени, когда  $m^m \leq m_{кр}^m \approx 0$ , направление движения воздуха в горизонтальной

трубке определяется условиями окружающей среды. Поскольку система не может возбуждаться самостоятельно, то условием возбуждения колебаний Зондхауса может быть один из двух механизмов, рассмотренных в [4].

Покажем, что после последнего этапа расширения с некоторым номером  $i = N$ , наполнение резонатора холодным воздухом осуществляется фактически мгновенно. Для оценки этого времени  $t_H$  воспользуемся уравнением энергии

$$\frac{k}{k-1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{w_H^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{P_N^{\text{III}}}{\rho_N^{\text{III}}} + \lambda \frac{\ell_{\text{TP}}}{d_{\text{TP}}} \frac{w_H^2}{2},$$

где  $k$  – показатель адиабаты, откуда

$$t_H \approx \frac{\ell_{\text{TP}}}{w_H} = \sqrt{1 - \lambda \frac{\ell_{\text{TP}}}{d_{\text{TP}}}} \sqrt{\frac{k-1}{k}} \frac{\ell_{\text{TP}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho_0}{P_0}} \lim_{\rho_N^{\text{III}} \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\rho_N^{\text{III}}}}{\sqrt{\rho_0 - \rho_N^{\text{III}}}} = 0.$$

Таким образом, колебания Зондхауса имеют релаксационную структуру. За один период колебания происходит сравнительно медленное истечение нагретого воздуха и затем быстрое заполнение резонатора холодным воздухом. Причем, согласно (8), данные колебания в зависимости от внешних условий могут быть либо чисто периодическими, или квазипериодическими или полностью хаотическими. Причем проведенный выше анализ показывает, что если истечение нагретого воздуха никак дополнительно не контролируется, то с большей вероятностью колебания Зондхауса имеют именно хаотическую структуру. На рис. 2 приведены формы колебаний Зондхауса, определенные по полученным выше соотношениям при параметрах, взятых из [4].

На рис. 3 иллюстрирован характер зависимости колебаний (на периоде или квазипериоде) от мощности подводимого теплового потока и диаметра сферического объема резонатора Гельмгольца. С повышением мощности электронагревателя (рис. 3, а) или увеличением диаметра сферического объема резонатора (рис. 3, б) амплитуда колебаний увеличивается.

Известен целый ряд примеров различно-

го подвода теплоты, когда термоакустические колебания Зондхауса не возбуждаются. Условия, необходимые для их возникновения, рассмотрены в [4]. Случайные флуктуации среды на выходе устройства (рис. 1) порождают хаотичный характер колебаний (рис. 2, б). Экспериментально было установлено [4], что повышение теплового потока от спирального нагревателя или от пламени наружного теплоподвода позволяет получить увеличение амплитуды колебаний Зондхауса. В генераторе, представляющем трубу закрытого типа [4], для возбуждения колебаний наряду с стационарным теплоподводом высокой плотности требуется также теплоотвод, т.е. необходимо наличие источника низкой температуры.

Термоакустические колебания Зондхауса и автоколебания феномена Рийке, которые возбуждаются при постоянном теплоподводе, имеют различные механизмы их возбуждения и поддержания, порождаемые различной природой преобразования теплоты в энергию акустических колебаний.

### Выводы

1. Построена модель колебаний газа в горизонтальном резонаторе Гельмгольца с постоянным тепловым потоком в его сферическом объеме.
2. Согласно экспериментальным исследованиям [1-4] основным механизмом рассматриваемых колебаний Зондхауса является тепловое расширение газа. Установлено, что после процесса расширения, наполнение емкости резонатора холодным воздухом осуществляется фактически мгновенно. Таким образом, данные колебания имеют релаксационную структуру.
3. При этом периодически, квазипериодически или хаотично фаза медленного расширения сменяется быстрым заполнением объема резонатора холодным воздухом.
4. Установлен характер зависимости колебаний от варьирования мощности электронагревателя и диаметра сферического объема резонатора Гельмгольца.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Sondhauss C.* Uber die Shallschwingungen der Luft in erhitzten Glassrohren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite // Poggendorf Annalen der Physik und Chemie. – 1850. – Vol. 79. – P. 1 – 34.

2. *Carter R.L., Feldman K.T., McKinnon C.N.* Applicability of Thermoacoustic Phenomena to MHD Conversion Systems // University of Missouri Engineering Experiment Station, Columbia, Mo. Reprint Number 64, July 1964. Reprinted from Proceeding of the Fifth Symposium on Engineering Aspects of Magneto hydrodynamics, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Mass. April 1 – 2. 1964. P. 67.

3. *Henderson R.L.* (Environmental Test Group, Sandia Laboratory, Albuquerque), Private Communication, June 1965.

4. *Фельдман К.Т., Картер Р.Л.* Исследование колебаний давления, возникающих в газе при

подводе тепла // Труды американского общества инженеров – механиков, Теплопередача. – 1970. Сер. С, № 3. – С. 228 – 235.

5. *Гоцуленко В.В.* Математическое моделирование особенностей феномена Рийке / В.В. Гоцуленко // Математическое моделирование, РАН. – 2004. – Т. 16, N 9. – С. 23 – 28.

6. *Гоцуленко В.В.* Тепловое сопротивление как механизм возбуждения автоколебаний / В.В. Гоцуленко, В.Н. Гоцуленко // Сборник научн. трудов Днепродзержинского гос. техн. ун-та. – Д., 2009. – Вып. 1(11). – С. 95 – 100.

7. *Басок Б.И.* Теория феномена Рийке в системе с сосредоточенными параметрами / Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко // Акустический вестник. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 3– 8.

8. *Басок Б.И.* Автоколебания в распределенной модели трубы Рийке / Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко // Сибирский журнал промышленной математики. – 2011. – Т. XIV, № 4(48). – С. 3 – 13.

Получено 29.12.2011 г.

УДК 536.25

**Авраменко А.А.<sup>1</sup>, Блинов Д.Г.<sup>1</sup>, Кузнецов А.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт технической теплофизики НАН Украины

<sup>2</sup>Университет штата Северная Каролина, США

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ PGD И МПС ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОФИЗИКИ

Розглянуто можливість застосування методів PGD і МПС для вирішення багатовимірних задач теплофізики. Показана ефективність і перспективність застосування запропонованого підходу для рівняння Фоккера-Планка та задач течії полімерних рідин.

Рассмотрено применение методов PGD и МПС для решения многомерных задач теплофизики. Показана эффективность и перспективность применения предлагаемого подхода для уравнения Фоккера-Планка и задач течения полимерных жидкостей.

The application of the method of proper generalized decomposition (PGD) and the method of polyargumental systems (MPS) for multidimensional thermal physics problems is considered. The high efficiency of proposed approach for the simulation of the Fokker-Planck equation and flows of polymer liquids is shown.

$a$  – временная базисная функция;  
 $x$  – координата;  
 $q$  – обобщенная координата;

$U$  – неизвестная функция;  
 $\varphi$  – пространственная базисная функция;  
 $\psi$  – функция распределения.