# НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ЗАМІТКИ

УДК 519.6

В.М. Волощук, Я.В. Волощук

## ОПТИМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ У ХОДІ ВИРІШЕННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ АНАЛІЗУ РОЗМІРНОСТЕЙ

Розглянуто основні операції алгебри розмірних фізичних величин і на їхній основі сформульовано основні правила аналізу розмірностей. На конкретних прикладах показано ефективність використання методів аналізу розмірностей для оптимізації обчислювальних алгоритмів. Розглянуто наступні конкретні задачі: турбулентне розсіювання локалізованого газо-аерозольного утворення, розповсюдження ударних хвиль, електромагнітне випромінювання енергії. Стаття має науково-методичний характер.

**Ключові слова**: оптимізація обчислювальних алгоритмів, розмірності фізичних величин, алгебра розмірностей, степеневі одночлени, аналіз розмірностей, турбулентне розсіювання, розповсюдження ударних хвиль, електромагнітне випромінювання енергії.

### Вступ

Незважаючи на досить швидкий сучасний ріст можливостей обчислювальних технічних засобів, проблема оптимізації обчислювальних алгоритмів під час вирішення різних задач (фізичних, технічних, екологічних, економічних і т. д.) все ще залишається актуальною. У роботі акад. Сергієнка та ін. [1] проведено детальний аналіз проблеми можливого використання резервів оптимізації обчислювань у сучасних комп’ютерних технологіях вирішення задач прикладної математики і розроблено напрямки подальшого розвитку освоєння цих резервів. Зауважимо, що при цьому автори роботи [1] загальну схему вирішення задач прикладної математики розбили на такі етапи:

1. Постановка задачі;
2. Вибір математичної моделі для її вирішення;

3. Вибір комп'ютерної моделі для її вирішення (з урахуванням трьох складових цього етапу: оформлення необхідної вхідної інформації, визначення класу обчислювальних задач щодо постановки задачі та вхідної інформації, визначення класу необхідних обчислювальних алгоритмів у відповідності з архітектурою комп'ютера, з його програмним забезпеченням та з заданими обмеженнями на значення характеристик якості вихідної продукції);

4. Встановлення можливостей корекції схеми обчислювань в разі їхнього проведення на комп'ютері;

5. Інтерпретація результатів розрахунків.

Автори роботи [1] звернули основну увагу на аналіз трьох останніх етапів і отримали при цьому дуже важливі результати. Але, на нашу думку, також треба звернути увагу на необхідність під час оптимізації обчислювань і фізичній інтерпретації результатів розрахунків введення ще одного етапу в ході вирішення задач прикладної математики. Ми б його помістили між другим і третім етапами наведеної вище схеми і основний зміст цього додаткового етапу визначили наступним чином:

*Переформування вхідної інформації та математичної моделі прикладної задачі в термінах теорії подібності на основі аналізу розмірностей параметрів вхідної інформації, параметрів математичної моделі та фізичних характеристик вихідної інформації.*

Ми вважаємо за потрібне з науково-методичної точки зору провести аналіз можливостей цього етапу в ході вирішення прикладних задач, звернувши особливу увагу на наступне:

1. Формулювання і обґрунтування відомих правил алгебри розмірностей;

2. Побудова на їхній основі правила аналізу розмірностей для будь-якої прикладної задачі;

3. Обґрунтування оптимізації обчислювальних алгоритмів та фізичної інтерпретації розрахунків під час використання теорії подібності.

Для ілюстрації ефективності розглянутого способу оптимізації обчислювальних алгоритмів та фізичної інтерпретації розрахунків в разі використання теорії подібності будуть розглянуті деякі конкретні задачі, а саме: турбулентне розсіювання в земній атмосфері локалізованих утворень газо-аерозольних домішок природного або антропогенного походження, розповсюдження ударних хвиль після потужного вибуху в необмеженому середовищі, електромагнітне (теплове) випромінювання енергії. Розв'язки задач, треба відмітити, давним-давно отримано. Тут їх використано тільки як ілюстративний матеріал ефективності теорії подібності.

**Основні правила аналізу розмірностей**

Досить детально основи математичної теорії фізичної подібності розглянуто в монографіях акад. Сєдова [2], Баренблата [3], Дібая і Каплана [4]. На жаль, ці автори у своїх монографіях зробили надзвичайний наголос на аналізі можливостей використання методів теорії подібності в ході вирішення конкретних фізичних і прикладних задач в окремих галузях фізики і техніки ([2] – у галузі механіки та гідромеханіки, [3] – у галузі геофізичної гідродинаміки, [4] – у галузі астрофізики). А це в деяких випадках створювало *ілюзію*, що математична теорія фізичної подібності не має загального характеру і може використовуватись тільки в деяких окремих галузях фізики й техніки. Звичайно, це не так. Фізичній теорії подібності, як і будь-якій іншій математичній теорії (в рамках, звичайно, абстрактних обмежень, заданих відповідно до тих чи інших загальних міркувань), притаманний абсолютно загальний характер, у крайньому разі, у тій її частині, де вона базується на алгебрі розмірностей. У зв'язку з цим не можемо тут не привести знаменитий афоризм А. Пуанкаре: «Математика – це мистецтво називати різні речі одним і тим самим іменем»[5].

Теорія фізичної подібності в своїй основі – це чисто математична теорія, що не відчуває і не може відчувати характеру фізичних процесів. Правда, вона базується на принципах або обмеженнях, які немовби диктують необхідність врахування того, що мова йде не про абстрактний процес (без всяких фізичних обмежень), а про фізичний процес, який обов'язково володіє чимось додатковим, що обов'язково повинно призводити до якихось значимих обмежень з погляду фізичного і тим самим видозмінити алгебру операцій з величинами.

Після цих загальних міркувань перейдемо до конкретного аналізу і співставлення можливих алгебраїчних операцій між абстрактними математичними величинами і можливих алгебраїчних операцій між фізичними величинами, тобто величинами, які мають той або інший фізичний зміст. Зауважимо, що коли ми говоримо про фізичні величини, то маємо на увазі ті математичні величини, які просто мають саме той чи інший фізичний зміст, незалежно, підкреслюємо, від конкретного характеру того чи іншого фізичного процесу чи явища. Останнє, очевидно, може задавати тільки конкретний фізичний зміст фізичним величинам, які розглядаються, абсолютно не впливаючи на загальний характер математичного аналізу процесу чи явища.

Треба зауважити, що вища алгебра зараз переповнена надзвичайно багатою термінологією, яка не завжди і сама по собі однозначна, і не завжди співставна за різними науковими джерелами. Тому, незважаючи на те, що в подальшому будуть використовуватись досить елементарні алгебраїчні перетворення, для яких термінологія давним-давно нібито однозначно встановлена, на всякий випадок, щоб не виникло яких-небудь непорозумінь, потрібно зазначити, що в подальшому використовується алгебраїчна термінологія, запропонована Бурбакі у фундаментальній монографії [6].

Представимо собі, що символом Ω позначено якесь додатне або від'ємне число (ціле, раціональне, ірраціональне, трансцендентне тощо) або якась інша абстрактна математична величина такого ж типу (функція, функціонал тощо). Можливі алгебраїчні операції з цією величиною наступні (в рамках, звичайно, загальних математичних обмежень, на які ми тут не будемо звертати уваги через їхню досить абстрактну основу):

1) Унарна алгебраїчна операція:

$$\emptyset = \alpha\Omega^{\beta} \quad , \tag{1}$$

де $\alpha$ і $\beta$ (а нижче і $\gamma$) – числа;

2) Дві бінарні алгебраїчні операції (для двох математичних величин $\Omega_1$ і $\Omega_2$):

$$\emptyset_1 = \alpha\Omega_1^{\beta}\Omega_2^{\gamma} \quad , \tag{2}$$

$$\emptyset_2 = \Omega_1 + \Omega_2. \tag{3}$$

Зауважимо ще раз, що для цих операцій і для чисел, а також для інших абстрактних математичних величин яких-небудь обмежень, за винятком тих чи інших обставин, накладених додатково, принципово не існує.

Зовсім по-іншому складається справа, коли ми працюємо з фізичними величинами. Від чисел та інших абстрактних математичних величин фізичні величини відрізняються істотно. Щоб задати фізичну величину, треба обов'язково задати дві її складові: число і розмірність.

Найсуттєвішою характеристикою фізичної величини є її розмірність, тобто в яких умовно встановлених одиницях вона задана. Якщо з тих чи інших обставин для ‘дечого’ не можна встановити яких-небудь одиниць виміру, незалежних від того чи іншого суб’єкта (алхіміка, астролога, екстрасенса), то це ‘дещо’, ясна річ, не може мати фізичного змісту і може бути віднесено тільки до лженауки (або, можливо, преднауки). У зв’язку з цим вважаємо за потрібне більш детально розглянути питання про поняття розмірності.

Розмірність фізичної величини $X$ прийнято позначати одним із таких двох способів:

$$[X] \quad \text{або} \quad \dim X. \tag{4}$$

Перше позначення було введено Максвелом і тому його часто називають його іменем. Це позначення використовується найчастіше. І лише тоді, коли можуть виникнути непорозуміння з використанням квадратних дужок і для інших цілей, беруть друге позначення, яке, до речі, є просто скороченим варіантом англійського слова dimension, що означає розмірність. Обидва позначення вважаються повністю взаємозамінними.

Таким чином, якщо скористатись позначеннями (4), будь-яку фізичну величину завжди можна представити тільки в такому вигляді:

$$X = a\,[X] \quad \text{або} \quad X = a \dim X, \tag{5}$$

де $a$ – будь-яке число.

Така внутрішня структура фізичних величин приводить до надзвичайно важливих наслідків щодо можливостей проведення бінарних операцій над ними. Треба розглянути це питання детально, бо це надзвичайно важливо. Це надзвичайно важливо тому, що, як на перший погляд не дивно, саме від вирішення цього питання залежить надзвичайно важлива інформація, яку можна отримати щодо проходження можливих фізичних процесів у фізичній системі, яка розглядається. Звичайно, ситуація унікальна: з одного боку – у фізичній системі проходить неконтрольований нами процес, з другого – на основі простого аналізу розмірностей фізичних величин, які, як можна встановити за допомогою простих фізичних міркувань, задіяні в цьому процесі (тобто контролюють чи керують цим процесом), отримуємо без ніяких додаткових зусиль інформацію про сучасний стан цієї системи, і, що надзвичайно дивує, про її динаміку, тобто яких змін з нею можна очікувати з часом.

Унарна операція над фізичною величиною $X$ не пов'язана ні з якими обмеженнями, тобто без всяких обмежень можна записати наступну формулу:

$$Y = \alpha X^{\beta}. \tag{6}$$

Без всяких обмежень можна ввести і першу (мультиплікативну) алгебраїчну бінарну операцію для двох фізичних величин $X_1$ і $X_2$, тобто:

$$Y_1 = \alpha X_1^{\beta} X_2^{\beta}. \tag{7}$$

Але виникають проблеми з формулюванням другої (адитивної) алгебраїчної бінарної операції для двох фізичних величин $X_1$ і $X_2$ – типу (3). У загальному випадку її взагалі заборонено – не можна складати дві фізичні величини, якщо їхні розмірності не збігаються.

А в тому випадку, коли розмірності $X_1$ і $X_2$ збігаються, бінарна адитивна операція втрачає свій самостійний смисл, бо тривіально зводиться до мультиплікативної операції. Дійсно, нехай розмірність фізичної величини $X_2$ збігається з розмірністю фізичної величини $X_1$, тобто:

$$[X_2] = \alpha [X_1] \quad .$$

Тоді другу фізичну величину $X_2$ завжди можна представити через першу $X_1$ виразом:

$$X_2 = \alpha X_1 \quad .$$

А це означає, що адитивну бінарну операцію завжди можна представити у вигляді:

$$Y_2 = X_1 + X_2 = (1 + \alpha) X_1.$$

Це, безумовно, підтверджує наведений вище висновок (не має сумніву, це один із постулатів теорії розмірностей).

Проблема існування адитивних алгебраїчних операцій вирішується позитивно тільки тоді, коли за допомогою унарних операцій над фізичними величинами і їх мультиплікативної композиції можна утворити комплекси, розмірності яких або зійдуться, або взагалі зникнуть – цей випадок треба розглядати окремо.

Заборона адитивних операцій у загальному випадку якраз і складає основу теорії аналізу розмірностей, а обхід цієї заборони шляхом створення від фізичних величин співрозмірних або, що значно краще, просто мультиплікативних безрозмірних комплексів, складає основу теорії фізичної подібності. І мова тут уже може йти тільки про те, коли і як це можна зробити за допомогою, звичайно, або унарних, або бінарних чи багатонарних мультиплікативних операцій, тобто операцій, що означають не скласти (додати, відняти), а помножити або підняти в довільну числову степінь.

Зараз треба зробити деяке зауваження. Далі мова йтиме не про одну чи дві фізичні величини, для яких було визначено вище унарні й бінарні алгебраїчні операції, а про $n$ фізичних величин $Z = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, де $n$ – будь-яке ціле число. Розповсюдження наведених вище унарних і бінарних операцій на будь-яку сукупність фізичних величин будемо проводити шляхом так званої *композиції*. Це означає, що із сукупності Z вибираються довільні дві фізичні величини, з ними проводяться наведені вище унарні та бінарні алгебраїчні операції, а потім будь-яка додаткова фізична величина із сукупності Z вступає з отриманим результатом у такі ж самі унарні та бінарні операції – і так до тих пір, поки не будуть перебрані всі фізичні величини із сукупності Z.

Очевидно, що в тому випадку, коли розмірність жодної фізичної величини із сукупності Z не може бути виражена через розмірності інших, на їхній основі можна побудувати тільки мультиплікативне співвідношення (тобто підняти їх в необхідну числову степінь і результати перемножити між собою). А це означає, що із всього розмаїття функцій від фізичних величин сукупності Z може бути реалізована тільки одна (правда, з точністю до якогось числового множника) – степеневий одночлен $S$, а саме:

$$S(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X_1^a X_2^b \cdots X_n^c, \tag{8}$$

де $a$, $b$, $c$ – числа.

Розмаїття функцій може бути отримано тільки шляхом використання адитивних алгебраїчних операцій на сукупності Z. Якщо їх заборонено, то допустима тільки функція (8), ну, звичайно, з тривіальним числовим множником. Така глибока роль саме адитивних алгебраїчних операцій, звичайно, сильно дивує, але в чому тут справа – не знаємо.

Представимо собі, що нас цікавить стан або динаміка якоїсь фізичної системи, причому на основі відповідних фізичних міркувань ми знаємо, що і стан, і динаміку цієї системи можна з достатньою, потрібною нам, точністю описати за допомогою фізичної величини – функції $\boldsymbol{\phi}$. Допустимо, що на основі відповідних фізичних міркувань було встановлено, що функція $\boldsymbol{\phi}$ може залежати, головним чином, від сукупності фізичних параметрів $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Серед цих параметрів можуть бути і так звані змінні, і розмірні константи. Тепер допустимо, що в результаті аналізу розмірностей цих параметрів ми встановили, що серед них нема ні одного, розмірність якого можна було б виразити через розмірності інших, тобто всі вони володіють незалежними розмірностями. А це означає, що на їх основі можна побудувати тільки одну функцію – степеневий одночлен типу (8). Таким чином, ми приходимо до висновку, що залежність фізичної величини $\boldsymbol{\phi}$ від сукупності фізичних параметрів $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ може мати тільки такий вигляд:

$$\phi = a q_1^x q_2^y \cdots q_n^z, \tag{9}$$

де $a$ – якесь число, а сукупність степенів $\{x, y, \ldots, z\}$ повинна бути такою, щоб задовольнялось рівняння:

$$[\phi] = [q_1^x][q_2^y]\cdots[q_n^z] \quad . \tag{10}$$

Очевидно, що для будь-якої фізичної величини $\varphi_\alpha$:

$$[\varphi_\alpha^\beta] = [\varphi_\alpha]^\beta \quad .$$

Зауважимо, що рівняння (10) породжує систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих степенів, яких завжди буде якраз стільки, скільки цих невідомих. Ці рівняння мають вигляд:

$$a_k = b_{1k}x + b_{2k}y + \cdots + b_{nk}z, \qquad 1 \le k \le n. \tag{11}$$

І розмірність функції $\boldsymbol{\phi}$, і розмірність кожного із параметрів сукупності $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ завжди можна представити у вигляді степеневих одночленів від сукупності основних одиниць $\{\in_1, \in_2, \ldots, \in_n\}$ – за тими ж самими обставинами, за якими було записано співвідношення (9-10). Коефіцієнти в рівняннях (11) і є степенями цих степеневих одночленів, прирівнюваних відповідно зі співвідношенням (10) для кожного окремого $\in_k$.

Зауважимо, що під час аналізу розмірностей існує певна свобода вибору основних одиниць, яку використовують для спрощення рівнянь (11). Але все-таки, щоб не виникало непорозумінь, або, навіть, помилок, стараються використовувати природні одиниці (людина, дерево, молекулярний моль тощо), або побудовані на основі умовних еталонів чи градуювальних шкал.

**Аналіз деяких конкретних фізичних процесів**

У цьому розділі буде розглянуто деякі конкретні фізичні процеси, які, на нашу думку, досить наочно ілюструють ефективність використання наведених вище правил аналізу розмірностей для встановлення їхніх основних, найважливіших, особливостей.

*Основні характеристики турбулентного розсіювання локальних газо-аерозольних утворень у необмеженому середовищі*

На основі досить загальних фізичних міркувань можна визначитись, що найважливішими характеристиками турбулентного розсіювання локальних газо-аерозольних утворень у земній атмосфері, яку практично завжди можна вважати турбулентним середовищем, є зниження з часом концентрації ‘чогось’ у центрі цього утворення (її будемо позначати через $n_0$), де вона весь час буде максимальною, і розширення з часом просторових масштабів цього утворення (характерний просторовий масштаб цього утворення для будь-якого моменту часу будемо позначати через $L$). Нам не потрібно тут конкретизувати, про турбулентне розсіювання чого йде мова. Це може бути кількість аерозольних частинок, якщо коагуляцією їх можна знехтувати, або кількість молекул газової домішки, якщо можна знехтувати їх захопленням аерозольними частинками та газо-фазними реакціями між ними чи з молекулами навколишнього середовища, маса газо-аерозольних домішок за тих же обставин, радіоактивність речовини з досить великим періодом напіврозпаду, виділене додаткове тепло, якщо можна знехтувати його радіаційним випромінюванням тощо. Важливо тільки, щоб загальна кількість цього ‘щось’ з часом зберігалась, сама по собі не змінювалась, звичайно, за той проміжок часу, для якого процес турбулентного розсіювання розглядається, і ніяк не впливала на сам процес її розсіювання. Бо в іншому випадку треба вводити для аналізу також додаткові фізичні параметри, які будуть характеризувати інтенсивність "самознищення" цього 'чогось'. Також треба вважати це 'щось' адитивною характеристикою, щоб можна було інтегрувати її по простору розсіювання. Тоді це 'щось' з чисто фізичного погляду буде володіти розмірністю, незалежною від розмірностей інших фізичних параметрів, які характеризують процес турбулентного розсіювання. Як ми бачимо, тут ми маємо справу з певною свободою вибору основної одиниці виміру, відміченої в попередньому розділі.

Очевидно, що розмірності наведених вище фізичних величин – основних характеристик турбулентного розсіювання локалізованих газо-аерозольних утворень, будуть мати вигляд:

$$[n_0] = \frac{\text{/щось/}}{\text{м}^3}, \qquad [L] = \text{м}. \tag{12}$$

На цьому закінчується фізична постановка задачі. Далі потрібно розібратися з вхідною фізичною інформацією та математичною моделлю, яку будемо розглядати.

Очевидно, основними фізичними параметрами, які будуть у цьому випадку характеризувати процес, є кількість 'чогось', викинутого в початковий момент часу в якусь точку простору (позначимо цю величину через $Q$), час $t$, а також фізична величина, яка характеризує інтенсивність турбулентного розсіювання (позначимо її через $D$ і будемо називати по традиції коефіцієнтом турбулентної дифузії, бо розглядається тільки локальна, напівемпірична, тобто класична теорія турбулентного обміну). Для спрощення задачі приймаємо щодо турбулентного середовища наступні припущення:

– Ізотропність, тобто в усіх напрямках одне і теж, і кореляції між турбулентними рухами в різних напрямках немає. Тоді інтенсивність турбулентного розсіювання можна характеризувати тільки одним скалярним параметром $D$;

– Однорідність, тобто у всіх точках простору одне і теж. Тоді можна вважати, що коефіцієнт дифузії $D$ не залежить від просторових координат;

– Стаціонарність, тобто інтенсивність турбулентного розсіювання, не залежить від часу і, звичайно, від того моменту часу, коли в турбулентне середовище потрапили газо-аерозольні домішки. Тоді можна вважати, що коефіцієнт дифузії $D$ не залежить від часу.

Як бачимо, у разі наведених припущень коефіцієнт дифузії $D$ є просто константою, яка, правда, може приймати різні значення за різних інтенсивностей турбулентного перемішування в тому ж самому середовищі.

Таким чином, основні характеристики турбулентного розсіювання локалізованих газо-аерозольних утворень, тобто $n_0$ і $L$, можуть залежати тільки від наступних фізичних параметрів: $\{Q, D, t\}$. Позначимо розмірність простору, в якому проходить процес турбулентного розсіювання, через $\nu$. Роз'яснимо, про що йде мова. Якщо 'щось' викинуте в точку трьохмірного простору, для якого $\nu = 3$, тоді розмірність параметру $Q$ можна представити у вигляді $[Q]$ = 'щось'. Якщо 'щось' викинуте на безкінечну лінію, коли турбулентна дифузія дає результат тільки в двох напрямках, перпендикулярних до цієї лінії, тоді $\nu = 2$ і розмірність параметра $Q$ можна представити у вигляді $[Q]$ = 'щось' /м, тобто 'щось' на погонний метр. Якщо 'щось' викинуте на безкінечну плоску поверхню, коли турбулентна дифузія дає результат тільки в одному напрямку, перпендикулярному до цієї поверхні, тоді $\nu = 1$ і розмірність параметра $Q$ можна представити у вигляді $[Q]$ = 'щось' /м$^2$. Ми не вважаємо за потрібне зупинятись на фізичній інтерпретації цих різних моделей турбулентного розсіювання, думаємо, що вона очевидна. У земній атмосфері всі три фізичні ситуації можливі і реалізуються. Наприклад, точковий викид у відносно високі шари нижньої атмосфери під час техногенної аварії (вибух реактора на Чорнобильській атомній електростанції, коли радіоактивне газо-аерозольне утворення в початковий момент часу локалізувалось, як вважають, на висотах від 400 м (не нижче) до кількох кілометрів (не вище)) – у цьому випадку можна вважати, що $\nu = 3$; слід від ракети або літака у верхніх шарах атмосфери ($\nu = 2$); ранковий туман над луговою поверхнею ($\nu = 1$).

Розмірність часу не може, ясна річ, залежати від параметра $\nu$. Не може залежати від цього параметра і розмірність коефіцієнта дифузії $D$. До речі, розмірність цього фізичного параметра складає м$^2$/с. Чому вона така – це дуже цікава фізична проблема, але на цьому ми тут зупинятись не будемо – приймемо це, як фізичний постулат.

Таким чином, основні характеристики турбулентного розсіювання локального газо-аерозольного утворення $\{n_0, L\}$ можуть залежати тільки від трьох параметрів $\{Q, D, t\}$, розмірність яких має вигляд:

$$[Q] \rightarrow [Q_\nu] = \frac{'\text{щось}'}{\text{м}^{3-\nu}}, \quad [D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad [t] = \text{с}. \tag{13}$$

На цьому завершується формулювання вхідної фізичної інформації та математичної моделі для вирішення задачі. Тепер перейдемо до її вирішення за допомогою наведених у попередньому розділі правил аналізу розмірностей.

Як видно із співвідношень (13), параметри $\{Q, D, t\}$ володіють незалежними розмірностями. А це означає, що залежність фізичних величин $\{n_0, L\}$ від параметрів $\{Q, D, t\}$ можна представити тільки у вигляді степеневих одночленів від цих параметрів. Таким чином:

$$n_0 = a_\nu Q^{x_1} D^{y_1} t^{z_1}, \qquad L = b_\nu Q^{x_2} D^{y_2} t^{z_2}, \tag{14}$$

де $a_\nu$ і $b_\nu$ – якісь числові константи, а невідомі степені параметрів можна встановити шляхом розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (11), тобто:

$$'\text{щось}' \rightarrow 1 = x_1, \ 0 = x_2$$
$$\text{м} \rightarrow -3 = -(3-\nu)x_1 + 2y_1, \ 1 = -(3-\nu)x_2 + 2y_2$$
$$\text{с} \rightarrow 0 = -y_1 + z_1, \ 0 = -y_2 + z_1$$

Розв'язок цих досить простих рівнянь матиме наступний вигляд:

$$x_1 = 1, \ y_1 = \nu/2, \quad z_1 = \nu/2; \quad x_2 = 0, \ y_2 = 1/2, \ z_2 = 1/2.$$

Таким чином, формули (14) повинні мати такий конкретний вигляд:

$$n_0 = a_\nu Q \ (Dt)^{-\nu/2}, \qquad L = b_\nu \sqrt{Dt}. \tag{15}$$

Зауважимо, що ці формули давним-давно відомі. Давно встановлено і значення числових констант $a_\nu$ і $b_\nu$. Ми не ставили своєю ціллю отримати для цієї задачі новий результат. Нашою ціллю було продемонструвати ефективність оптимізації обчислювальних алгоритмів за допомогою аналізу розмірностей – адже задача зведена від обчислювання трьохпараметричних функцій до визначення тільки числових констант $a_\nu$ і $b_\nu$, які можна підрахувати тільки один раз і назавжди.

*Закон розповсюдження ударної хвилі від потужного локалізованого вибуху в необмеженому просторі*

Ця задача якраз належить до тих, які вперше було розв'язано тільки за допомогою аналізу розмірностей. Ми тут розглядаємо цю задачу тому, що на основі її розв'язку можна надзвичайно наочно продемонструвати саме обмеженість свободи вибору основних одиниць для спрощення її вирішення.

Мова йде ось про що. Нехай в якісь точці необмеженого простору в деякий початковий момент часу стався потужний вибух (наприклад, підірвана атомна (ядерна, термоядерна) бомба), у результаті якого виділилась енергія $E$. Потрібно вияснити, на яку відстань $r$ від точки вибуху розповсюдиться ударна хвиля за проміжок часу $t$, відрахованого від моменту вибуху. Таким чином, шуканою фізичною величиною буде $r$. Фізичними параметрами, від яких може залежати ця величина, будуть $E$, $t$ і ще якийсь параметр, який характеризує середовище, де стався вибух. Що це може бути за параметр? Вибух може статись в атмосфері, в океані або в надрах Землі. Чим, з одного боку, будуть відрізнятись, головним чином, ці середовища між собою? Звичайно, густиною $\rho$. Що, з іншого боку, може, в основному, впливати на швидкість розповсюдження ударної хвилі? На основі загальних фізичних міркувань можна припустити, що це також буде густина цих середовищ $\rho$. Таким чином, відстань $r$ буде в основному якоюсь функцією трьох параметрів $\{E, \rho, t\}$, тобто:

$$r = f(E, \rho, t) \tag{16}$$

Звичайно, справедливість цього припущення можна підтвердити тільки прямим експериментом, що, до речі, і було зроблено.

Який же вигляд може мати ця трьохпараметрична функція? У загальному випадку – будь-який. Але давайте використаємо правила аналізу розмірностей, наведених у попередньому розділі. Спочатку запишемо розмірності шуканої величини $r$ і параметрів $\{E, \rho, t\}$ (в стандартних одиницях системи СІ):

$$[r] = \text{м}, \quad [E] = \text{Дж} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \quad [\rho] = \text{кг/м}^3, \quad [t] = \text{с}.$$

Як бачимо, параметри $\{E, \rho, t\}$ володіють незалежними розмірностями. Дійсно, незважаючи на те, що в розмірності двох останніх параметрів, тобто $\{\rho, t\}$, входять всі три стандартні одиниці системи СІ, тобто {кг, м, с}, які також повністю визначають і розмірність $E$, тобто джоуль, скласти розмірність джоуля із розмірностей $\{\rho,\ t\}$ ну ніяк не можна. А це означає, що залежність (16) може мати тільки вигляд наступного степеневого одночлена:

$$r = aE^x\rho^y t^z, \tag{17}$$

де $a$ – якась числова константа, а невідомі степені параметрів $\{E,\ \rho,\ t\}$, тобто $\{x,\ y,\ z\}$, можна визначити на основі умови, що розмірності лівої і правої частини співвідношення (17) повинні обов'язково збігатися. І тут треба зазначити наступне: незважаючи на те, що розмірність *E не залежить від розмірностей* $\{\rho,\ t\}$, її вважати «основною» одиницею під час аналізу розмірностей не можна, а треба розглядати тільки систему стандартних одиниць СІ, тобто {кг, м, с}. Думаємо, чому це так? Очевидно, у фізичному процесі, що розглядається, джоуль не відіграє самостійної фізичної ролі, а виділена в результаті вибуху енергія якраз і формує, і призводить до розповсюдження ударної хвилі, й сама перетворюється відповідним чином у цьому процесі. Таким чином, алгебраїчні рівняння для визначення степенів $\{x,\ y,\ z\}$можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} &\text{кг} &&\rightarrow && 0 = x + y \\ &\text{м} &&\rightarrow && 1 = 2x - 3y \\ &\text{с} &&\rightarrow && 0 = -2x + z. \end{aligned}$$

Ці рівняння легко розв'язати. Отже, маємо:

$$x = 1/5,\ \ y = -1/5,\ \ z = 2/5.$$

Таким чином, на основі порівняння розмірностей співвідношення (17) можна записати в такому конкретному вигляді:

$$r = a\left(\frac{E\,t^2}{\rho}\right)^{1/5}. \tag{18}$$

Це – знаменита формула Дж. Тейлора, яку він таким же способом отримав і опублікував у 1950 р. (правда, можливо, це все-таки результат акад. Сєдова, який опублікував його ще в 1946 р.). Думаю, було б справедливо, якщо б цю знамениту формулу, яка знайшла надзвичайно широке практичне застосування, іменувати все-таки формулою Сєдова-Тейлора.

Дж. Тейлор опрацював кінофільм про розповсюдження вогняної кулі після вибуху атомних бомб під час американських ядерних випробувань і підтвердив цими результатами формулу (18), а також показав, що $a \sim 1$. Треба сказати, що ці дослідження призвели і до надзвичайно негативних результатів, тобто до всебічних драконівських заходів щодо засекречування всіх ядерних і ракетних робіт, бо виявилось, що навіть мізерна інформація про процес (явище) може, за допомогою вчених, розкрити всю глибину секретної інформації. Адже, наприклад, за значенням параметра $r(t)$, який спочатку не вважали за потрібне засекречувати, можна за допомогою формули Сєдова-Тейлора елементарно підрахувати потужність (точніше, енергію) ядерного вибуху, яку зазвичай вважали військові люди, глибоко засекреченою величиною. Звичайно, така «єресь» не могла спочатку ввійти в голови й їхнім, і нашим військовим чиновникам. А коли, нарешті, вона ввійшла в їхні голови, то розпочалось – не дай Боже!

*Основні закони радіаційного теплового випромінювання енергії*

Треба відразу сказати, що розглянуті нижче основні закони радіаційного теплового випромінювання енергії були спочатку встановлені абсолютно без застосування правил аналізу розмірностей. Вони є прямим результатом і відповідних фізичних міркувань, і відповідних експериментальних даних. За допомогою правил аналізу розмірностей ми встановили ці закони, можливо, вперше (у чому ми не впевнені, та це й не відіграє ніякої ролі, адже важливо отримати результат). Але тут ми розглядаємо цю задачу тільки з ціллю, щоб продемонструвати, як треба використовувати розмірні константи під час вирішення прикладних задач за допомогою аналізу розмірностей.

У ході вивчення радіаційного теплового випромінювання енергії найважливішими вважають наступні дві його характеристики: щільність потоку енергії від тіла в навколишнє середовище (позначимо його через $I$), тобто кількість енергії, що випромінюється тілом з його одиничної площадки за одиницю часу, та довжина хвилі $\lambda_{max,}$ на якій у навколишнє середовище випромінюється максимальна кількість радіаційної енергії з одиничної площадки тіла за одиницю часу. Відразу зауважимо, що розмірності цих фізичних величин (за їхнім визначенням) можна представити так:

$$[I] - \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}}, \quad [\lambda_{max}] = \text{м} \tag{19}$$

Тепер будемо визначати, від яких фізичних параметрів можуть залежати шукані фізичні величини $I$ та $\lambda_{max}$. Оскільки мова йде про теплове випромінювання, то зразу можна сказати, що його спектр буде неперервним (це надійно встановлений емпіричний факт) та інтенсивність цього випромінювання буде залежати від температури тіла $T$, яка якраз повністю і характеризує інтенсивність теплового руху молекул. Але випромінюється енергія, а розмірність фізичного параметра $T$ задають відповідно до певних градуювальних шкал. Щоб привести параметр $T$, заданий у кельвінах *К,* до енергетичних оцінок, треба використати розмірну константу Больцмана $k$, розмірність якої дорівнює Дж / *К*.

Енергія випромінювання йде від тіла в навколишнє середовище. Електромагнітним хвилям, які випромінює тіло, нема абсолютного інтересу, що їх викинуло, але середовище, в якому вони почали розповсюджуватись, уже в їхній поведінці відіграє надзвичайну роль. І швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у просторі істотним чином залежить від характеристик цього простору. Доказано прямими експериментами, що швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі нашого, звичайно, світу є просто константою і позначають її, як правило, через $c$. Розмірність швидкості світла – очевидна: $[c]$ = м / с.

Тепер обов’язково необхідно врахувати дискретність мікросвіту. Вона виступає без всяких додаткових фізичних обґрунтувань. Дискретність мікросвіту у фізичних моделях виступає, як дещо дане зі сторони, як фізичний постулат, якого треба дотримуватись, щоб правильно зрозуміти наш світ. Встановлено, що *дискретність* мікросвіту характеризується постійною Планка $h$, розмірність якої дорівнює Дж·с. Оскільки випромінювання фотонів (електромагнітних хвиль) – це процеси мікросвіту, то під час їх вивчення треба обов’язково враховувати дискретність мікросвіту, тобто параметр $h$. Таким чином, основними фізичними параметрами, від яких можуть залежати шукані фізичні величини $I$ і $\lambda_{max}$ є $\{T.\ k.\ c,\ h\}$. Розмірності цих параметрів мають вигляд:

$$[T] = K, \ [k] = \text{Дж}/K \ , \quad [c] = \text{м}/\text{с} \ , \ [h] = \text{Дж} \cdot \text{с}. \tag{20}$$

Параметри $\{T.\ k.\ c,\ h\}$, як не складно встановити, володіють незалежними розмірностями. А це означає, що залежність фізичних величин $I$ і $\lambda_{max}$ від цих параметрів можна представити тільки у вигляді наступних степеневих одночленів:

$$I = a\,T^{x_1}k^{x_2}c^{x_3}h^{x_4}, \quad \lambda_{max} = b\,T^{z_1}k^{z_2}c^{z_3}h^{z_4} \quad . \tag{21}$$

Тут $a$ і $b$ – числові константи, а степені параметрів визначаються за тієї ж самої умови, тобто, щоб розмірності лівих і правих частин цих співвідношень збігалися.

І тут ми повинні відмітити надзвичайно цікаве явище. Всі розмірності наших величин і параметрів базуються на чотирьох стандартних одиницях системи СІ, а саме: $\{K,$ кг, м, с$\}$. Але кілограм ніде не входить у розмірні співвідношення у явному вигляді, він всюди ховається за джоулем. А це означає, що в разі співставлення розмірностей правих і лівих частин співвідношень (21), нема ніякого смислу розшифровувати джоуль через основні одиниці {кг, м, с}, а розглядати його самого, як «основну» одиницю – носія інформації про кг. Це значно спрощує рівняння для знаходження степенів степеневих одночленів у співвідношеннях (21). І, з другого боку, це ілюструє й свободу вибору в певних випадках і, певною мірою, основних одиниць – для спрощення задачі. З фізичного погляду така ситуація виникає тому, що в цій задачі енергія розглядається як пасивна фізична величина – не самознищується і не впливає на процес, як ‘щось’ у задачі з формулами (12-15).

Тепер перейдемо до визначення невідомих степенів $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ у співвідношеннях (21). Побудуємо відповідні алгебраїчні рівняння, а саме:

$$\text{Дж} \;\rightarrow\; 1 = x_2 + x_4, \quad 0 = z_2 + z_4$$

$$K \;\rightarrow\; 0 = x_1 - x_2, \quad 0 = z_1 - z_2$$

$$\text{м} \;\rightarrow\; -2 = x_3, \quad 1 = z_3$$

$$\text{с} \;\rightarrow\; -1 = -x_3 + x_4, \quad 0 = -z_3 + z_4.$$

Із цих рівнянь витікає, що:

$$x_1 = 4, x_2 = 4,\ x_3 = -2,\ x_4 = -3\ ;\quad z_1 = -1,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1,\ z_4 = 1.$$

Таким чином, формули (21) мають наступний конкретний вигляд:

$$I = \sigma T^4, \quad \lambda_{max} = \frac{A}{T}, \tag{22}$$

де введені позначення:

$$\sigma = a\frac{k^4}{c^2h^3}, \; A = b\frac{ch}{k} \tag{23}$$

Формули (22) – це відомі закони теплового електромагнітного випромінювання тілами енергії. Перше співвідношення цієї системи – закон Стефана-Больцмана, друге – закон зміщення Віна. Ці закони було отримано давним-давно, але іншим способом. Виведення цих законів на основі аналізу розмірностей ми ж в науковій літературі не зустрічали.

**Висновки**

Представлена робота носить виключно науково-методичний характер. Тут не приведено нових наукових результатів. У цій роботі просто показано, наскільки може бути ефективним аналіз розмірностей фізичних величин у ході вирішення різних задач та з метою оптимізації обчислювальних алгоритмів. У цьому напрямку ще треба провести аналіз питань оптимізації обчислювальних алгоритмів на основі відомої П-теореми, коли серед фізичних параметрів, що визначають процес, знаходяться такі, розмірність яких можна виразити через розмірності інших і на основі цього побудувати критерії подібності.

Важливо, що розгляд методів аналізу розмірностей зведено до формулювання мультиплікативних унарних і бінарних операцій для фізичних величин. У роботі доказано, що аналіз розмірностей призводить до нетривіальних фізичних результатів саме через очевидну заборону адитивних операцій між параметрами, які володіють різними розмірностями. Наскільки ми знаємо, з такого (чисто алгебраїчного) погляду аналіз розмірностей розглядається тут вперше.

Автори висловлюють щиру вдячність зав. відділу фізики атмосфери УкрНДГМІ Шпигу В.М. за важливі коментарі.

* *

1. *Сергиенко И.В., Задирака В.К., Бабич М.Д., Людвиченко В.А.* Об использовании резервов оптимизации вычислений в компьютерных технологиях решения задач прикладной и вычислительной математики с требуемыми значениями характеристик качества // ЖВМиМФ. – 20. – № 12. – С. 1-12.

2. *Седов А.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука. – 1981. – 447 с.
3. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. – Л.: Гидрометеоиздат. – 1978. – 207 с.
4. *Дибай Э.А., Каплан С.А.* Размерность и подобие астрофизических величин. – М.: Наука. – 1976. – 399 с.
5. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука. – 1983. – 561 с.
6. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир. – 1965. – 455 с.

*Український науково-дослідний*
*гідрометеорологічний інститут, Київ.*

**В.М. Волощук, Я.В. Волощук**

## Оптимизация вычислительных алгоритмов при решении прикладных задач с помощью анализа размерностей

*Рассмотрены основные операции алгебры размерных физических величин и на их основе сформулированы основные правила анализа размерностей. На конкретных примерах показана эффективность использования методов анализа размерностей для оптимизации вычислительных алгоритмов. Рассмотрены следующие конкретные задачи: турбулентное рассеивание локализированного газо-аэрозольного образования, распространение ударных волн, электромагнитное излучение энергии. Статья имеет научно-методический характер.*

**Ключевые слова:** оптимизация вычислительных алгоритмов, размерности физических величин, алгебра размерностей, степенные одночлены, анализ размерностей, турбулентное рассеивание, распространение ударных волн, электромагнитное излучение энергии.

**V.M. Voloschuk, Ya.V. Voloschuk**

## Optimization numerical algorithms for solution applied problems with the help of analysis of dimensions

*The basic operations of the algebra of dimensional physical quantities are described and the basic rules of dimensional analysis were formulated. The effectiveness of the methods of dimensional analysis for the optimization of numerical algorithms was demonstrated for some examples. The following applied problems were presented: the turbulent dissipation of the localized gas and aerosol formation, propagation of shock waves, electromagnetic radiation energy. The article has the scientific and methodological character.*

**Ключевые слова:** optimization numerical algorithms, dimensions of physical quantities, algebra of dimensions, power monomial, analysis of dimensions, the turbulent dissipation, propagation of shock waves, electromagnetic radiation energy.