УДК 681.3.019.3

ДЖАССИМ МУХАММЕД КАСМИ

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СТРУКТУР ТИПА «k *из* n» НА ОСНОВЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ

Abstract: *Design procedures of reliability of system such as* $''k \ \ from\ n''$ *are submitted on the basis of a method of functions of casual arguments with application of various approximating functions of distribution (Weybull, exponential). It is shown, that quantitative estimations of parameters of reliability depending on the accepted function of distribution have an essential divergence (up to 200 %).*
Key words**:** *function of chance arguments, function of distribution of time to failure, reliability function.*

Анотація: *Представлено методики розрахунку надійності системи типу* $''к\ з\ n''$ *на основі методу функцій випадкових аргументів із застосуванням різних апроксимуючих функцій розподілу (Вейбулла, експонентного). Показано, що кількісні оцінки показників надійності в залежності від прийнятої функції розподілу мають істотну розбіжність (до 200%).*
Ключові слова: *функція випадкових аргументів, функція розподілу наробітку, імовірність безвідмовної роботи.*

Аннотация: *Представлены методики расчета надежности системы типа* $''к\ из\ n''$ *на основе метода функций случайных аргументов с применением различных аппроксимирующих функций распределения (Вейбулла, экспоненциального). Показано, что количественные оценки показателей надежности в зависимости от принятой функции распределения имеют существенное расхождение (до 200%).*
Ключевые слова: *функция случайных аргументов, функция распределения наработки, вероятность безотказной работы.*

1. Введение

В практике проектирования как способ повышения надежности технических систем имеет место резервирование путем параллельного соединения элементов, когда все элементы находятся под нагружением (нагруженный резерв). В частности, широкое применение имеют системы (структуры) типа «k *из* n». Такая структура *n*-го порядка нормально функционирует тогда и только тогда, когда работоспособны по крайней мере k элементов. Такие структуры занимают важное место, потому что, среди всех структур n-го порядка они характеризуются наиболее чувствительной функцией надежности. Заметим, что частный случай $k = n$ соответствует хорошо известному последовательному соединению, а частный случай $k = 1$ – параллельному соединению. В настоящей работе рассматриваются и оцениваются показатели надежности систем, которые либо действительно являются невосстанавливаемыми (например, системы однократного действия), либо таких восстанавливаемых систем, восстановление которых по каким-либо причинам невозможно непосредственно в рассматриваемое время. При этом предполагают, что все элементы имеют одинаковую надежность, и отказы элементов являются независимыми.

2. Основы расчета надежности систем при использовании метода функций случайных аргументов

Теория функций случайных аргументов (ФСА) – один из важных разделов теории вероятностей. Основными задачами этой теории в прикладном плане является нахождение распределения ФСА и его числовых характеристик по заданным распределениям аргументов. Успешное применение метода ФСА было осуществлено исследователями [1–3] для расчета надежности некоторых систем. Наиболее развиты были методы расчета надежности систем на основе использования ФСА в [3].

Суть метода расчета надежности систем на основе использования ФСА состоит в том, что случайная величина T (наработка системы до отказа) представляется некоторой функцией случайных аргументов ($T_{эi}$, $\nu_{эi}$ – средняя наработка и коэффициент вариации наработки элементов i-го типа, входящих в систему):

$$T = \varphi(T_{эi}, \nu_{эi}),$$

где $\varphi(\cdot)$ – детерминированная функция, однозначно соответствующая структуре системы. С другой стороны. предполагают, что случайная величина T описывается некоторым известным законом распределения. Ставится задача оценки параметров этого распределения через значения $T_{эi}$ и $\nu_{эi}$. Используя, например, свойства и связи случайных величин и функций, а также фундаментальные теоремы теории вероятностей (теоремы умножения, сложения и полной вероятности), устанавливают соотношения между такими показателями, как средняя наработка до отказа системы и элементов, а также между коэффициентами вариации наработки системы и элементов, однозначно определяемых структурой системы. Далее в качестве функций распределения случайной величины T принимают такую, чтобы можно было определить ее параметры через характеристики $T_{эi}$ и $\nu_{эi}$. Таким образом, получают оценки закона распределения искомой случайной величины T, т.е. решается задача расчета безотказности системы на основании показателей надежности элементов. Данный метод расчета надежности систем получил название ФСА-метод.

Рассмотрим методики расчета рассматриваемых систем на основе ФСА-метода с использованием различных теоретических функций распределения наработки.

3. Методика расчета надежности системы на основе использования распределения Вейбулла

Из распространенных, в частности, двухпараметрических функций распределений, используемых в качестве теоретических моделей надежности, наиболее подходящей для решения поставленной задачи оказалось распределение Вейбулла [3], у которого параметр формы имеет определенную связь с коэффициентом вариации наработки, а параметр масштаба несложно выражается через среднюю наработку до отказа. Если принять гипотезы, что элементы рассматриваемой структуры типа «k *из* n» равнонадежны, имеют значение средней наработки до отказа $T_э$, коэффициент вариации наработки $\nu_э$ и их наработка имеет распределение Вейбулла, то получаем следующие оценки показателей надежности системы.

Для структур типа «k *из* n» при равнонадежных элементах, используя, например, метод прямого перебора и теоремы сложения вероятностей [4], получено выражение для вероятности безотказной работы системы $R_c(t)$ в следующем виде:

$$R_c(t)=\sum_{i=0}^{n-k} C_n^i\, R_э^{n-i}(t)\cdot\left[1-R_э(t)\right]^i \;, \tag{1}$$

где $R_э(t)$ – вероятность безотказной работы элемента; $C_n^i=\dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$.

Используя (1), получим выражение для вероятности безотказной работы системы, если наработки элементов описываются распределением Вейбулла следующего вида:

$$R_э(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right], \tag{2}$$

где a, b – соответственно, параметры масштаба и формы распределения.

Определим выражения для показателей надежности наиболее сложной структуры типа «k *из* n», когда $n=5$ и $k=3$. Расчет структур типа «k *из* n» с меньшим значением n и k аналогичен и проще.

Вероятность безотказной работы системы:

$$R_c(t)=\exp\left[-3\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]\left\{10-15\exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]+6\exp\left[-2\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]\right\}. \tag{3}$$

Плотность распределения наработки до отказа системы:

$$f_c(t)=30\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}\exp\left[-3\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]\left\{1-2\exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]+\exp\left[-2\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]\right\}. \tag{4}$$

Для рассматриваемых систем типа "k *из* n" оценки средней наработки до отказа системы и коэффициент вариации наработки при использовании распределения Вейбулла вычисляют следующим образом:

$$T_c=T_э\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^{\nu_c}=T_э\left(\frac{3}{5}\right)^{\nu_c}; \qquad \nu_c=0,56\cdot\nu_э \tag{5}$$

Использование вышеприведенных выражений (3) и (4) для оценки количественных показателей надежности исследуемой системы (гамма-процентной наработки $T_{c\gamma}$, вероятности безотказной работы за заданное время $R_c(t_{зад})$ и др.) достаточно сложно и требует использования вычислительной техники.

Согласно ФСА-методу, принимают гипотезу о том, что функция (3) может быть аппроксимирована функцией Вейбулла следующего вида:

$$R_c^w(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \tag{6}$$

где α, β – параметры масштаба и формы распределения вычисляют по формулам: $\alpha=\dfrac{T_c}{\Gamma(1+\nu_c)}$, $\beta=\dfrac{1}{\nu_c}$; $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Когда определены параметры распределения (6), далее можно известным способом вычислять все необходимые показатели надежности исследуемой системы.

В частности, гамма-процентная наработка системы может быть вычислена как решение уравнения (6), после подстановки в него соответствующих значений параметров ($\gamma = \exp\left[-\left(\frac{T_{c\gamma}^{w}}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$) и логарифмирования обеих частей, по следующей формуле:

$$T_{c\gamma}^{w} = \frac{T_c\,(-\ln\gamma)^{\nu_c}}{\Gamma(1+\nu_c)}\,. \tag{7}$$

Вероятность безотказной работы исследуемой системы за заданное время эксплуатации $t_{зад}$ вычисляют по формуле

$$R_c^{w}(t_{зад}) = \exp\left[-\left(\frac{t_{зад}}{\alpha}\right)^{\beta}\right]. \tag{8}$$

4. Методика расчета надежности системы на основе использования экспоненциального распределения

Аналогично предыдущему случаю, используя соотношение (1), определим показатели надежности рассматриваемой системы, когда в качестве теоретической функции распределения наработки до отказа принято экспоненциальное распределение:

$$R_э(t) = \exp(-\lambda_э\, t), \tag{9}$$

где $\lambda_э = \frac{1}{T_э}$.

Вероятность безотказной работы системы:

$$R_c(t) = \exp(-3\lambda_э t)\{10 - 15\exp(-\lambda_э\, t) + 6\exp(-2\lambda_э\, t)\}. \tag{10}$$

Плотность распределения наработки до отказа системы:

$$f_c(t) = 30\,\lambda_э \exp(-3\lambda_э t)\{1 - 2\exp(-\lambda_э t) + \exp(-2\lambda_э t)\}. \tag{11}$$

Оценки средней наработки до отказа и коэффициента вариации наработки системы типа «k $из$ n» при использовании экспоненциального распределения:

$$T_c = T_э \sum_{i=0}^{n-k} (i+k)^{-1} = T_э\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{47}{60}T_э\,; \qquad \nu_c = 1\,. \tag{12}$$

Использование выражений (10) и (11) для оценки количественных показателей надежности исследуемой системы (гамма-процентной наработки $T_{c\gamma}$, вероятности безотказной работы за заданное время $R_c(t_{зад})$ и др.) достаточно сложно. Получим упрощенные оценки показателей надежности системы, используя ФСА-метод. Принимают гипотезу о том, что функция (10) может быть аппроксимирована функцией экспоненциального распределения следующего вида:

$$R_c^E(t) = \exp\left(-\lambda_c\, t\right), \tag{13}$$

где $\lambda_c = \dfrac{1}{T_c} = \dfrac{60}{47\,T_э}$ – параметр экспоненциального распределения.

Когда определен параметр распределения (13), можно известным способом вычислять все необходимые показатели надежности исследуемой системы.

В частности, гамма-процентная наработка системы может быть вычислена как решение уравнения (13), после соответствующих подстановок параметров и логарифмирования уравнения, по следующей формуле:

$$T_{c\gamma}^E = T_c(-\ln\gamma) = \frac{47}{60} T_э(-\ln\gamma)\,. \tag{14}$$

Вероятность безотказной работы исследуемой системы за заданное время эксплуатации $t_{зад}$ вычисляют по формуле

$$R_c^E(t_{зад}) = \exp\left(-\frac{60\,t_{зад}}{47\,T_э}\right). \tag{15}$$

5. Пример

Определим показатели надежности системы типа «k *из* n» для следующих исходных данных: $n = 5;\ k = 3;\ T_э = 1000\ час;\ \nu_э = 1;\ \gamma = 0{,}9;\ t_{зад} = 200\ час.$

Решение 1. В качестве теоретической функции распределения наработки элементов и системы используем распределение Вейбулла.

1. Вычисляем коэффициент вариации наработки до отказа системы:

$$\nu_c = 0{,}56 \cdot \nu_э = 0{,}56.$$

2. Вычисляем оценку средней наработки до отказа системы:

$$T_c^w = T_э\left(\frac{3}{5}\right)^{\nu_c} = 1000\cdot(0{,}6)^{0{,}56} = 751 \text{ час.}$$

3. Вычисляем гамма-процентную наработку, соответствующую $\gamma = 0{,}9$:

$$T_{c\gamma}^w = \frac{T_c(-\ln\gamma)^{\nu_c}}{\Gamma(1+\nu_c)} = \frac{751(-\ln 0{,}9)^{0{,}56}}{\Gamma(1{,}56)} = 238{,}8\ час.$$

4. Вычисляем вероятность безотказной работы системы за $t_{зад} = 200\ час$, предварительно определив параметры:

$$\alpha = \frac{T_c}{\Gamma(1+\nu_c)} = \frac{751}{0{,}89} = 843{,}8; \qquad \beta = \frac{1}{\nu_c} = 1{,}786\,;$$

$$R_c^w(t_{зад}) = \exp\left[-\left(\frac{t_{зад}}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = \exp\left[-\left(\frac{200}{843{,}8}\right)^{1{,}786}\right] = \exp(-0{,}076) = 0{,}927\,.$$

Решение 2. В качестве теоретической функции распределения наработки элементов и системы используем экспоненциальное распределение.

1. Коэффициент вариации наработки до отказа системы при экспоненциальном распределении всегда равен единице: $\nu_c = 1.$

2. Вычисляем оценку средней наработки до отказа системы:

$$T_c^E = \frac{47}{60} T_э = \frac{47000}{60} = 783 \text{ час.}$$

3. Вычисляем гамма-процентную наработку, соответствующую $\gamma = 0{,}9$:

$$T_{c\gamma}^E = T_c(-\ln\gamma) = \frac{47}{60} T_э(-\ln\gamma) = 783(-\ln 0{,}9) = 783(0{,}105) = 82{,}2 \ час \ .$$

4. Вычисляем вероятность безотказной работы системы за $t_{зад} = 200 \ час$, используя формулу (15):

$$R_c^E(t_{зад}) = \exp\left(-\frac{60\, t_{зад}}{47\, T_э}\right) = \exp\left(-\frac{12000}{47000}\right) = \exp(-0{,}255) = 0{,}775.$$

6. Выводы

Сравнивая полученные (расчетные) оценки показателей надежности одной и той же системы, следует отметить, что если оценки средней наработки до отказа системы (T_c^w, T_c^E) отличаются незначительно (~ 4%), то оценки гамма-процентных показателей ($T_{c\gamma}^w$, $T_{c\gamma}^E$) и вероятности отказа за заданную наработку $[1 - R_c^w(t_{зад}), \quad 1 - R_c^E(t_{зад})]$ имеют очень большое расхождение (порядка 200%). Полученные результаты следует учитывать при выборе методики расчета надежности систем. Несомненно, что расчеты показателей надежности систем на основе двухпараметрического распределения (распределения Вейбулла) представляются более точными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1969. – 576 с.
2. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. М.: «Мир», 1969. – 395 с.
3. Надежность и эффективность АСУ / Ю.Г. Заренин, М.Д. Збырко, Б.П. Креденцер и др. – К.: Техніка, 1975. – 368 с.
4. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: «Наука»,1965. – 423 с.