



УДК 539.375

© 2008

В. Л. Богданов

О разрушении материала с периодической системой соосных круговых трещин при действии направленных вдоль них начальных напряжений

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

An axisymmetric problem on the interaction of a periodic system of coaxial cracks in an infinite material is investigated by the use of approaches of the linearized mechanics of solids. Two non-classical mechanisms of fracture are considered, namely, fracture of solids with initial stresses acting parallel to the cracks' planes and fracture of materials under compression along cracks. Numerical results are obtained for a highly elastic material with the Bartenev-Khazanovich elastic potential. The dependence of the parameters of fracture on the loading conditions, physico-mechanical characteristics of materials, and geometric parameters of the problem is analyzed.

В настоящей работе исследована осесимметричная линеаризованная задача о взаимодействии периодической системы соосных параллельных дискообразных трещин в бесконечном материале. Рассмотрены два неклассических механизма разрушения — разрушение тела с начальными напряжениями, действующими параллельно плоскостям трещин, и разрушение при сжатии вдоль трещин. Отметим, что при таких схемах начального нагружения трещины не оказывают влияния на коэффициенты интенсивности напряжений и величины раскрытия трещин и, следовательно, классические критерии разрушения типа Гриффитса–Ирвина в данном случае неприменимы.

В [1–3] для исследования указанных классов задач были предложены подходы в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела. При этом сформулированный в указанных работах критерий хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями является аналогом соответствующего критерия Гриффитса–Ирвина, а применительно к проблеме о сжатии материалов вдоль трещин в качестве механизма разрушения рассматривается локальная потеря устойчивости состояния равновесия материала в окрестности трещин. К настоящему времени с использованием указанных подходов получены решения отдельных классов задач, которые обнаружили новые механические эффекты, связанные с влиянием напряжений, действующих вдоль трещин [4–6].

Согласно указанным подходам, задача решается в общем виде для сжимаемых и несжимаемых высокоэластических материалов с различными формами упругих потенциалов. Для высокоэластических материалов, описываемых упругим потенциалом Бартенева–Хазановича, получены численные значения параметров разрушения (критических коэффициентов сжатия и коэффициентов интенсивности напряжений) и проанализирована их зависимость от начальных напряжений, физико-механических характеристик материалов и геометрических параметров задачи.

1. Используются координаты начального деформируемого состояния y_j ($j = 1, 2, 3$), которые связаны с лагранжевыми координатами естественного (недеформированного) состояния соотношениями

$$y_j = \lambda_j x_j; \quad \lambda_j = \text{const} \quad (j = 1, 2, 3),$$

где λ_j — обусловленные начальными напряжениями коэффициенты удлинения (укорочения) вдоль координатных осей, определяющие перемещения в начальном состоянии.

Рассмотрим бесконечный ряд параллельных соосных круговых трещин одинакового радиуса a , расположенных в параллельных плоскостях $y_3 = \text{const}$: $\{r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, x_3 = 2hn; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где (r, θ, y_3) — круговые цилиндрические координаты, получаемые из декартовых y_j .

Предполагаем, что в теле действуют одинаковые начальные напряжения вдоль осей Oy_1, Oy_2 , реализующие однородное начальное напряженно-деформированное состояние:

$$\begin{aligned} S_{33}^0 &= 0, & S_{11}^0 &= S_{22}^0 = \text{const} \neq 0, \\ \lambda_j &= \text{const}, & \lambda_1 &= \lambda_2 \neq \lambda_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где S_{ij}^0 — компоненты симметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в недеформированном (естественном) состоянии. Кроме того, будем использовать такие обозначения: Q'_{ij} — компоненты несимметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в начальном (вызванном начальными напряжениями S_{ij}^0) состоянии; u_j — компоненты соответствующего им вектора перемещений.

На берегах трещин имеем следующие условия:

для задачи о трещинах нормального отрыва материала с начальными напряжениями

$$Q'_{33} = -\sigma(r, \theta), \quad Q'_{3r} = 0, \quad Q'_{3\theta} = 0 \quad (y_3 = (2hn)_{\pm}, r < a, 0 \leq \theta < 2\pi); \quad (2)$$

для задачи о сжатии материала вдоль трещин

$$Q'_{33} = 0, \quad Q'_{3r} = 0, \quad Q'_{3\theta} = 0 \quad (y_3 = (2hn)_{\pm}, r < a, 0 \leq \theta < 2\pi), \quad (3)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а нижними индексами “+” и “−” обозначены соответствующие берега трещин. Предполагается, что возмущения напряженно-деформированного состояния тела, вызванные дополнительными нагрузками $\sigma(r, \theta)$, значительно меньше таковых для начального состояния, обусловленного начальными напряжениями S_{ij}^0 , что позволяет применять для исследования задачи линеаризованные соотношения.

Учитывая симметрию геометрической и силовой схем задачи относительно плоскости $y_3 = 0$, а также периодичность компонент тензора напряжений и вектора перемещений

(с периодом $2h$) по переменной y_3 , сводим исходную задачу для тела с периодической системой соосных трещин к задаче для слоя $0 \leq y_3 \leq h$ со следующими условиями на его гранях:

$$\begin{aligned} u_3 &= 0 & (y_3 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi, r > a); \\ Q'_{3r} &= 0, \quad Q'_{3\theta} = 0 & (y_3 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < \infty); \\ u_3 &= 0, \quad Q'_{3r} = 0, \quad Q'_{3\theta} = 0 & (y_3 = h, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, для задачи о материале с начальными напряжениями

$$Q'_{33} = -\sigma(r, \theta) \quad (y_3 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi, r < a); \quad (5)$$

для задачи о сжатии материала вдоль трещин

$$Q'_{33} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi, r < a). \quad (6)$$

Отметим, что в случае задачи о сжатии тела вдоль трещин здесь рассматривается только симметричная форма локальной потери устойчивости материала вблизи трещин [3].

2. В [2] для случая однородного начального состояния (1) построены представления общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции; при этом вид этих представлений зависит от корней характеристического уравнения. Так, в случае равных корней $n_1 = n_2$ характеристического уравнения, которым в дальнейшем ограничимся, имеем следующие представления:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - z_1 \frac{\partial F}{\partial r}; & u_3 &= n_1^{-1/2}(m_1 - m_2 + 1)F - n_1^{-1/2}m_1\Phi - n_1^{-1/2}m_1z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}; \\ Q'_{33} &= C_{44} \left[(d_1l_1 - d_2l_2) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1l_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - d_1l_1z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right]; \\ Q'_{3r} &= C_{44} \left\{ n_1^{-1/2} \frac{\partial}{\partial r} [(d_1 - d_2)F - d_1\Phi] - n_1^{-1/2}d_1z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z_1} \right\}; \\ \Phi &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}; & z_1 &\equiv n_1^{-1/2}y_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Величины C_{44} , n_i , m_i , l_i , d_i ($i = 1, 2$) определяются выбором модели материала [2], а входящие в представления решений (7) функции φ , F , Φ являются гармоническими функциями своих аргументов.

Далее, выразим гармонические потенциальные функции, фигурирующие в (7), в виде интегральных разложений Фурье–Ханкеля по координатам z_1 , r

$$\begin{aligned} \varphi(r, z_1) &= -\int_0^\infty [B_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1) + B_2(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}; \\ F(r, z_1) &= \int_0^\infty [A_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1) + A_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1}; \\ \Phi(r, z_1) &= \int_0^\infty [B_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1) + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1}, \quad h_1 \equiv n_1^{-1/2}h. \end{aligned} \quad (8)$$

Удовлетворяя тем граничным условиям, которые заданы на всей области $y_3 = \text{const}$ (вторая и третья строчки в (4)), получим такие соотношения между неизвестными функциями, фигурирующими в (8):

$$A_1(\lambda) = 0, \quad B_1(\lambda) = h_1 \lambda A_2(\lambda), \quad B_2(\lambda) = \left(1 - \frac{d_2}{d_1} - h_1 \lambda \text{cth } \lambda h\right) A_2(\lambda). \quad (9)$$

Оставшиеся граничные условия приводят к системе парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [1 - g(\lambda)] \lambda A_2(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= \Sigma(r), \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} A_2(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad r > a, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$g(\lambda) = -\frac{e^{-\mu_1}}{\text{sh } \mu_1} - \frac{\mu_1}{k \text{sh}^2 \mu_1}; \quad \Sigma(r) = \frac{\sigma(r)}{k C_{44} d_1 l_1}; \quad \mu_1 \equiv \lambda h_1; \quad k \equiv \frac{d_2(l_1 - l_2)}{d_1 l_1}.$$

Для задачи о сжатии тела вдоль трещин следует положить $\Sigma(r) \equiv 0$.

Будем решать систему парных интегральных уравнений (10) методом подстановки [7], выбирая решение в виде, который позволяет тождественно удовлетворить второе уравнение в (10), а именно:

$$A_2(\lambda) = \int_0^a \omega(t) \sin \lambda t dt, \quad (11)$$

где $\omega(t)$ — неизвестная функция, непрерывная вместе со своей первой производной на интервале $[0, a]$.

Подставив выражения (11) в первое уравнение (10), после некоторых преобразований, которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое в безразмерной форме имеет вид

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} \sin \theta P(\xi \sin \theta) d\theta; \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1, \quad (12)$$

где $f(\xi) \equiv a^{-1} \omega(a\xi)$; $P(\xi) \equiv \Sigma(a\xi)$, а ядро имеет вид

$$\begin{aligned} K(\xi, \eta) &= R(\xi - \eta) - R(\xi + \eta), \\ R(z) &= \frac{1}{k\beta_1} \left[(k+1) \text{Re } \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1}\right) - \frac{z}{2\beta_1} \text{Im } \psi_1 \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1}\right) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$\beta_1 = a^{-1} h_1$; $\text{Re } \psi(1 + iz/2\beta_1)$, $\text{Im } \psi_1(1 + iz/2\beta_1)$ — соответственно действительная часть от пси-функции $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ (где $\Gamma(z)$ — гамма-функция) и мнимая часть от ее производной $\psi_1(z) = \frac{d}{dz} \psi(z)$.

3. Из решения уравнения (12) с учетом (11), (9)–(7) можно определить распределение напряжений и перемещений в материале. Рассматривая асимптотическое распределение напряжений вблизи края трещины в плоскости ее расположения $y_3 = 0$, $r > a$, получаем:

$$Q'_{33}(r, 0) = C_{44}d_1l_1k \frac{\omega(a)}{\sqrt{r^2 - a^2}} + O(1); \quad Q'_{3r}(r, 0) = 0. \quad (14)$$

Аналогично тому, как принято в линейной механике разрушения материалов без начальных напряжений [8], определяем коэффициенты интенсивности напряжений следующим образом:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r - a)]^{1/2} Q'_{33}(r, 0),$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r - a)]^{1/2} Q'_{3r}(r, 0). \quad (15)$$

Тогда, с учетом (14), для рассматриваемой задачи получаем:

$$K_I = C_{44}d_1l_1k\sqrt{\pi a}f(1); \quad K_{II} = 0, \quad (16)$$

где функция $f(\xi)$ определяется из (12).

Как видим, коэффициент интенсивности напряжений K_I зависит как от величин начальных напряжений и деформаций (поскольку величины C_{44} , d_1 , l_1 , k , а также функция f зависят от коэффициентов начального удлинения (укорочения) вдоль координатных осей λ_j , $j = \overline{1, 3}$), так и от геометрических параметров задачи (радиуса трещин и расстояния между ними).

Для задачи о сжатии тела вдоль плоскостей трещин (симметричная форма локальной потери устойчивости материала вблизи трещин) из (12) получим разрешающее однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = 0; \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1, \quad (17)$$

где ядро определяется из (13).

Таким образом, начальная линеаризованная задача о сжатии бесконечного тела вдоль периодической системы параллельных круговых трещин свелась к задаче на собственные значения относительно параметра начального укорочения $\lambda_1 < 1$ для однородного интегрального уравнения (17) (при этом параметр λ_1 нелинейным образом входит в ядро интегрального уравнения).

4. Рассмотрим в качестве примера высокоэластический несжимаемый материал с потенциалом Бартенева–Хазановича [9]. Параметры, входящие в (7), для этого материала определяются следующим образом:

$$\lambda_3 = \lambda_1^{-2}, \quad n_1 = n_2 = \lambda_1^{-3}, \quad m_1 = \lambda_1^{-3}, \quad m_2 = 1,$$

$$l_1 = \lambda_1^3, \quad l_2 = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^3), \quad d_1 = \lambda_1^{-3} + 1, \quad d_2 = 2, \quad k = \frac{3\lambda_1^3 - 1}{\lambda_1^3 + 1},$$

$$C_{44} = 2\mu\lambda_1^{-1}(1 + \lambda_1^3)^{-1}, \quad S_{11}^0 = 2\mu\lambda_1^{-1}(1 - \lambda_1^{-3}).$$

Таблица 1

β	0,0625	0,125	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0	10,0
λ_1	0,69336	0,69336	0,69336	0,69332	0,69326	0,69262	0,69334	0,69336

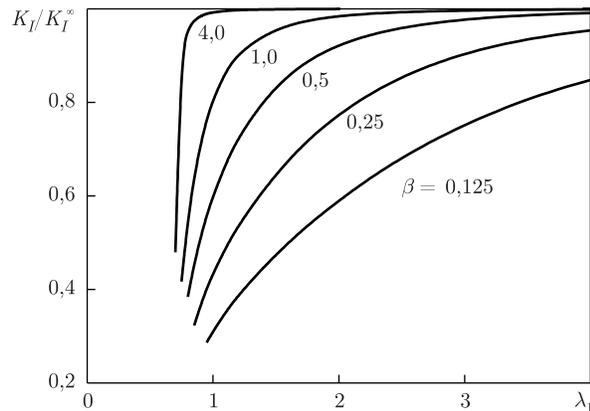


Рис. 1

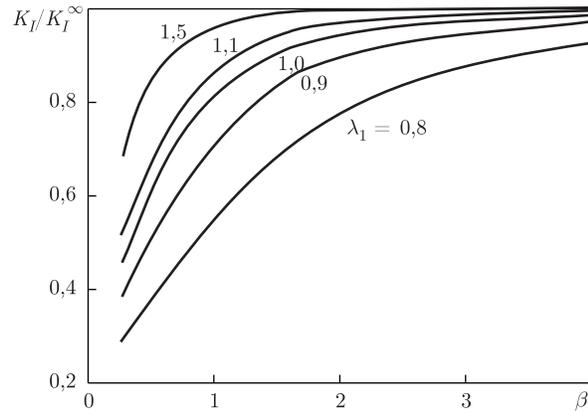


Рис. 2

В табл. 1 приведены значения критических параметров укорочения λ_1 , соответствующих симметричной форме локальной потери устойчивости материала при сжатии тела вдоль периодической системы соосных трещин, для разных значений безразмерного полурасстояния между трещинами β . При достаточно больших значениях β получаем значения λ_1 , совпадающие с критическими значениями $\lambda_1^* = 0,69336$, полученными в задаче о трещине в бесконечном материале [3].

На рис. 1 для задачи о материале с начальными напряжениями в виде (1), когда на берегах трещин действует равномерная нагрузка в виде $\sigma(r) = \sigma_0 = \text{const}$, приведена зависимость соотношений коэффициентов интенсивности напряжений K_I/K_I^∞ (где $K_I^\infty = 2\sigma_0\sqrt{a/\pi}$ — коэффициент интенсивности напряжений для изолированной трещины в бесконечном материале, см. [2]) от значений параметра начального укорочения (удлинения) λ_1 , обусловленного действием начальных напряжений сжатия — растяжения S_{11}^0 ($\lambda_1 < 1$ — начальное сжатие, $\lambda_1 > 1$ — начальное растяжение), для различных значений безразмерного полурасстояния между трещинами $\beta = ha^{-1}$. Как видим, начальные напряжения оказывают существенное влияние на коэффициенты интенсивности напряжений.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость соотношений коэффициентов интенсивности напряжений K_I/K_I^∞ от безразмерного полурасстояния между трещинами β для разных значений λ_1 . Из рисунка видим, что при возрастании расстояния между трещинами значения коэффициентов интенсивности напряжений для периодической системы соосных трещин нормального отрыва стремятся к значениям, полученным в задаче об изолированной трещине в бесконечном материале. Отметим также, что аналогично результатам, полученным для задачи о периодической системе трещин в бесконечном теле в рамках линейной механики разрушения [10], взаимовлияние трещин в линеаризованной задаче приводит к снижению (особенно существенному для малых значений β) значений коэффициента интенсивности напряжений K_I по сравнению со значением K_I^∞ , получаемым для изолированной трещины.

1. Гузь А. Н. К линеаризированной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
2. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 2).
3. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 4. Кн. 1).
4. Guz A. N. On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stress // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, No 4. – P. 316–323.
5. Guz A. N., Dyshel' M. Sh., Nazarenko V. M. Fracture and stability of materials and structural members with cracks: Approaches and results // Ibid. – 2004. – **40**, No 12. – P. 1323–1359.
6. Guz A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L. Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. and Appl. Fracture Mech. – 2007. – **48**. – P. 285–303.
7. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
8. Kassir M. K., Sih G. C. Mechanics of fracture. Three dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff, 1975. – Vol. 2. – 452 p.
9. Бартенева Г. М., Хазанович Т. Н. О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – **2**, № 1. – С. 21–28.
10. Хай М. В., Лаушник И. П. О взаимодействии периодической системы дискообразных трещин // Физико-механические поля в деформируемых средах. – Киев, 1978. – С. 65–73.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 16.04.2008

УДК 620.178.3

© 2008

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко, В. Е. Корсун**

О моделировании спектральных характеристик смешанного процесса вибраций

The theory of forming a simulated vibration with the use of spectral functions and spectral moments of an additive medley of stochastic and polyharmonic vibrations is given.

Эксплуатационная вибрация транспортных объектов в большинстве случаев представляет собой совокупность стохастических и полигармонических механических колебаний [1–4]. Такую вибрацию назовем смешанной и она записывается выражением

$$z(t) = \xi(t) + x(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — квазидетерминированный полигармонический вибропроцесс;

$$x_s = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad s = 1, 2; \quad (2)$$