

## СТОХАСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЙ И СТОЛКНОВЕНИЯ САМОЛЕТОВ

---

**Abstract:** The generalized stochastic method of prediction of conflict probability and aircraft collision is considered, and also its practical application with taking into account a probability character of factors causing an aircraft deviation from planned trajectory parameters, and correlation dependence of deviations in time, which are described by Ornstein-Uhlenbeck process. The multi-dimensional stochastic equation of relative aircraft movement is derived, and the coefficients of a differential operator for a practical resolution of a parabolic partial equation are determined which give an evaluation of probability of a conflict in prediction time interval. The procedure of conflict probability prediction is given.

**Key words:** air Traffic Management, Safe Separation Standard, Conflict Prediction, Conflict Probability, Stochastic Deviation Model, Diffusive Process.

**Анотація:** Розглянуто узагальнений стохастичний метод прогнозування імовірності конфлікту і зіткнення літаків, а також його практичне застосування з урахуванням імовірнісного характеру збурювань, що приводять до відхилення літака від заданих параметрів траєкторії польоту, і кореляційної залежності відхилень у часі, що описуються з використанням випадкового процесу Орнштейна-Уленбека. Виводиться багатомірне стохастичне рівняння, що описує відносний рух літаків, і визначаються коефіцієнти диференціального оператора для практичного рішення параболічного рівняння в частинних похідних, що дає оцінку імовірності конфлікту на заданому прогнозованому інтервалі часу. Дається процедура прогнозування конфлікту.

**Ключові слова:** керування повітряним рухом, Норма безпечного розділення, Прогнозування конфлікту, Імовірність конфлікту, Стохастична модель відхилення, Дифузійний процес.

**Аннотация:** Рассмотрен обобщенный стохастический метод прогнозирования вероятности конфликта и столкновения самолетов, а также его практическое применение с учетом вероятностного характера возмущений, приводящих к отклонению самолета от заданных параметров траектории полета, и корреляционной зависимости отклонений во времени, которые описываются с использованием случайного процесса Орнштейна-Уленбека. Выводится многомерное стохастическое уравнение, описывающее относительное движение самолетов, и определяются коэффициенты дифференциального оператора для практического решения параболического уравнения в частных производных, которое дает оценку вероятности конфликта на заданном прогнозируемом интервале времени. Дается процедура прогнозирования вероятности конфликта.

**Ключевые слова:** управление воздушным движением, Норма безопасного разделения, Прогнозирование конфликта, Вероятность конфликта, Стохастическая модель отклонения, Диффузионный процесс.

### 1. Введение

В настоящее время в мировом авиационном сообществе активно обсуждается проблема безопасности воздушного движения в связи с перспективой внедрения новых концепций организации воздушного движения и перехода от централизованного управления воздушным движением (УВД) к децентрализованному, заменой традиционного УВД на кооперативное УВД. Кооперативное УВД – новая концепция, которая призвана повысить производительность и безопасность воздушного движения путем оптимизации взаимодействия диспетчеров, экипажей самолетов и других служб за счет интеграции цифровой системы передачи данных, улучшения методов наблюдения и автоматизации [1].

Необходимость перехода к новой организации воздушного движения обусловлена наблюдаемым и прогнозируемым ростом интенсивности воздушного движения и направлена на повышение пропускной способности воздушного пространства. Предполагается, что решение

проблемы возможно за счет введения режима "свободного полета", а также сокращения действующих норм эшелонирования.

Из-за наличия достаточно большого числа факторов, приводящих к отклонению самолета от заданных параметров траектории движения, возможны ситуации, когда нарушаются нормы безопасного расстояния между самолетами и возникает угроза их столкновения, даже если первоначально спланированные полеты являются бесконфликтными и имеется система, контролирующая воздушное движение. В условиях оперативно изменяющейся воздушной обстановки, связанной с изменением направления и динамикой относительного движения самолетов, а также при сокращении норм эшелонирования значительно возрастает роль системы обнаружения и предупреждения опасного сближения самолетов.

В настоящее время имеется большое число методов и алгоритмов обнаружения и предупреждения конфликтов. Наиболее полный их обзор и классификацию можно найти в работах [2,3]. В работе [4] обосновывается преимущество вероятностных методов оценки конфликтов.

К вероятностным методам относится также предложенный ранее в работе [5] обобщенный стохастический метод оценки характеристик потенциальных конфликтов, в котором учитываются стохастический характер и корреляционная зависимость во времени отклонений самолета от заданной траектории управляемого полета.

Настоящая работа посвящена проблеме прогнозирования вероятности столкновения самолетов в условиях реализации концепции кооперативного УВД, при котором вся необходимая информация должна быть доступна сторонам, вовлеченным в принятие решений. При этом система УВД должна иметь доступ к навигационным данным маршрута полета, содержащимся в бортовых системах управления полетом. Конкретизируется обобщенный стохастический метод для оценки вероятности конфликта, предложенный ранее в [5]. Выводится многомерное стохастическое уравнение, описывающее относительное движение самолетов для определенных условий управляемого полета, и определяются коэффициенты дифференциального оператора для практического решения параболического уравнения, которое дает оценку вероятности конфликта на заданном прогнозируемом интервале времени.

## 2. Постановка задачи

Постановка задачи определения вероятности потенциального конфликта и столкновения самолетов состоит в следующем. Принимается, что процесс относительного движения двух самолетов представляет собой случайный процесс, который описывается многомерным стохастическим дифференциальным уравнением общего вида:

$$d\vec{X}'(t) = f(\vec{X}'(t), t)dt + Ld\vec{W}(t); \quad \vec{X}'(t) \in \mathfrak{R}^{2N}, \quad (1)$$

где  $\vec{X}'(t) = [\vec{X}'_1(t)^T \vec{X}'_2(t)^T]^T$  – объединенный вектор состояний, состоящий из векторов состояний  $\vec{X}'_1(t)$  и  $\vec{X}'_2(t)$ , каждый размерностью  $N$ , описывающих движение соответственно первого и второго самолетов ( $j = 1, 2$ ) в общей системе координат;  $L$  – диффузионная матрица;

$\vec{W}(t) = [\vec{W}_1(t)^T \vec{W}_2(t)^T]^T$ ;  $\vec{W}_j(t)$  – многомерный винеровский процесс;  $\vec{W}_1(t)$  и  $\vec{W}_2(t)$  – независимы.

Вектор относительного положения самолетов (разделение самолетов)  $\vec{r}(t)$  при  $\vec{r}(t) \in \mathfrak{R}^n$  представляет собой случайный процесс, который может быть получен в результате непрерывного отображения объединенного вектора состояний для пары самолетов  $\vec{X}'(t) = [\vec{X}'_1(t)^T \vec{X}'_2(t)^T]^T \in \mathfrak{R}^{2N}$  ( $n < 2N$ ) из  $\mathfrak{R}^{2N}$  в  $\mathfrak{R}^n$  некоторым оператором  $\mathfrak{S}$ :

$$\vec{r}(t) = \mathfrak{S}\vec{X}'(t). \quad (2)$$

Область конфликта  $K$  определяется с учетом (2) как

$$K = \{\vec{X}' \in \mathfrak{R}^{2N} : \|\vec{r}\| \leq d\}, \quad (3)$$

где  $d$  – заданная норма безопасного разделения самолетов. Конфликт определяется как прогнозируемое нарушение установленной нормы (порога) безопасного разделения самолетов.

Задача заключается в определении вероятности конфликта  $P_c$ , т.е. вероятности нарушения нормы безопасного разделения (или столкновения) самолетов на заданном интервале времени  $[0, T]$

$$P_c = P\{\exists t \in [0, T] : \|\vec{r}(t)\| \leq d\}. \quad (4)$$

Если значение нормы безопасности  $d$  установить равным физическим размерам самолетов, то выполнение условия (4) означает столкновение самолетов. Считается, что в начальный момент времени  $t = 0$  обеспечивается безопасное разделение самолетов, т.е.  $\|\vec{r}(0)\| = \|\vec{r}_0\| > d$ .

### 3. Обобщенный стохастический метод определения вероятности конфликта

Для данной выше общей постановки задачи ранее в работе [5] был представлен обобщенный стохастический метод оценки характеристик потенциальных конфликтов. Поставленная задача аналогична задаче достижения границы многомерным диффузионным процессом [6].

Для ее решения используется дифференциальный (инфинитезимальный [7]) оператор  $\mathcal{A}$ , который позволяет установить связь диффузионного процесса с его вероятностными характеристиками.

Основу обобщенного метода составляет уравнение, описывающее изменение условной вероятности конфликта

$$q(t, \vec{X}') = P\{\exists \tau \in [t, T] : \|\vec{r}(\tau)\| \leq d \mid \vec{X}'(t) = \vec{X}'\} \quad (5)$$

как вероятности выхода многомерного диффузионного процесса за пределы области, являющейся дополнением области конфликта  $K$  (3),

$$K^c = \mathfrak{R}^{2N} \setminus K = \{\vec{X}' \in \mathfrak{R}^{2N} : \|\vec{r}\| > d\}. \quad (6)$$

Эта вероятность (5) удовлетворяет уравнению в частных производных параболического

типа для условия (6) [5]:

$$-\frac{\partial q(t, \vec{X}')}{\partial t} = \mathcal{A}q(t, \vec{X}'), \quad t \in [0, T), \quad \vec{X}' \in K^c \quad (7)$$

с граничными условиями

$$q(t, \vec{X}') = 1; \quad \vec{X}' \in \partial K = \{\vec{X}' \in \mathfrak{R}^{2N} : \|\vec{r}\| = d\}, \quad t \in [0, T)$$

и условием в конце временного интервала

$$q(T, \vec{X}') = 0, \quad \vec{X}' \in K^c.$$

Причем  $q(t, X') \in C(D)$ ,

$$D = \{(t, X') : t \in [0, T), X' \in K^c \cup \partial K \text{ либо } t = T, X' \in K^c\}.$$

Здесь  $\mathcal{A}$  – инфинитезимальный оператор соответствующего диффузионного процесса, структура и коэффициенты которого определяются конкретными условиями задачи и видом диффузионного процесса относительного движения самолетов (1). В той же статье [5] определена структура инфинитезимального оператора в общем виде.

Искомая вероятность на интервале времени  $t \in [0, T]$  определяется в результате решения уравнения в частных производных параболического типа (7) и равна

$$P_c = q(0, \vec{X}'_0); \quad \vec{X}'_0 = \vec{X}'(0) \in K^c. \quad (8)$$

Для решения задачи необходимо конкретизировать выражение для инфинитезимального оператора и значения его коэффициентов, что определяется принятой математической моделью, описывающей стохастический процесс относительного движения двух самолетов, и ее размерностью.

#### 4. Модель диффузионного процесса относительного движения самолетов

Движение каждого самолета будем описывать в частной, в общем случае трехмерной, системе координат  $x_j O_j y_j$  с осями, ориентированными соответственно вдоль линии заданного пути  $x_j$ , в боковом направлении  $y_j$  и вертикально вверх  $z_j$ , а относительное движение самолетов опишем в общей системе координат  $x O y$ .

Для описания процесса отклонения самолета от заданных параметров траектории полета используем случайный процесс Орнштейна-Уленбека [8]. Выбор этого процесса обосновывается сочетанием ряда его свойств. Стационарный процесс Орнштейна-Уленбека является марковским, гауссовским и имеет непрерывные траектории. Эти свойства наиболее адекватны реальному управляемому движению самолета в режиме стабилизации заданных параметров траектории полета при воздействии случайных возмущающих факторов. Заметим, что исследование [9] подтверждает гипотезу о винеровском характере процесса отклонения от заданной скорости полета.

Примем, что отклонение самолета от заданной скорости полета по каждой координате описывается случайным процессом Орнштейна-Уленбека

$$dv = -\alpha v dt + \sigma dW, \quad (9)$$

где  $v(t)$  – отклонение от заданной скорости  $v_0$ ;  $\alpha > 0$ ,  $\sigma > 0$ ;  $W = W(t)$  – стандартный винеровский процесс. Примем также, что отклонения по отдельно взятой координате не зависят от других.

Рассмотрим задачу определения вероятности конфликта между двумя самолетами, летящими по пересекающимся траекториям на одинаковой высоте (рис. 1).

#### 4.1. Описание движения самолета

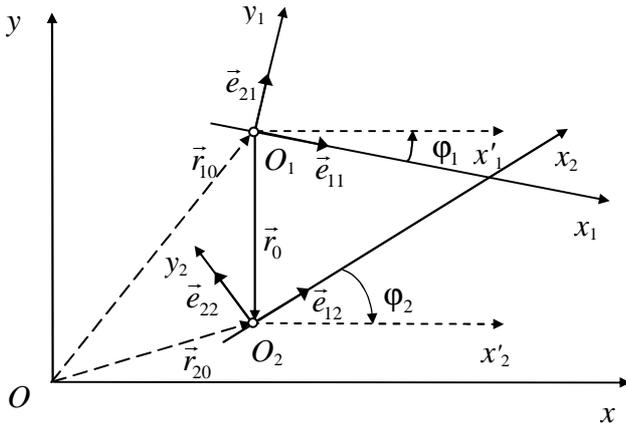


Рис. 1. Относительное движение двух самолетов

Процесс движения самолета опишем в локальной системе координат  $x_j O_j y_j$ , в которой траектория  $j$ -го самолета характеризуется вектором состояний

$$\vec{X}_j = [x_j, y_j, v_{xj}, v_{yj}]^T. \quad (10)$$

На основании принятой модели отклонения от заданной скорости полета (9) запишем для каждого самолета уравнение (здесь индекс  $j$  опущен, чтобы не загромождать запись), описывающее

изменение боковой координаты для вектора  $\vec{z}_y(t) = [y(t) \quad v_y(t)]^T$ ,  $t \geq 0$ ,

$$d\vec{z}_y(t) = v_y(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_y \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y \end{bmatrix} dW_y(t); \quad \vec{z}_y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_y(0) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где  $v_y(0)$  – заданное неслучайное значение поперечной скорости и уравнение, описывающее изменение продольной координаты для вектора  $\vec{z}_x(t) = [x(t) \quad v_x(t)]^T$ ,  $t \geq 0$ .

$$d\vec{z}_x(t) = \begin{bmatrix} (v_0 + v_x)dt \\ -\alpha_x v_x dt + \sigma_x dW_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 + v_x \\ -\alpha_x v_x \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_x \end{bmatrix} dW_x(t); \quad \vec{z}_x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_x(0) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $v_0$  – заданная скорость полета, при этом  $dx = v_0 dt + v_x dt$ ;  $v_x(0)$  – заданная неслучайная величина.

Для полного вектора состояний

$$\vec{X}(t) = [x(t), y(t), v_x(t), v_y(t)]^T, \quad t \geq 0 \quad (13)$$

процесс  $\vec{X}(t)$  является диффузионным и на основании (11), (12) удовлетворяет уравнению

$$d\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} v_0 + v_x \\ v_y \\ -\alpha_x v_x \\ -\alpha_y v_y \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_x dW_x \\ \sigma_y dW_y \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad d\vec{X} = \left[ v_0 \vec{e} + \Lambda \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \right] dt + S d\vec{W}, \quad (14)$$

где

$$\vec{e} = [1, 0, 0, 0]^T; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha_x & 0 \\ 0 & -\alpha_y \end{bmatrix}; \quad \vec{W} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix}, \quad D = \text{diag}[\sigma_x, \sigma_y].$$

Начальное значение  $\vec{X}(0)$  (13) является неслучайным вектором  $\vec{X}(0) = [0, y(0), v_x(0), v_y(0)]^T$ .

#### 4.2. Описание относительного движения самолетов

Процесс относительного движения самолетов опишем в общей системе координат  $xOy$  (рис. 1).

Пусть  $\vec{r}_{j0}$  – вектор, соответствующий точке  $O_j$  начального положения  $j$ -го самолета. Тогда вектор относительного положения самолетов равен

$$\vec{r}(t) = (\vec{r}_{20} - \vec{r}_{10}) + x_2(t)\vec{e}_{12} + y_2(t)\vec{e}_{22} - x_1(t)\vec{e}_{11} - y_1(t)\vec{e}_{21}. \quad (15)$$

При этом  $\vec{r}(0) = \vec{r}_{20} - \vec{r}_{10}$ , а  $\vec{e}_{1j}, \vec{e}_{2j}$  – единичные базисные векторы для соответствующей локальной системы в общей системе координат (рис. 1):

$$\vec{e}_{1j} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \end{bmatrix}; \quad \vec{e}_{2j} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_j \\ \cos \varphi_j \end{bmatrix}.$$

Тогда для вектора  $\vec{r}(t)$  (15) запишем

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \begin{bmatrix} -U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

где ортогональные матрицы  $U_1$  и  $U_2$  равны

$$U_j = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2 \quad (16)$$

или, используя оператор проектирования на пространственные координаты  $P_{xy} : \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,

$$P_{xy} \vec{X}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix}, \quad \text{где } P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{запишем}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + P_{xy} \vec{X}'_2(t) - P_{xy} \vec{X}'_1(t). \quad (17)$$

Преобразуем вектор состояний (13) каждого самолета из локальной в общую систему координат, используя соответствующую матрицу (16) поворота на угол  $\varphi_j$  (рис. 1),

$$\vec{X}'_j(t) = \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} X_j(t) = \begin{bmatrix} U_j \begin{bmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{bmatrix} \\ U_j \begin{bmatrix} v_{xj}(t) \\ v_{yj}(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

На основании (14) имеем

$$d\left(\begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} \vec{X}_j\right) = \left(v_{0j} \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} \vec{e} + \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} \Lambda_j U_j^{-1} U_j \begin{bmatrix} v_{xj} \\ v_{yj} \end{bmatrix}\right) dt + \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} S_j d\vec{W}_j$$

или

$$d\vec{X}'_j = (\vec{h}_j + M_j \vec{X}'_j) dt + \Sigma_j d\vec{W}_j. \quad (18)$$

Здесь

$$\vec{h}_j = v_{0j} \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} \vec{e}; \quad M_j = \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} \Lambda_j P_v \begin{bmatrix} U_j^T & 0 \\ 0 & U_j^T \end{bmatrix}; \quad \Sigma_j = \begin{bmatrix} U_j & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix} S_j; \quad (U^{-1} = U^T), \quad (19)$$

$P_v : \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  – оператор проектирования на скоростные координаты, такой,

$$\text{что } P_v \vec{X}_j = [v_{xj} \quad v_{yj}]^T, \text{ т.е. } P_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для объединенного вектора состояний для двух самолетов  $\vec{X}'(t) = [\vec{X}'_1(t)^T \quad \vec{X}'_2(t)^T]^T$  получим следующее диффузионное уравнение относительного движения самолетов:

$$d\vec{X}'(t) = \begin{bmatrix} \vec{h}_1 + M_1 \vec{X}'_1(t) \\ \vec{h}_2 + M_2 \vec{X}'_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} W_{x1}(t) \\ W_{y1}(t) \\ W_{x2}(t) \\ W_{y2}(t) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где  $\{W_{xj}(t), W_{yj}(t), j = 1, 2\}$  – взаимно независимые винеровские процессы.

Начальное значение для объединенного вектора состояний  $\vec{X}'(0)$  определяется по результатам наблюдения за траекториями полета самолетов на момент времени  $t = 0$ :

$$\vec{X}'(0) = \begin{bmatrix} \vec{X}'_1(0) \\ \vec{X}'_2(0) \end{bmatrix}; \quad \vec{X}'_1(0) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_1 y_1(0) \\ \cos \varphi_1 y_1(0) \\ U_1 \begin{bmatrix} v_{x1}(0) \\ v_{y1}(0) \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \quad \vec{X}'_2(0) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_2 y_2(0) \\ \cos \varphi_2 y_2(0) \\ U_2 \begin{bmatrix} v_{x2}(0) \\ v_{y2}(0) \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

## 5. Определение коэффициентов инфинитезимального оператора для уравнения вероятности конфликта

Процесс относительного движения самолетов (20) является диффузионным. Структура дифференциального оператора  $\mathcal{A}$  в общем случае для многомерного диффузионного процесса

определена в работе [5]. Найдем коэффициенты дифференциального оператора, соответствующего стохастическому дифференциальному уравнению (20), который для заданных условий задачи действует на функцию  $g = g(\bar{X}) = g(x_1, y_1, v_{x1}, v_{y1}, x_2, y_2, v_{x2}, v_{y2})$  из  $C^2(\mathfrak{R}^8)$  по правилу [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}g = & \sum_{j=1}^2 \left[ (b_{xj} + v_{xj}) \frac{\partial g}{\partial x_j} + (b_{yj} + v_{yj}) \frac{\partial g}{\partial y_j} + (-c_j v_{xj} + d_j v_{yj}) \frac{\partial g}{\partial v_{xj}} + \right. \\ & \left. + (d_j v_{xj} - e_j v_{yj}) \frac{\partial g}{\partial v_{yj}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[ \alpha_j \frac{\partial^2 g}{\partial v_{xj}^2} + 2\beta_j \frac{\partial^2 g}{\partial v_{xj} \partial v_{yj}} + \gamma_j \frac{\partial^2 g}{\partial v_{yj}^2} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $b_{xj}, b_{yj}, c_j, d_j, e_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  – заданные числа, и матрицы  $\begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \beta_j & \gamma_j \end{bmatrix}$  положительно определены.

Запишем в явном виде вектор  $\vec{h}$  и матрицы  $M, \Sigma$  (19) для уравнения (18). Вектор  $\vec{h}$  равен

$$\vec{h}_j = v_{0j} \begin{bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Далее для матрицы  $M$  определим

$$\Lambda_j U_j^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha_{xj} & 0 \\ 0 & -\alpha_{yj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & \sin \varphi_j \\ -\sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & \sin \varphi_j \\ -\sin \varphi_j & \cos \varphi_j \\ -\alpha_{xj} \cos \varphi_j & -\alpha_{xj} \sin \varphi_j \\ \alpha_{yj} \sin \varphi_j & -\alpha_{yj} \cos \varphi_j \end{bmatrix}$$

или  $\Lambda_j U_j^T = \begin{bmatrix} U_j^T \\ N_j \end{bmatrix}$ , где  $N_j = \begin{bmatrix} -\alpha_{xj} \cos \varphi_{2j} & -\alpha_{xj} \sin \varphi_{2j} \\ \alpha_{yj} \sin \varphi_{2j} & -\alpha_{yj} \cos \varphi_{2j} \end{bmatrix}$ .

Тогда  $M_j = \begin{bmatrix} U_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j^T \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ U_j N_j \end{bmatrix}, \quad (24)$

где  $U_j N_j = \begin{bmatrix} -\alpha_{xj} \cos^2 \varphi_j - \alpha_{yj} \sin^2 \varphi_j & (\alpha_{yj} - \alpha_{xj}) \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ (\alpha_{yj} - \alpha_{xj}) \sin \varphi_j \cos \varphi_j & -\alpha_{xj} \sin^2 \varphi_j - \alpha_{yj} \cos^2 \varphi_j \end{bmatrix}$ ;  $I$  – единичная матрица,

и, наконец, матрица  $\Sigma$  равна

$$\Sigma_j = \begin{bmatrix} U_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ U_j D_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_{xj} \cos \varphi_j & -\sigma_{yj} \sin \varphi_j \\ \sigma_{xj} \sin \varphi_j & \sigma_{yj} \cos \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Теперь найдем матрицу коэффициентов диффузии для объединенного стохастического процесса, описывающего относительное движение самолетов (20), которая определяется как

$$LL^T = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \Sigma_1^T & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \Sigma_2^T \end{bmatrix}.$$

Для матрицы  $\Sigma_j$  (25) имеем

$$\Sigma_j \Sigma_j^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{xj}^2 \cos^2 \varphi_j + \sigma_{yj}^2 \sin^2 \varphi_j & (\sigma_{xj}^2 - \sigma_{yj}^2) \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ 0 & 0 & (\sigma_{xj}^2 - \sigma_{yj}^2) \sin \varphi_j \cos \varphi_j & \sigma_{xj}^2 \sin^2 \varphi_j + \sigma_{yj}^2 \cos^2 \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Далее определим для  $j$ -й составляющей коэффициент сноса, используя выражения (23),

(24):

$$\vec{h}_j + M_j \vec{X}'_j = \begin{bmatrix} v_{0j} \cos \varphi_j + v_{xj} \\ v_{0j} \sin \varphi_j + v_{yj} \\ -(\alpha_{xj} \cos^2 \varphi_j + \alpha_{yj} \sin^2 \varphi_j) v_{xj} + (\alpha_{yj} - \alpha_{xj}) \sin \varphi_j \cos \varphi_j v_{yj} \\ (\alpha_{yj} - \alpha_{xj}) \sin \varphi_j \cos \varphi_j v_{xj} - (\alpha_{xj} \sin^2 \varphi_j + \alpha_{yj} \cos^2 \varphi_j) v_{yj} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

В результате получим выражение для дифференциального оператора (22) с учетом (26),

(27):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}g = & \sum_{j=1}^2 \left[ (v_{0j} \cos \varphi_j + v_{xj}) \frac{\partial g}{\partial x_j} + (v_{0j} \sin \varphi_j + v_{yj}) \frac{\partial g}{\partial y_j} + (-c_j v_{xj} + d_j v_{yj}) \frac{\partial g}{\partial v_{xj}} + \right. \\ & \left. + (d_j v_{xj} - e_j v_{yj}) \frac{\partial g}{\partial v_{yj}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[ (\sigma_{xj}^2 \cos^2 \varphi_j + \sigma_{yj}^2 \sin^2 \varphi_j) \frac{\partial^2 g}{\partial v_{xj}^2} + \right. \\ & \left. + 2(\sigma_{xj}^2 - \sigma_{yj}^2) \sin \varphi_j \cos \varphi_j \frac{\partial^2 g}{\partial v_{xj} \partial v_{yj}} + (\sigma_{xj}^2 \sin^2 \varphi_j + \sigma_{yj}^2 \cos^2 \varphi_j) \frac{\partial^2 g}{\partial v_{yj}^2} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$b_{xj} = v_{0j} \cos \varphi_j; \quad b_{yj} = v_{0j} \sin \varphi_j; \quad c_j = \alpha_{xj} \cos^2 \varphi_j + \alpha_{yj} \sin^2 \varphi_j; \quad d_j = (\alpha_{yj} - \alpha_{xj}) \sin \varphi_j \cos \varphi_j;$$

$$e_j = \alpha_{xj} \sin^2 \varphi_j + \alpha_{yj} \cos^2 \varphi_j; \quad \alpha_j = \sigma_{xj}^2 \cos^2 \varphi_j + \sigma_{yj}^2 \sin^2 \varphi_j; \quad \beta_j = (\sigma_{xj}^2 - \sigma_{yj}^2) \sin \varphi_j \cos \varphi_j;$$

$$\gamma_j = \sigma_{xj}^2 \sin^2 \varphi_j + \sigma_{yj}^2 \cos^2 \varphi_j.$$

## 6. Заключение

Таким образом, рассмотрены обобщенный стохастический метод оценки вероятности конфликта и практическое применение метода, в котором учитывается вероятностный характер возмущений, приводящих к отклонению самолетов от заданных траекторий полета, и корреляционные зависимости отклонений во времени. В результате определены все коэффициенты для инфинитезимального оператора диффузионного процесса, описывающего относительное движение двух самолетов, необходимые для численного решения поставленной задачи оценки вероятности конфликта самолетов на заданном интервале времени  $t \in [t_0, T]$ . Процедура решения задачи оценки вероятности нарушения нормы безопасного разделения двух самолетов на

интервале времени  $t \in [t_0, T]$  состоит в вычислении значений определенных коэффициентов дифференциального оператора  $\mathcal{A}$  (28) для процесса (20) с вектором состояний, включающим отклонения по скорости, которые описываются случайным процессом Орнштейна-Уленбека (9); решении численными методами уравнения (7) в частных производных параболического типа с учетом условия конфликта (3), (17) и нахождении искомой вероятности конфликта (8)  $P_c = q(0, \vec{X}'(0))$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. System Performance Characteristics of Centralized and Decentralized Air Traffic Separation Strategies / J. Krozel, M. Peters, K.D. Bilimoria, C. Lee and J.S.B. Mitchellin // USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar, Santa Fe. – 2001.– <http://atm2001.eurocontrol.fr/finalpapers/pap185.pdf>.
2. Kuchar J.K., Yang L.C. A Review of Conflict Detection and Resolution Modeling Methods // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2000. – 1(4). – P. 179–189.
3. Stochastic conflict detection model revisited / K. Blin, M. Akian, F. Bonnans, E. Hoffman, C. Martini, K.A. Zenghal // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. – Denver, CO. – 2000. – August. – <http://www.eurocontrol.fr/projects/cospace/archive/gnc00.pdf>.
4. Bakker G.J., Kremer H.J., Blom H.A.P. Geometric and probabilistic approaches towards conflict prediction // 3rd USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar, Napoli. – 2000. – 13–16 June. – <http://atm-seminar-2000.eurocontrol.fr/acceptedpapers/pdf/paper60.pdf>.
5. Харченко В.П., Кукуш А.Г., Васильев В.Н. Обобщенный стохастический метод оценки характеристик потенциальных конфликтов управляемого воздушного движения // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 81–93.
6. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
7. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
8. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы: Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 366 с.
9. Paielli R.A. Empirical test of conflict probability estimation // USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar. – Orlando. – 1998. – December. – <http://russp.org/CPEtest.pdf>.