УДК 519.862

А.А. АЛЄКСЄЄВ

МЕХАНІЗМ ОБЧИСЛЕННЯ ПОДАТКІВ НА ЗАРОБІТНУ ПЛАТУ І МАЙНО

Abstract: *Well-known problems of labor activity and tax policy are considered under the conditions of differentiation of the incomes of workers with taking into account the necessary relation between the expenditures of living labor and previous labor (capital). New problems are formulated in the form of systems of nonlinear equations.*
Key words: *taxes, wage, labor activity, production function, living labor, capital, consumption function, property.*

Анотація: *Відомі задачі трудової активності і податкової політики розглядаються в умовах диференціації доходів працівників з урахуванням необхідного співвідношення між витратами живої і минулої праці (капіталу). Нові задачі формулюються у вигляді систем нелінійних рівнянь.*
Ключові слова: *податки, заробітна плата, трудова активність, виробнича функція, жива праця, капітал, функція споживання, майно.*

Аннотация: *Известные задачи трудовой активности и налоговой политики рассматриваются в условиях дифференциации доходов работающих с учетом необходимого соотношения между затратами живого и прошлого труда (капитала). Новые задачи формулируются в виде систем нелинейных уравнений.*
Ключевые слова: *налоги, заработная плата, трудовая активность, производственная функция, живой труд, капитал, функция потребления, имущество.*

1. Постановка задачі

Класичні задачі моделювання трудової активності і податкової політики [1] мають продовження у напрямках диференціації доходів працівників, урахування не тільки живої, а й минулої праці (капіталу). Виникають питання можливості існування економіки із заданими ставками податків на зарплату і майно. Які повинні бути мінімальні розміри майна, діяльності, доходів, споживання, кількості працюючих? Їх взаємні зв'язок та впливи. Для вирішення цих питань знайшла застосування критеріальна функція, побудована з використанням підходу Р. Стоуна:

$$\max_{x,\{y_i\}} U = (x - x_0)^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} (b_i - y_i)^{1-\alpha}, \qquad (1)$$

де $(x - x_0)^{\alpha}$ – функція споживання Стоуна;

x – дохід споживачів;

x_0 – мінімальний рівень необхідного споживання;

α – коефіцієнт еластичності споживання доходу;

y_1 – витрати праці: кількість працюючих в i-й групі;

b_i – обмеження кількості працюючих;

n – кількість груп працюючих.

Частка критеріальної функції $(b_i - y_i)^{1-\alpha}$ втілює "гуманітарну" компоненту – вивільнення працюючих.

Обмеження доходу:

$$x_0 \le x \le \sum_{i=1}^{n} \left((1-\gamma_i) q_i y_i + a_i k_i + (1 - Z_i)(m_i - k_i)\right), \qquad (2)$$

де q_i – заробітна плата;

γ_i – ставка податку на заробітну плату;

k_i – вкладений капітал;

a_i – коефіцієнт витрат (амортизації) вкладеного капіталу;

m_1 – вартість майна;

Z_i – ставка податку на майно. Оподатковується лише майно, яке не вкладається у виробництво.

2. Геометричний зміст задачі

Він представлений на рис. 1 на випадок $n = 1$ (тоді індекс i опускається).

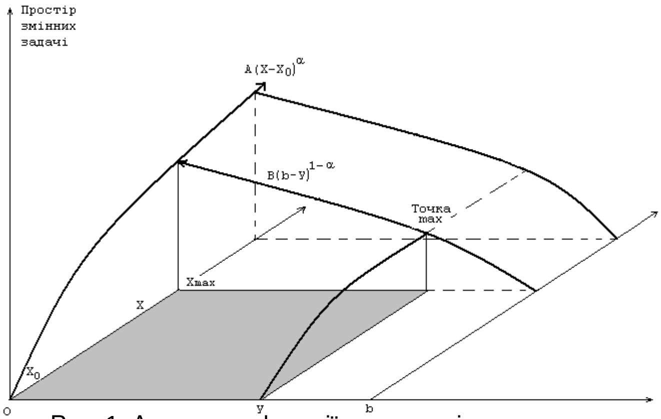

Рис. 1. Аргументи функції корисності

3. Особливості задачі та умови оптимізації

Багаторічні спостереження виявили стійке співвідношення між витратами праці і капіталу [2]: на кожну одиницю живої праці у сучасному виробництві потрібно витратити 2-3 одиниці минулої праці (сировини, устаткування, транспорту, навчання тощо). Подібне стійке співвідношення використовується при побудові моделі виробничої функції Кобба-Дугласа [2]. Позначимо таке співвідношення:

$$K_i = \theta_i y_i , \tag{3}$$

де θ – коефіцієнт співвідношення між витратами живої і минулої праці.

Тоді, перетворюючи праву нерівність (2) у рівність за допомогою фиктивної змінної, визначаємо умови екстремуму (1) методом Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dx} = \alpha(x - x_0)^{\alpha-1} \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - y_i)^{1-\alpha} = \lambda, & (4) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dy_i}} = -(1-\alpha)(x - x_0)^{\alpha} \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - y_i)^{1-\alpha}}{b_i - y_i} = -\lambda\varphi_i , & (5) \end{cases}$$

де $\varphi_i = (1-\gamma_i)q_i + a_i\theta_i - (1-Z_i)\theta_i , \qquad i = \overline{1,n}.$ (6)

Поділимо (4) на (5) і отримуємо

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-x_0)^{-1}(b_i-y_i)=\frac{1}{\varphi_i}. \tag{7}$$

Звідси
$$y_i=b_i-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x-x_0}{\varphi_i}, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Процес максимізації (1) з підстановкою (8) і з урахуванням (3), (6) у праву частку (2) перетворює її у рівність

$$x=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i b_i-\frac{(1-\alpha)(x-x_0)}{\alpha}+(1-Z_i)m_i\right), \qquad i=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Звідси
$$x=\frac{(1-\alpha)nx_0+\alpha\hat{x}}{(1-\alpha)n+\alpha}, \tag{10}$$

де
$$\hat{x}=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i b_i+(1-Z_i)m_i\right). \tag{11}$$

З (8) маємо
$$y_i=b_i-\frac{(1-\alpha)(\hat{x}-x_0)}{\omega\varphi_i}, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

де
$$\omega=(1-\alpha)n+\alpha. \tag{13}$$

З (10) – (12) випливає можливість визначення доходу (x) і витрат праці (y_i) в умовах майнових ризиків, коли величини капіталу, майна (m_i) підлеглі випадковостям, тобто стають випадковими величинами. Тоді функції розподілу результативних змінних (x, y_i) визначаються через функції розподілу величин m_i (оскільки ці змінні виражені через лінійні комбінації останніх).

4. Критерій оптимізації ставок податків на зарплату

$$\max_{\gamma_i} F_i=q_i\gamma_i y_i+Z_i(m_i-\theta_i y_i), \qquad i=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Умови екстремуму за податком на заробітну плату:

$$\frac{1}{q_i}\frac{dF_i}{d\gamma_i}=y_i+\gamma_i\frac{dy_i}{d\gamma_i}=b_i-\frac{(1-\alpha)(\hat{x}-x_0)}{\omega\varphi_i}+\frac{(1-\alpha)\gamma_i q_i}{\omega}\cdot\frac{b_i\varphi_i-(\hat{x}-x_0)}{\varphi_i^2}=0. \tag{15}$$

Звідси

$$b_i\varphi_i^2\omega-(1-\alpha)\left[(\hat{x}-x_0)\varphi_i-\gamma_i q_i b_i\varphi_i+\gamma_i q_i(\hat{x}-x_0)\right]=0. \tag{16}$$

З (6) при $\theta=0$ $\gamma_i q_i=q_i-\varphi_i$, тоді

$$\mathrm{b_i\varphi_i^2 n_1=(1-\alpha)\cdot q_i\left[(\hat{x}-x_0)-b_i\varphi_i\right]}, \qquad \mathrm{i=\overline{1,n}}, \tag{17}$$

де
$$n_1=\omega-(1-\alpha)=(1-\alpha)(n-1)+\alpha. \tag{18}$$

Система (17) являє собою систему квадратичних рівнянь, розв’язок якої потребує відповідного способу обчислення.

5. Простіший варіант задачі

Приклад 1. Нехай $n=1$, $\theta=0$, $(1-Z)m=r$, тоді з (17) випливає

$$\alpha bq(1-\gamma)^2=(1-\alpha)(r-x_0), \tag{19}$$

тобто отримуємо відоме рівняння для оптимальної ставки оподаткування [1].

З (10), (12) випливає

$$x=(1-\alpha)a+\alpha(1-\gamma)qb+\alpha r, \tag{20}$$

$$y=\alpha b-\frac{(1-\alpha)(r-a)}{(1-\gamma)q}. \tag{21}$$

При $\alpha=0{,}6, b=10, x_0=5, q=2, r=10, a=5$ з (19) – (21) випливає

$$\gamma_{опт}=1-\sqrt{\frac{0{,}4}{0{,}6}\cdot\frac{5}{2\cdot 10}}=0{,}59,\quad x=0{,}4\cdot 5+0{,}6\cdot 0{,}41\cdot 2\cdot 10+0{,}6\cdot 10=12{,}9, x_{\gamma=0}=20.$$

$$Y=y(\gamma_{опт})=0{,}6\cdot 10-\frac{0{,}4\cdot 5}{0{,}41\cdot 2}=3{,}56.$$ Дохід $D=q\cdot\gamma\cdot y=2\cdot 0{,}59\cdot 3{,}56=4{,}2$.

Дохід на 1 працюючого $\frac{x}{y}=\frac{12{,}9}{3{,}56}=3{,}62$.

Рівень оподаткування $\frac{D}{x}=0{,}325$.

Результат розв'язку задачі у вигляді кривої Лаффера проілюстрований на рис. 2.

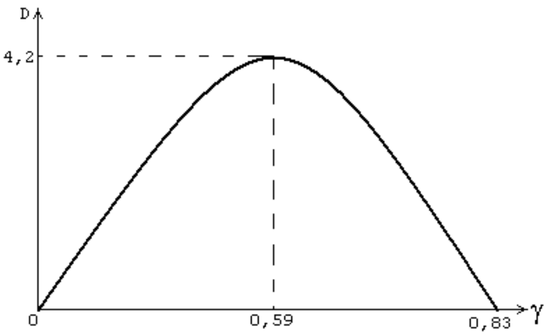

Рис. 2. Крива Лаффера

6. Варіант диференційованих доходів

Приклад 2. Нехай $n=2, \theta=0$, тоді з (17) випливає система рівнянь

$$\begin{cases} b_1\varphi_1^2=(1-\alpha)q_1(b_2\varphi_2+r-x_0), & (22)\\ b_2\varphi_2^2=-(1-\alpha)q_2(b_1\varphi_1+r-x_0), & (23)\end{cases}$$

де $$r=\sum_{i=1}^{2}(1-Z_i)m_i,\qquad \varphi_i=(1-\gamma_i)q_i. \tag{24}$$

Нехай $\alpha=0{,}6$, $b_1=5$, $b_2=5$, $q_1=1{,}6$, $q_2=2{,}4$, $r=10$, $x_0=5$.

Тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\varphi_1^2 = 0{,}4\cdot 1{,}6(\varphi_2+1) = 0{,}64(\varphi_2+1),\\ \varphi_2^2 = 0{,}4\cdot 2{,}4(\varphi_1+1) = 0{,}96(\varphi_1+1),\end{cases} \tag{25}$$

яка має єдиний розв'язок $\varphi_1 = 1{,}256, \varphi_2 = 1{,}469$. Тоді $\gamma_1 = 0{,}215, \gamma_2 = 0{,}388$.

Таким чином, розв'язок задачі відповідає справедливому принципу прогресивної диференціації ставок податку на заробітну плату: величина зарплати 1,6 отримує ставку податку 21,5%, а величина 2,4 – ставку 38,8%.

7. Комплексний варіант оподаткування

За критерій оптимізації ставки оподаткування Z у випадку $n=1$ візьмемо

$$\max_Z F = \gamma q y + (m - \theta y)\,. \tag{26}$$

Частка майна $K = \theta У$, згідно з (2), (3), визначається як капітал, що вкладається у виробництво. Ця частка виключається з оподаткування. Інша частка майна $(m-\theta y)$ у вигляді маєтків, побутових речей, накопичення на майбутнє тощо оподатковується.

Умови екстремуму

$$\frac{dF}{dZ} = m - \theta y + (\gamma q - Z\theta)\frac{dy}{dZ} = 0\,. \tag{27}$$

Скористаємося попередніми результатами оптимізації стосовно податку на зарплату при $n=1$. Тоді з (6), (16), (11)

$$\varphi = (1-\gamma)q + (a + Z - 1)\theta\,, \tag{28}$$

$$\alpha b\varphi^2 = (1-\alpha)\upsilon\cdot\psi\,, \tag{29}$$

де
$$\psi = (1-Z)m - x_0, \quad \upsilon = q + (a + Z - 1)\theta\,. \tag{30}$$

З (12)

$$y = \alpha b - \frac{(1-\alpha)\psi}{\varphi}\,, \tag{31}$$

$$\frac{dy}{dZ} = (1-\alpha)\frac{m\varphi + \psi\varphi'}{\varphi^2}\,. \tag{32}$$

З (27)

$$m - \theta\left(\alpha b - \frac{(1-\alpha)\psi}{\varphi}\right) + (\gamma q - Z\theta)(1-\alpha)\frac{m\varphi + \psi\varphi'}{\varphi^2} = 0\,, \tag{33}$$

$$(m - \alpha b\theta)\varphi^2 + \theta\psi(1-\alpha)\varphi + (q - \varphi + (a-1)\theta)(1-\alpha)(m\varphi + \psi\varphi') = 0\,.$$

З (29) маємо

$$2\alpha b\varphi\varphi' = (1-\alpha)(\theta\psi - m\upsilon)\,, \tag{34}$$

$$(m - \alpha b\theta)\frac{(1-\alpha)\upsilon\psi}{\alpha b} + \theta\psi(1-\alpha)\varphi + (\ell - \varphi)(1-\alpha)\left(m\varphi + \frac{\psi(1-\alpha)(\theta\psi - m\upsilon)}{2\alpha b\varphi}\right) = 0\,,$$

де $\ell = \upsilon - Z\theta = q + (a-1)\theta, \qquad \upsilon = q + (a + Z - 1)\theta$. (35)

Тоді $$\big((m - \alpha b\theta)\varphi + (1-\alpha)\theta\psi\big)\upsilon + (\ell - \varphi)(1-\alpha)\left(m\upsilon + \frac{\theta\psi - m\upsilon}{2}\right) = 0,$$

$$\varphi = \frac{(2\upsilon + \ell)\theta\psi + \upsilon\ell m}{\theta\psi - \frac{\upsilon}{1-\alpha}\big((1+\alpha)m - 2\alpha b\theta\big)}. \qquad (36)$$

8. Числовий приклад

Приклад 3. Нехай $\alpha = 0{,}8, \theta = 2, a = 0{,}1, b = 10, x_0 = 0, \gamma = 0{,}13, Z = 0{,}1$.

Тоді система рівнянь (28), (29), (36) при позначеннях (30), (35) набуває виду

$$\begin{cases} \varphi = 0{,}87\upsilon - 0{,}208, & (37)\\ \varphi^2 = 0{,}025\upsilon\psi, & (38)\\ \varphi = \dfrac{(3\upsilon - 0{,}2)2\psi + \upsilon(\upsilon - 0{,}2)m}{2\psi - \upsilon(9m - 160)}, & (39)\\ \psi = 0{,}9m. & (40)\end{cases}$$

Підставляючи (37), (40) у (38), (39), маємо систему з двома невідомими:

$$\begin{cases} 0{,}757\upsilon^2 - 0{,}365\upsilon + 0{,}0441 = 0{,}225\upsilon m,\\ 0{,}87\upsilon - 0{,}208 = \dfrac{(3\upsilon - 0{,}2)1{,}8m + (\upsilon^2 - 0{,}2\upsilon)m}{1{,}8m - 9\upsilon m + 160\upsilon}. \end{cases} \qquad (41)$$

Шляхом виключення m отримуємо

$$0{,}757\upsilon^2 - 0{,}365\upsilon + 0{,}0441 = 0{,}0225\upsilon\frac{139{,}2\upsilon^2 - 33{,}28\upsilon}{0{,}014 + 8{,}83\cdot\upsilon^2 + 1{,}762\upsilon},$$

$$6{,}684\cdot\upsilon^4 - 5{,}022\upsilon^3 + 0{,}5057\upsilon^2 + 0{,}0726\upsilon + 0{,}0006 = 0.$$

Нехтуючи малим членом 0,0006, отримуємо рівняння

$$6{,}684\upsilon^3 - 5{,}022\upsilon^2 + 0{,}5057\upsilon + 0{,}0726 = 0, \qquad (42)$$

яке має наближення единого дійсного корня $\upsilon = 0{,}6$.

Тоді $m = 7{,}09, q = 2{,}2, \varphi = 0{,}35, \hat{x} = 9{,}88$ (наближено). Згідно (10)-(12), при $n = 1$

$$x = 0{,}8\cdot(0{,}35\cdot 10 + 0{,}9\cdot 7{,}09) = 7{,}9,$$

$$y = 10 - \frac{0{,}2\cdot 9{,}88}{0{,}35} = 10 - 5{,}6 = 4{,}4.$$

Дохід на 1 працюючого $\dfrac{x}{y} = \dfrac{7{,}9}{4{,}4} = 1{,}8$.

Загальний дохід оподаткування $F = \gamma qy = 0{,}13\cdot 2{,}2\cdot 4{,}4 = 1{,}26$, – при тому, що все майно $m = 7{,}09$ вкладається як капітал до величини $\theta y = 8{,}8$. У данному прикладі передбачається позика величиною $\theta y - m = 1{,}71$. У таких умовах податок на майно нульовий. У загальному випадку треба додавати в умови задачі обмеження $\theta y \le m$. Рівень податку на зарплату $\frac{F}{x} = \frac{1{,}26}{7{,}9} = 16\%$.

Якщо отримання позики неможливе, тоді чисельність працівників обмежена умовою $y = \frac{m}{\theta} = \frac{7{,}09}{2} = 3{,}545$. З (12) отримуємо $3{,}545 = 10 - \frac{0{,}2 \cdot \hat{x}}{0{,}35}$, $\quad \hat{x} = 11{,}3$.

Вироблений дохід на 1 працюючого збільшується: $\frac{x}{y} = \frac{9{,}04}{3{,}545} = 2{,}55$, тобто інтенсифікація праці підвищується, але загальний дохід від оподаткування зменшується: $F = \gamma q y = 0{,}13 \cdot 2{,}2 \cdot 3{,}545 = 1{,}01$. Однак отримання позики дозволяє взяти додаткових працівників і не перевищувати рівень інтенсифікації праці.

9. Висновки

Задачі обчислення податків подавалися раніше в літературі лише для заробітної плати. Постанова задачі обчислення податків на майно є суттєвим доповненням моделей оподаткування. Запропоновано також спосіб диференціації цих податків. У статті розроблені три задачі диференційованої оплати праці і податкової політики: співвідношення живої праці і капіталу, визначення оптимальних ставок податків на заробітну плату і майно. Вони ведуть до необхідності розв'язку систем нелінійних рівнянь методами обчислювальної математики. Можливості розв'язку цих задач ілюстровані числовими прикладами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Карагодова О.О., Черваньов Д.М. Мікроекономіка. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 208 с.
2. Костіна Н.І., Алєксєєв А.А., Василик О.Д. Фінанси: система моделей і прогнозів. – К.: Четверта хвиля, 1998. – С. 62 – 66.