УДК 517.927

В. А. Михайлец, Н. В. Рева

Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

The dependence of a continuous parameter in linear boundary-value problems for systems of differential equations is studied. Two generalizations of Kiguradgze's theorem are established.

Рассмотрим параметризированное числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ семейство общих линейных краевых задач для системы $m \in \mathbb{N}$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \qquad t \in [a,b], \tag{1_ε}$$

$$U_\varepsilon y(t;\varepsilon) = c_\varepsilon. \tag{2_ε}$$

Здесь квадратные матрицы — функции $A(\cdot;\varepsilon) \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}) =: L^{m\times m}$, вектор-функции $f(\cdot;\varepsilon) \in L([a,b];\mathbb{C}^m) =: L^m$, векторы $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, а линейные непрерывные операторы

$$U_\varepsilon \colon C([a,b];\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m.$$

Под решением системы дифференциальных уравнений (1_ε) понимается вектор-функция $y(t;\varepsilon) \in W_1^1([a,b];\mathbb{C}^m) =: AC^m$, которая почти всюду на конечном отрезке $[a,b]$ имеет производную по t, для которой равенство (1_ε) выполняется на подмножестве полной меры Лебега. Неоднородное краевое условие вида (2_ε) охватывает все классические виды краевых условий: задачи Коши, двуточечные и многоточечные, интегральные и смешанные краевые задачи (см. [1] и приведенную там библиогр.).

Будем предполагать всюду далее, что выполнено

Предположение $\mathcal{E}$. *Предельная однородная краевая задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0),$$

$$U_0 y(t;0) = 0,$$

имеет только тривиальное решение.

Это условие равносильно тому, что неоднородная краевая задача (1_0), (2_0) имеет решение при произвольных вектор-функции $f(t;0) \in L^m$, векторе $c_0 \in \mathbb{C}^m$ и оно является единственным в классе AC^m. В частности, оно выполняется, если $U_0 y := y(a_0)$, $a_0 \in [a,b]$. В работе [2] установлена следующая фундаментальная

Теорема Кигурадзе. *Пусть для задачи* (1_0), (2_0) *выполнено предположение* $\mathcal{E}$ *и следующие условия:*

1) $\sup\limits_{\varepsilon} \|A(\cdot;\varepsilon)\|_1 < \infty$;

2) $\sup\limits_{\varepsilon} \|f(\cdot;\varepsilon)\|_1 < \infty$;

3) $\sup\limits_{\varepsilon} \|U_\varepsilon\| < \infty$;

4) $\max\limits_{t\in[a,b]}\Big|\int\limits_a^t A(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t A(s;0)\,ds\Big| \to 0,\ \varepsilon \to +0;$

5) $\max\limits_{t\in[a,b]}\Big|\int\limits_a^t f(s;\varepsilon)ds - \int\limits_a^t f(s;0)\,ds\Big| \to 0,\ \varepsilon \to +0;$

6) $c_\varepsilon \to c_0,\ \varepsilon \to +0;$

7) $U_\varepsilon y \to U_0 y,\ \forall\, y \in AC^m.$

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ *задача* (1_ε), (2_ε) *имеет единственное решение и*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_C\colon = \max_{t\in[a,b]} |y(t;\varepsilon) - y(t;0)| \to 0, \qquad \varepsilon \to +0.$$

Примеры показывают, что ни одно из условий теоремы не может быть опущено. Условия *3* и *7* означают, что операторы U_ε сильно сходятся к оператору U_0. Поэтому в условии *7* множество AC^m можно заменить произвольным подмножеством функций, линейная оболочка которых плотна в банаховом пространстве $C([a,b];\mathbb{C}^m)$. Из конечномерности пространства $\mathbb{C}^m$ вытекает, что это условие равносильно тому, что операторы U_ε слабо сходятся к оператору U_0. Оно существенно слабее, чем условие равномерной сходимости операторов: $\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0$.

Можно показать, что для выполнения условий *1*, *4* и *2*, *5* достаточно, чтобы $A(\cdot;\varepsilon)$ слабо сходилась в банаховом пространстве $L^{m\times m}$ к матрице-функции $A(\cdot;0)$, а $f(\cdot;\varepsilon)$ слабо сходилась в банаховом пространстве L^m к функции $f(\cdot;0)$. Тем более достаточна сходимость в нормах соответствующих пространств. Примеры показывают, что эти условия не влекут за собою сходимость по мере Лебега и тем более поточечной сходимости почти всюду на отрезке $A(\cdot;\varepsilon)$ к $A(\cdot;0)$ и $f(\cdot;\varepsilon)$ к $f(\cdot;0)$.

Цель данной работы — максимально ослабить условия теоремы Кигурадзе на ростки отображений $A(\cdot;\varepsilon)$ и $f(\cdot;\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ и рассмотреть некоторые приложения.

Основные результаты. Для их формулировки нам потребуется ввести

Определение. Обозначим через $\mathcal{M}^m[a,b] =: \mathcal{M}^m$, $m \in \mathbb{N}$ класс всех квадратных $m\times m$ комплекснозначных матриц-функций $R(t;\varepsilon)\colon [0,\varepsilon_0] \to L^{m\times m}$, для которых нормированное решение $Z(t;\varepsilon)$ системы

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \qquad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|Z(t;\varepsilon) - I_m\|_C = 0,$$

где I_m — единичная $m \times m$ матрица.

В работах [3–7] при выполнении разных априорных предположений получены необходимые и достаточные условия того, что $R(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$. Примеры показывают, что эти классы не являются линейными. Из включений $R_i(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$, $i = 1, 2$, еще не следует, что $R_1(t;\varepsilon) + R_2(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$. Возможно, что эти классы не являются и однородными.

Теорема 1. *В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условия 1, 4 более общим нелинейным условием*

$$R(t;\varepsilon) := A(t;\varepsilon) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m. \tag{3}$$

Условие (3) в теореме 1 нельзя ослабить. Можно показать, что оно является необходимым, если $U_\varepsilon y \equiv y(a)$.

Положим для матрицы-функции $R(t) \in L^{m\times m}$ и вектор-функции $f(t) \in L^m$

$$R^{\vee}(t) := \int\limits_a^t R(s)\,ds, \qquad f^{\vee}(t) := \int\limits_a^t f(s)\,ds.$$

Тогда условия *4* и *5* можно записать соответственно в виде:

4′) $\|R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_C \to 0$, $\varepsilon \to +0$;

5′) $\|f^{\vee}(\cdot;\varepsilon) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_C \to 0$, $\varepsilon \to +0$.

Из результатов работ [5, 6] следует, что если при $\varepsilon \to +0$ выполнено одно из четырех условий:

(α) $\|R(t;\varepsilon)\|_1 \leqslant \mathrm{const}$;

(β) $\|R^{\vee}(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon)\|_C \to 0$;

(γ) $\|R(t;\varepsilon)R^{\vee}(t;\varepsilon)\|_C \to 0$;

(Δ) $\|R^{\vee}(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon)R^{\vee}(t;\varepsilon)\|_C \to 0$,

то условие (3) равносильно условию *4′*. В общем случае условие *4′* не является ни необходимым, ни достаточным для выполнения условия (3).

Приведем пример, в котором выполнено соотношение (3), однако не выполняется ни одно из условий (α), (β), (γ), (Δ) и тем более условие *1*.

Пример. Пусть $m = 2$, $[a,b] = [0,1]$, $A(t;\varepsilon) = A(t) + R(t;\varepsilon)$, где

$$R(t;\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cos\dfrac{t}{\varepsilon} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\dfrac{2t}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $\|R^{\vee}(t;\varepsilon)\|_C \to 0$ и

$$R(t;\varepsilon)R^{\vee}(t;\varepsilon) = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{t}{\varepsilon},\ \sin\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{t}{\varepsilon}\right\},$$

$$R^{\vee}(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon) = \mathrm{diag}\left\{\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon},\ \frac{1}{2}\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon}\right\},$$

$$R^{\vee}(t;\varepsilon)R(t;\varepsilon) - R(t;\varepsilon)R^{\vee}(t;\varepsilon) = \mathrm{diag}\left\{-\frac{1}{2}\sin\frac{2t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{t}{\varepsilon},\ \frac{1}{2}\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon}\right\}.$$

Отсюда имеем

$$\|R(t;\varepsilon)\|_1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^1 \left|\cos\frac{t}{\varepsilon}\right| dt = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^{1/\varepsilon} |\cos t|\,dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M\{|\cos t|\} \to +\infty,$$

$$\int\limits_0^1 \left|\sin\frac{t}{\varepsilon}\cdot\sin\frac{2t}{\varepsilon}\right| dt = \varepsilon\int\limits_0^{1/\varepsilon} |\sin t|\cdot|\sin 2t|\,dt \to M\{|\sin t\cdot\sin 2t|\} > 0$$

[8, с. 384]. Поэтому ни одно из четырех приведенных выше условий здесь не выполнено. Однако, пользуясь теоремой 6 работы [7], при $i = 1$ нетрудно убедится, что $R(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^2$.

Определим по заданным $A(\cdot;\varepsilon) \in L^{m\times m}$ и $f(\cdot;\varepsilon) \in L^m$ матрицу-функцию

$$A_f(\cdot;\varepsilon) := \begin{pmatrix} A(\cdot;\varepsilon) & f(\cdot;\varepsilon) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L^{(m+1)\times(m+1)},$$

где вектор-функция $f(\cdot;\varepsilon)$ записана в виде столбца высоты m.

Теорема 2. *В формулировке теоремы Кигурадзе можно заменить условия 1, 2, 4, 5 одним более общим условием*

$$B(t;\varepsilon) := A_f(\cdot;\varepsilon) - A_f(\cdot;0) \in \mathcal{M}^{m+1}.$$

Приложения. Рассмотрим неоднородную краевую задачу для скалярного линейного дифференциального уравнения порядка $m \geqslant 2$:

$$z^{(m)}(t;\varepsilon)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t;\varepsilon)+a_{m-2}(t;\varepsilon)z^{(m-2)}(t;\varepsilon)+\cdots+a_0(t;\varepsilon)z(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \qquad (4_\varepsilon)$$

с общими краевыми условиями

$$V_\varepsilon z(t;\varepsilon) = c_\varepsilon, \qquad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \qquad t \in [a,b], \qquad (5_\varepsilon)$$

где коэффициенты $a_j(\cdot;\varepsilon)$, $j = \overline{0,m-2}$, $a_{m-1}(\cdot)$ и правые части уравнений $g(\cdot;\varepsilon)$ принадлежат банаховому пространству $L([a,b];\mathbb{C})$, векторы $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, а линейные непрерывные операторы

$$V_\varepsilon \colon C^{m-1}([a,b];\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^m.$$

Под решением краевой задачи понимается функция $z(t;\varepsilon) \in W_1^m([a,b];\mathbb{C})$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (4_ε) почти всюду на отрезке $[a,b]$ и краевому условию (5_ε). Справедлива

Теорема 3. *Пусть однородная предельная краевая задача* $(4_0),(5_0)$ *имеет лишь тривиальное решение и при* $\varepsilon \to +0$ *выполнены условия:*

1) $\|a^\vee{}_j(\cdot;\varepsilon) - a^\vee{}_j(\cdot;0)\|_\infty \to 0$, $j = \overline{0,m-2}$*;*

2) $\|g^\vee(\cdot;\varepsilon) - g^\vee(\cdot;0)\|_\infty \to 0$*;*

3) $c_\varepsilon \to c_0$*;*

4) линейные операторы V_ε *сильно сходятся к оператору* V_0*.*

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ *решения задач* $(4_\varepsilon),(5_\varepsilon)$ *однозначно определены и удовлетворяют соотношению*

$$\|z(\cdot;\varepsilon) - z(\cdot;0)\|_{C^{m-1}} \to 0, \qquad \varepsilon \to +0.$$

Замечание. Если коэффициент уравнения $a_{m-1}(\cdot;\varepsilon)$ зависит от ε, то утверждение теоремы 3 остается верным, если дополнительно потребовать, чтобы:

5$^+$) нормы функций $a_j(\cdot;\varepsilon)$ ограничены по ε в банаховом пространстве $L([a,b];\mathbb{C})$;

6$^+$) нормы функций $g(\cdot;\varepsilon)$ ограничены по ε в банаховом пространстве $L([a,b];\mathbb{C})$.

В частности, условия *1, 2,* 5^+, 6^+ выполнены, если функции $a_j(\cdot;\varepsilon)$ и $g(\cdot;\varepsilon)$ слабо сходятся в пространстве $L([a,b];\mathbb{C})$ к функциям $a_j(\cdot;0)$ и $g(\cdot;0)$ соответственно.

Исследование В. А. Михайлеца поддержано Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант 01.07/00252.

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. – 703 с.
2. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 30. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – С. 3–103.
3. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, No 3. – P. 423–439.

4. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // Ibid. – 1967. – **3**. – P. 571–579.
5. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.
6. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105–132.
7. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970–975.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 07.04.2008*

УДК 515.12

Т. М. Радул

Опуклості, породжені монадами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Let $\mathbb{F}$ be a monad in the category $\mathcal{C}omp$. We build a convexity in general sense for each $\mathbb{F}$-algebra (see [1]), investigate properties of such convexities, and apply them to prove that the multiplication map of the monad of order-preserving functionals is soft.

Поняття опуклості, що розглядається в цьому повідомленні, є значно загальнішим, ніж класичне поняття опуклості, обмежене контекстом лінійного простору. Загальні опуклості виникають при дослідженні розмаїтих структур: частково впорядкованих множин, напівграток, граток, суперрозширень тощо. Наш підхід базується на понятті топологічної опуклості з [1], де викладена загальна теорія опуклості, починаючи з аксіом і закінчуючи застосуваннями в різних галузях математики.

Головна мета роботи полягає в описанні категорного зв'язку між тополого-алгебраїчними структурами і теорією опуклості. Багато топологічних конструкцій є функторіальними: вони означені не тільки для просторів, а й для відображень. Алгебраїчний аспект теорії функторів у категоріях топологічних просторів та неперервних відображень базується в основному на понятті монади (чи трійки) у сенсі С. Ейленберга та Д. Мура [2]. Багато класичних конструкцій приводять до монад: гіперпростори, простори ймовірнісних мір, суперрозширення та ін. Багато досліджень присв'ячені монадам у категоріях топологічних просторів та неперервних відображень (див., напр., [3] або [4]). Для деяких з них вводились опуклості. Звичайна лінійна опуклість відповідає монаді ймовірнісних мір [5]. Певна нелінійна опуклість була означена для суперрозширення [6]. У цій роботі ми вводимо структуру опуклості для кожної $\mathbb{F}$-алгебри довільної монади $\mathbb{F}$ у категорії компактних гаусдорфових просторів та неперервних відображень (п. 1), введені опуклості зберігаються морфізмами F-алгебр; досліджуємо властивості опуклостей для деяких спеціальних класів монад (пп. 2, 3); застосовуємо наші результати для дослідження топології монади функціоналів, що зберігають порядок (п. 4).