УДК 004.942

М. В. Синьков, Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, О. В. Федоренко

Зображення нелінійностей в скінченновимірних гіперкомплексних числових системах

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Петровим)

Construction of the representations of nonlinear functions in hypercomplex numerical systems is of great importance. Here, methods for construction of representations for direct and inverse nonlinear functions in finite-dimensional hypercomplex numerical systems are considered. Examples of the constructed representations for nonlinearities in some hypercomplex numerical systems are listed.

Один з творців гіперкомплексних чисел В. Р. Гамільтон першим запропонував конструктивне визначення нелінійних трансцендентних функцій від гіперкомплексних змінних. В роботі [1] він пропонує визначити експоненціальну функцію від кватерніонної змінної q як суму степеневого ряду:

$$e^q = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^s}{s!}. \tag{1}$$

З часом цей підхід був узагальнений на інші трансцендентні функції гіперкомплексної змінної: тригонометричні синус і косинус, гіперболічні синус і косинус та інші, і зараз є загальноприйнятим [2].

Після Гамільтона в багатьох роботах проведені дослідження з побудови зображення експоненціальної функції від кватерніона. Для цього використовуються різні методи, які базуються на симетрійних властивостях кватерніонів [2, 3]. Побудовані зображення й інших трансцендентних функцій кватерніона: логарифмічної функції, тригонометричних синуса і косинуса [3]. Ці функції знайшли важливе використання не тільки в наукових застосуваннях: фізика, механіка, а і в технічних: орієнтація твердого тіла в просторі, гіроскопії, робототехніці та інші.

Задача побудови зображень нелінійних функцій від гіперкомплексного змінного зводиться до їх визначення з точки зору структури обчислень над гіперкомплексним аргументом та зображення їх у вигляді гіперкомплексної функції, яка має вигляд:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)e_i, \tag{2}$$

де $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \Gamma$, а $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, — дійсні функції.

Знання законів виконання алгебраїчних операцій в гіперкомплексних числових системах (ГЧС) дозволяє при визначенні лінійних або нелінійних функцій побудувати зображення їх у вигляді гіперкомплексної функції (2).

Дійсно, розглянемо для прикладу лінійну функцію гіперкомплексного аргументу вигляду:

$$Y = AX + B, \qquad Y, A, X, B \in \Gamma. \tag{3}$$

Якщо застосувати закони множення та додавання, одержимо зображення лінійної функції від гіперкомплексного аргументу:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} a_i x_j + b_k \right) e_k. \tag{4}$$

Аналогічно будуються зображення і деяких простих нелінійних функцій: степеневих функцій та поліномів від гіперкомплексної змінної, а також дробово-раціональних функцій.

Перейдемо до побудови зображення трансцендентних функцій від гіперкомплексного аргументу, яке зводиться до зображення рядів типу (1) у вигляді гіперкомплексних функцій (2). В деяких простих випадках це можна зробити безпосередньо. Але в загальному випадку потребує розробки спеціальних методів [4–8].

Розглянемо диференціальне рівняння від гіперкомплексної змінної вигляду

$$\dot{W} = MW, \tag{5}$$

де M, $W \in \Gamma$.

Покажемо, що експонента у вигляді степеневого ряду

$$\exp(Mt + K) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(Mt + K)^s}{s!}, \qquad K \in \Gamma$$

буде розв'язком рівняння (5). Дійсно,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(Mt + K)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{s} \frac{P_s(m_1, \ldots, m_n)}{s!} e_i,$$

де P_s — поліном степеня s; n — вимірність ГЧС. Він збігається абсолютно всюди і тому його можна почленно диференціювати:

$$\dot{W} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{sM(Mt + K)^{s-1}}{s!} = M \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(Mt + K)^s}{s!} = MW.$$

Підставляючи в ліву частину (5), одержимо тотожність. Таким чином, визначення експоненти через степеневий ряд (1) та розв'язок рівняння (5) — еквівалентні.

З даною ГЧС Γ пов'яжемо систему лінійних диференціальних рівнянь від дійсних змінних того ж порядку, що і вимірність Γ, яка у векторно-матричній формі має вигляд:

$$\frac{dX}{dt} = AX. \tag{6}$$

Визначимо елементи матриці коефіцієнтів цієї системи, для чого запишемо її у вигляді:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j, \qquad s = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Помножимо кожне рівняння на один з базисних елементів e_s, складемо почленно та згрупуємо члени з однаковими базисними елементами:

$$\sum_{s=1}^{n} e_s \frac{dx_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} e_s \sum_{s=1}^{n} a_{sk} x_k. \tag{8}$$

Введемо позначення:

$$W = \sum_{s=1}^{n} e_s x_s \in \Gamma.$$

Тоді

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{s=1}^{n} e_s \frac{dx_s}{dt}.$$

Коефіцієнти a_{ij} рівняння (7) поки що не відомі. Їх потрібно визначити, пов'язавши зі структурними константами системи Γ. При цьому необхідно врахувати, що ліва частина (8) являє гіперкомплексну змінну W, а праву частину потрібно зобразити у вигляді, аналогічному правій частині рівняння (6), тобто (7) подається у вигляді (5), де

$$MW = \sum_{s=1}^{n} e_s m_s \sum_{s=1}^{n} e_s x_s = \sum_{s=1}^{n} e_s \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^{s} m_i x_j. \tag{9}$$

З (8) та (9) отримаємо систему: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{sj} x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^{s} m_i x_j$, $s = \overline{1, n}$. Цю систему лінійних однорідних рівнянь запишемо

$$QX = 0, \tag{10}$$

де

$$Q = \left\{ a_{sj} - \sum_{s=1}^{n} \gamma_{sj}^{i} m_s \right\}_{i,j=1}^{n}.$$

Система лінійних однорідних рівнянь має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці Q дорівнює нулю. Для цього достатньо: $a_{ij} - \sum\limits_{s=1}^{n} \gamma_{sj}^{i} m_s = 0$, i, $j = \overline{1, n}$.

Як видно, в даному випадку $n^2 + n$ змінних, а рівнянь — n^2. За вільні змінні доцільно обрати n чисел $m_1, \ldots, m_n$.

Тоді $a_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} \gamma_{sj}^{i} m_s$.

Система диференціальних рівнянь (7), матриця коефіцієнтів якої A будується у відповідності з (10), і називається асоційованою з ГЧС Γ. Вона залежить від n параметрів.

Для розв'язання (7) необхідно знайти корені характеристичного рівняння $A - \lambda E = 0$ і виписати всі розв'язки системи (7). Вони будуть залежати від скалярного аргументу t і n довільних постійних інтегрування — $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Для їх вибору прирівняємо розв'язок системи (7) компонентам одиничного елемента при $t = 0$, оскільки в початковій нульовій точці експонента за визначенням повинна дорівнювати одиничному елементу тієї гіперкомплексної числової системи, в якій будується зображення експоненти. В результаті одержимо систему з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n змінними — $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Її розв'язок дасть значення $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Після цього можна записати зображення експоненти в даній ГЧС.

Припустимо, що всі корені характеристичного рівняння системи (7) $\left\|\sum\limits_{s=1}^{n} \gamma_{sj}^{i} m_s\right\| - \lambda E = 0$ будуть дійсні та різні. Тоді розв'язки цієї системи набувають вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k} C_k\right) e^{\lambda_k t},$$

де C_k — вільні постійні інтегрування — n лінійно незалежних констант; a_{ij}^{k} — коефіцієнти, за допомогою яких визначаються лінійно залежні константи інтегрування.

Коефіцієнти a_{ij}^{k} визначаються коефіцієнтами правої частини системи диференціальних рівнянь, а значить, і структурними константами гіперкомплексної числової системи Г.

Розглянемо результати побудови нелінійностей за цим методом в деяких ГЧС.

1. Система триплексних чисел Люша T.

T	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$\dfrac{e_3 - e_1}{2}$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

$$\operatorname{Exp}(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}(e^{m_1+m_3} + e^{m_1-m_3}\cos m_2)e_1 + e^{m_1-m_3}\sin m_2 e_2 + \frac{1}{2}(e^{m_1+m_3} - e^{m_1-m_3}\cos m_2)e_3.$$

2. Система Γ_{33}.

Γ_{33}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_2

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(M) &= \operatorname{sh}(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) = \\
&= \frac{1}{3}\left(\operatorname{sh}(m_1+m_2+m_3) + 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_2)\operatorname{sh}\left(m_1 - \frac{m_2+m_3}{2}\right)\right)e_1 + \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\operatorname{sh}(m_1+m_2+m_3) - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_2)\operatorname{sh}\left(m_1 - \frac{m_2+m_3}{2}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{3}(m_3-m_2)\operatorname{ch}\left(m_1 - \frac{m_2+m_3}{2}\right)\right)e_2 + \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\operatorname{sh}(m_1+m_2+m_3) - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_2)\operatorname{sh}\left(m_1 - \frac{m_2+m_3}{2}\right) - \right.
\end{aligned}$$

$$-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{3}(m_3-m_2)\operatorname{ch}\left(m_1-\frac{m_2+m_3}{2}\right)\Bigg)e_3,$$

$$\operatorname{ch}(M)=\operatorname{ch}(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\operatorname{ch}(m_1+m_2+m_3)+2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_2)\operatorname{ch}\left(m_1-\frac{m_2+m_3}{2}\right)\right)e_1+$$

$$+\frac{1}{3}\Bigg(\operatorname{ch}(m_1+m_2+m_3)-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_2)\operatorname{sh}\left(m_1-\frac{m_2+m_3}{2}\right)-$$

$$-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{3}(m_3-m_2)\operatorname{sh}\left(m_1-\frac{m_2+m_3}{2}\right)\Bigg)e_2+$$

$$+\frac{1}{3}\Bigg(\operatorname{ch}(m_1+m_2+m_3)-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_2)\operatorname{sh}\left(m_1-\frac{m_2+m_3}{2}\right)+$$

$$+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{3}(m_3-m_2)\operatorname{sh}\left(m_1-\frac{m_2+m_3}{2}\right)\Bigg)e_3.$$

3. Система кватерніонів H.

H	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

$$\sin(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\sin m_1\operatorname{ch}\overline{m}e_1+\frac{1}{\overline{m}}\operatorname{sh}\overline{m}\cos m_1(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4),$$

$$\cos(m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)=\cos m_1\operatorname{ch}\overline{m}e_1+\frac{1}{\overline{m}}\operatorname{sh}\overline{m}\sin m_1(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4).$$

В цих формулах $\overline{m}=\sqrt{m_2^2+m_3^2+m_4^2}$.

Визначення обернених функцій від гіперкомплексної змінної. Зображення таких нелінійних функцій, як експонента, тригонометричні і гіперболічні функції дозволяє будувати і обернені функції. Якщо пряма функція має вигляд (2), то обернена до неї функція буде визначатись за допомогою співвідношення

$$F^{-1}(F(X))=X. \tag{11}$$

Співвідношення (11) свідчить про те, що область значень прямої функції повинна входити в область існування оберненої функції. Крім того, область значень оберненої функції повинна входити в гіперкомплексну числову систему. Цей факт необхідно враховувати, оскільки класичні обернені функції, як правило, багатозначні.

Зображення таких нелінійностей, як експонента, гіперболічні і тригонометричні функції, є гіперкомплексними функціями, тобто мають вигляд:

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}f_j(x_1,\ldots,x_n)e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_je_j. \tag{12}$$

Для того щоб (12) було зображенням оберненої функції, її аргумент має бути просто гіперкомплексною змінною

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,\ldots,x_n)e_j = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j. \tag{13}$$

Якщо рівняння (13) навести у вигляді системи рівнянь

$$f_j(x_1,\ldots,x_n) = y_j, \qquad j = 1,..,n, \tag{14}$$

то її можна розв'язати відносно змінних $x_1,\ldots,x_n$

$$x_j = \varphi_j(y_1,\ldots,y_n), \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{15}$$

Якщо ці розв'язки підставити в (15), одержимо зображення оберненої функції

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y_1,\ldots,y_n)e_j. \tag{16}$$

Функція вигляду (16) може бути багатозначною. В цьому випадку необхідно визначити область головних значень, яка буде входити в гіперкомплексну числову систему Γ.

Оберненою функцією до експоненти є логарифм. В системі гіперкомплексних чисел Γ_{31} з таблицею множення

Γ_{31}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

Експонента має вигляд:

$$\exp(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) = e^{m_1}e_1 + m_2e^{m_1}e_2 + m_3e^{m_1}e_3.$$

Будуємо систему рівнянь (15), розв'язком якої є:

$$m_1 = \ln x_1,$$

$$m_2 = \frac{x_2}{x_1},$$

$$m_3 = \frac{x_3}{x_1}.$$

При умові $x_1 \neq 0$ зображення логарифмічної функції в системі Γ_{31} подамо у такому вигляді:

$$\ln(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \ln x_1 e_1 + \frac{x_2}{x_1}e_2 + \frac{x_3}{x_1}e_3.$$

Розглянемо побудову арксинусу в гіперкомплексній системі Γ_{31} (таблиця множення наведена вище). Синус в цій системі має вигляд:

$$\sin(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) = \frac{1}{3}((\sin\alpha + 2\sin\gamma\operatorname{ch}\beta)e_1 +$$
$$+ (\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\gamma\operatorname{sh}\beta - \sin\gamma\operatorname{ch}\beta)e_2 + (\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\gamma\operatorname{sh}\beta - \sin\gamma\operatorname{ch}\beta)e_3,$$

де α, β та γ визначаються таким чином:

$$\alpha = m_1 + m_2 + m_3; \qquad \beta = \frac{m_2 - m_3}{2}\sqrt{3}; \qquad \gamma = m_1 - \frac{m_2 + m_3}{2}.$$

В цьому випадку система рівнянь (15) має розв'язок:

$$m_1 = \frac{1}{3}(\alpha + 2\gamma); \qquad m_2 = \frac{1}{3}(\alpha - \gamma + \sqrt{3}\beta); \qquad m_3 = \frac{1}{3}(\alpha - \gamma - \sqrt{3}\beta),$$

де

$$\begin{aligned} &\alpha = (-1)^n \arcsin(x_1 - x_2 + x_3) + n\pi, \\ &\beta = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{3}\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_2 - x_3}, \\ &\gamma = \pm \operatorname{arccos} h\frac{\sqrt{3(x_2 - x_3)^2 + 9(2x_1 + x_2 + x_3)^2}}{2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Для вибору головних значень обернених функцій приймаємо $n = 0$, а також знак "+". Тоді зображення оберненої функції матиме вигляд в системі Γ_{33}:

$$\arcsin(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) = \frac{1}{3}((\alpha + 2\gamma)e_1 + (\alpha - \gamma + \sqrt{3}\beta)e_2 + (\alpha - \gamma - \sqrt{3}\beta)e_3),$$

де параметри α, β, γ визначені в (17).

В системі $R \oplus W$ з таблицею множення

Γ_{31}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	e_3
e_3	0	e_3	0

косинус має вигляд

$$\cos(m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3) = \cos(m_1)e_1 + \cos m_2 \cos m_3 e_2 - \sin m_2 \sin m_3 e_3.$$

Розв'язком системи рівнянь (15) буде:

$$\begin{aligned} &m_1 = \pm \arccos x_1 + 2\pi n, \\ &m_2 = \pm \operatorname{arctg} \frac{x_3\sqrt{1 - \eta - x_2^2 + x_3^2}}{x_2\sqrt{1 + \eta + x_2^2 - x_3^2}} + \pi n, \\ &m_3 = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \eta - x_2^2 + x_3^2}}{\sqrt{1 + \eta + x_2^2 - x_3^2}} + \pi n, \end{aligned}$$

де $\eta = \sqrt{(x_3^2 - x_2^2)^2 - 2(x_3^2 + x_2^2) + 1}$.

За головні значення беремо $n = 0$, знак "+", враховуємо, що

$$1 + \eta + x_2^2 - x_3^2 > 0, \qquad 1 - \eta - x_2^2 + x_3^2 \geqslant 0, \qquad (x_3^2 - x_2^2)^2 - 2(x_3^2 + x_2^2) + 1 \geqslant 0.$$

Тоді значення арккосинуса має вигляд:

$$\arccos(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) =$$
$$= \arccos(x_1)e_1 + \operatorname{arctg}\frac{x_3\sqrt{1-\eta+x_3^2-x_2^2}}{x_2\sqrt{1+\eta-x_3^2+x_2^2}}e_2 + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\eta+x_3^2-x_2^2}}{\sqrt{1+\eta-x_3^2+x_2^2}}e_3.$$

В системі подвійних чисел W з таблицею множення

W	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

синус має вигляд

$$\operatorname{sh}(m_1e_1 + m_2e_2) = \operatorname{sh}m_1 \operatorname{ch}m_2 e_1 + \operatorname{ch}m_1 \operatorname{sh}m_2 e_2.$$

Система рівнянь (15) матиме такий розв'язок:

$$m_1 = \frac{1}{2}\ln(|\delta_1|),$$
$$m_2 = \ln\left|\frac{\delta_1^2 - 1}{2((x_1-x_2)\delta_1^{3/2} + (x_1+x_2)\delta_1^{1/2})}\right|,$$

де

$$\delta_1 = x_1^2 + x_2^2 - \sqrt{(x_2^2+x_1^2+1)^2 - 4x_1^2} - \sqrt{2}((x_2^2+x_1^2)^2 +$$
$$+ x_2^2\left(\sqrt{(x_2^2+x_1^2+1)^2-4x_1^2}+1\right) + x_1^2\left(\sqrt{(x_2^2+x_1^2+1)^2-4x_1^2}-1\right)\Big)^{1/2}.$$

При умові $(x_2^2 - x_1^2)^2 - 2(x_2 + x_1) + 1 > 0$ гіперболічний арксинус в системі подвійних чисел має вигляд:

$$\operatorname{arcsh}(x_1e_1 + x_2e_2) = \frac{1}{2}\ln\delta_1 e_1 + \ln\frac{\delta_1^2 - 1}{2((x_1-x_2)\delta_1^{3/2} + (x_1+x_2)\delta_1^{1/2})}e_2.$$

В системі дуальних чисел D з таблицею множення

D	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	0

гіперболічний косинус має вигляд:

$$\operatorname{ch}(m_1e_1 + m_2e_2) = \operatorname{ch}m_1 e_1 + m_2 \operatorname{sh}m_1 e_2.$$

Розв'язком системи рівнянь (15) буде:

$$m_1 = \ln(x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 1}), \qquad m_2 = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2-1}}{1 + x_1(x_1 \pm \sqrt{x_1^2-1})}.$$

За умови $x_1^2 - 1 > 0$ гіперболічний арккосинус в системі дуальних чисел матиме вигляд:

$$\operatorname{arcch}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \ln\Big(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}\Big) e_1 + \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}}{1 + x_1(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1})} e_2.$$

1. *Hamilton W. R.* Researches respecting quaternions: first series // Transactions of the Royal Irish Academy. – 1848. – **21**, part 1. – P. 199–296.
2. *Brackx F.* The exponential function of a quaternion variable // Applicable Analysis. – 1979. – **8**. – P. 265–276.
3. *Scheicher K., Tichy R. F., Tomantschger K. W.* // Elementary Inequalities in Hypercomplex Numbers Anzeiger. – 1997. – Abt. II, No 134. – S. 3–10.
4. *Калиновский Я. А., Роенко Н. В., Синьков М. В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 4. – С. 178–181.
5. *Sin'kov M. V., Kalinovsky Ya. A., Roenko N. V.* Building nonlinear functions in quaternion and other hypercomplex number systems for the solution of applied mechanics problem // Proc. of the First Int. Conf. On Parallel Processing and Appl. Math. – Poland. – 1994. – P. 170–177.
6. *Синьков М. В., Калиновский Я. А., Постникова Т. Г., Синькова Т. В.* Логарифмическая функция от кватерниона // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2002. – **4**, № 1. – С. 35–37.
7. *Синьков М. В., Калиновский Я. А., Синькова Т. В.* Некоторые линейные и нелинейные операции обобщенных комплексных чисел // Там же. – № 3. – С. 55–61.
8. *Синьков М. В., Калиновский Я. А., Бояринова Ю. Е.* Розробка та дослідження алгоритмів побудови зображення обернених функцій від гіперкомплексного змінного // Там же. – 2005. – **7**, № 1. – С. 32–43.

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, Київ

Надійшло до редакції 13.03.2008