УДК 519.6

В.И. Агошков, А.О. Заячковский

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики Российской академии наук, г. Москва*

# ИССЛЕДОВАНИЕ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РИСКОВ

Для различных данных, указывающих на наличие опасности для прохождения судна, устанавливается величина риска возникновения критической ситуации с кораблем и предложен алгоритм нахождения оптимального маршрута корабля. Метод нахождения оптимального маршрута корабля базируется на минимизации «функционала стоимости», описывающего суммарные издержки, которыми может быть отягощен выбранный маршрут между расчетными точками. Рассмотрены вариационные уравнения для минимизации функционала и исследованы вопросы, связанные с разрешимостью задачи. Задача решалась численно, для приближенного решения использовался итерационный метод на акватории Черного моря.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *оптимальный маршрут корабля, вариационные уравнения, функционал риска*.

**Введение.** Современное судовождение представляет собой довольно сложный процесс управления судном, основной целью которого является обеспечение безопасного и экономичного движения. Оптимизация маршрута и условий заключается в одновременном учете многих факторов, влияющих на скорость и сохранность судна, а также на обеспечение экологической безопасности окружающей среды. Прохождение заданного маршрута можно осуществить многими путями и отнюдь не самый короткий маршрут может оказаться оптимальным. Реализация маршрута движения должна предусматривать формирование пути следования, ведущего в пункт назначения за кратчайшее время и с учетом навигационных опасностей. Для того чтобы находить оптимальную из возможностей, приходится решать задачи на отыскание наименьших значений специальных функционалов, включающих функционалы стоимости отклонения корабля от предписанного маршрута, и представляющих собой различного рода «риски». Исследование и алгоритмы решения таких задач должны базироваться с одной стороны на методах оптимального управления, а с другой – на теории случайных функций и теории рисков.

В настоящей работе дается описание класса упомянутых выше задач, а затем на примере одной из них предлагается методы их исследований и численного решения.

**Класс задач об оптимальном маршруте корабля.** Экономическая эффективность и безопасность работы морского флота настолько тесно связана с гидрометеорологическим состоянием морской природной среды, что сегодня капитаны судов не могут обходиться без соответствующих рекомендаций береговых прогностических служб – «служб сопровождения», а своевременное предупреждение об опасных природных явлениях погоды на этих маршрутах стали прямой социальной потребностью.

Для расчета рекомендуемых маршрутов применяются различные методы и подходы, и им посвящена достаточно обширная литература. По существу, проводка судов рекомендованными маршрутами представляет собой процесс прогнозирования такого маршрута, следуя которым судно должно пройти в максимально благоприятных условиях погоды и волнения и уложиться в плановый график. В условиях хорошей погоды и слабого волнения суда, как правило, следуют кратчайшим путем. Такие рассчитанные и рекомендованные службами сопровождения траектории являются в определенном смысле «предварительными оптимальными маршрутами кораблей». В реальности благоприятные погодные условия наблюдаются довольно редко, в основном в летний период.

Помимо погодных условий, как факторов влияющих на возможное изменение маршрута корабля, имеется ряд других факторов. Так в настоящее время известной и актуальной проблемой стала проблема нападения на корабли морских пиратов, если маршрут корабля проходит акваторию возможного их нападения.

При следовании кораблем по «предварительному оптимальному маршруту» возможно также появления тропического циклона (ураганы в Атлантике, тайфуны в Тихом океане) с заданной его траекторией движения. В связи с этим возникает проблема корректировки маршрута корабля, т. е. нового оптимального маршрута, с целью уменьшения риска его пересечения с траекторией циклона, но одновременно минимизирую издержки, вызванные изменением маршрута корабля.

Известной проблемой, также привлекающей внимание исследователей, является проблема уменьшения риска экологического загрязнения заданной акватории при следовании кораблем выбранного маршрута в силу возникновения той или иной опасности. Эта проблема является хорошо известной и вплоть до настоящего времени предлагались различные алгоритмы ее решения.

Таким образом уже перечисленные выше задачи образуют «класс задач об оптимальном маршруте судна»:

1) о прохождении кораблем фиксированных зон, пересечение которых характеризуется определенной вероятной опасностью и возможным ущербом;
2) о возможном пересечении траектории корабля с траекторией другого объекта (корабля, циклона и др.);
3) о возможном загрязнении заданной части акватории моря, при осуществлении проводки корабля в этой или других частях бассейна.

Во всех перечисленных задачах возникает необходимость корректировки траектории корабля с целью минимизации риска возникающей опасной ситуации. Однако одновременно с задачей минимизации того или иного риска (а возможно и всех одновременно, но с различными предписанными «весами») приходится решать задачу минимизации затрат, связанных с возможными отклонениями от заранее предписанного маршрута.

В последние годы внимание исследователей привлекают методы решения задач, основанные на теории рисков [1]. В настоящей работе на примере одной из перечисленных выше задачи – *задачи о маршруте судна в условиях «стационарной угрозы»*, рассмотрим возможные подходы к решению описанного выше класса задач. Эти подходы базируются на теории случайных функций и теории рисков, при этом применяются известные методы исследования и решения задач экстремальных задач [2, 3].

**Постановка задачи об оптимальном маршруте корабля.** Пусть в ограниченной области $\Omega$ из $\mathbf{R}^2$ с липшицевой кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ осуществляется движение («проводка») корабля. Для упрощения изложения мы ограничиваемся далее рассмотрением решения задачи в прямоугольной системе координат $x \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$. Обозначим траекторию движения (следования) корабля через $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ («маршрут судна»), где $t \in [0,T]$ – время при $T < \infty$. Предполагается, что $\left| dX / dt \right|^2 \equiv ((dX_1 / dt)^2 + (dX_2 / dt)^2) < \infty \quad \forall t \in [0,T]$, т. е. что скорость движения корабля конечна. Через $X^{(0)}(t) = (X_1^{(0)}(t), X_2^{(0)}(t))$ обозначается «предварительная оптимальная траектория» следования корабля, которая заранее рассчитана и рекомендована службами сопровождения. Считаем выполненными условия:

$$X(0) = X^{(0)}(0) = X_{(0)}, X(T) = X^{(0)}(T) = X_{(T)},$$

т. е. как искомая траектория $X(t)$, так и предварительная $X^{(0)}(t)$ при $t = 0$ выходят из одной и той же точки $X_{(0)}$, и заканчиваются в одной точке $X_{(T)}$ при $t = T$.

Введем функционал вида:

$$J_1(X) \equiv J_1(X, X^{(0)}) = \int_0^T \frac{1}{2} k_1(t) \left| \frac{d(X - X^{(0)})}{dt} \right|^2 dt, \tag{1}$$

где $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ – траектория корабля в условиях возникновения риска (об этом речь будет идти ниже), $X^{(0)}(t)$ – оптимальная траектория, рассчитанная заранее без учета возможного риска. Функции $X_i(t), X_i^{(0)}(t)$, $i = 1,2$ продолжаем на $\mathbf{R}$ постоянной $X_{(0),i}$ при $t < 0$ и постоянной $X_{(T),i}$ при $t > T$. Коэффициент $k_1(t)$ является положительной гладкой функцией $\forall t$.

Функционал (1) можно интерпретировать как величину затрат («*штраф*») за отклонение траектории корабля от $X^{(0)}$.

*Замечание*: Заметим, что можно было бы рассматривать функционал более общего вида:

$$J_1(X)=\int_0^T \frac{1}{2}\left(k_1(t)\left|\frac{d(X-X^{(0)})}{dt}\right|^2+k_0(t)\left|X-X^{(0)}\right|^2\right)dt$$

где $0<k_0(t)<\infty$. Однако для упрощения мы рассматриваем далее $J_1$ вида (1).

Предположим теперь, что в течение заданного промежутка времени $(t_1,t_2)\subset(0,T)$ возможна критическая ситуация с кораблем, например, захват его пиратами, посадка на мель или столкновение с айсбергом. Характеристическую функцию интервала $(t_1,t_2)$ обозначим $m_{1,2}$. Вероятное положение точки возникновения критической ситуации обозначаем $\tilde{\tilde{X}}\equiv(X_1,X_2)$, а ее какую-либо реализацию обозначим $\tilde{X}\equiv(X_1,X_2)$. Координаты точек $\tilde{\tilde{X}},\tilde{X}$ считаем независящими от $t\in(0,T)$. Величины $X_1,X_2$ считаем независимыми и равновозможными.

Распределение плотности вероятности возникновения критической ситуации в $\Omega$ (т. е. появления вероятностной величины $\tilde{\tilde{X}}$ ) зададим как произведение одномерных нормальных распределений:

$$f(x)\equiv f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

с произвольными параметрами $a_1$, $a_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ ($\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$). Известно также [4], что $a_i$ есть математическое ожидание случайной величины $\tilde{\tilde{X}}_i\in\mathbf{R}$, а $\sigma_i$ – среднее квадратичное отклонение $i$-го нормального распределения ($i=1{,}2$). Поэтому чтобы задать нормальные распределения $f_i(x)$ достаточно знать (или задать) параметры $a_i$, $\sigma_i$, $i=1{,}2$.

Пусть далее $a_i\equiv X_i^{(n)}, i=1,2$ - координаты некоторой точки в $\Omega^{(n)}\subset\Omega$ – точки $X^{(n)}\equiv(X_1^{(n)},X_2^{(n)})$ наиболее частого возникновения критической ситуации или просто точки, в которой ожидается данная ситуация.

Параметры $\sigma_1$, $\sigma_2$ будем задавать равными малой положительной величине $\sigma=\sigma_1=\sigma_2>0$, что означает возрастание плотности вероятности при приближении к точке $X^{(n)}$ – *точке возможной неблагоприятной ситуации*.

Пусть ущерб от неблагоприятной ситуации есть $Q$ = const > 0 – например, сумма выкупа, стоимость судна или другие издержки. Считаем, что ущерб «выплачивается» сразу же в момент неблагоприятной ситуации, а корабль продолжает следовать по траектории $X(t)$ (это позволит нам ниже рассматривать задачу без включения времени на задержку корабля). *Обращаем внимание на то, что ниже мы всегда рассматриваем вектор-функцию $X(t)$ как неслучайную функцию.*

Введем следующий функционал:

$$J_2(X(t)) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t)\cdot Q(t)\cdot f\,(X\,(t\,))dt \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t)\cdot Q(t)\cdot M\,(\delta\,(\tilde{\tilde{X}} - X\,(t\,)))dt \equiv \qquad (2)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t)\cdot Q(t)\cdot M_1\,(\delta\,(X_1 - X_1\,(t\,)))\cdot M_2\,(\delta\,(X_2 - X_2\,(t\,)))dt\,,$$

где $\delta(t)$ – «дельта-функция Дирака», а также $M_i(\delta(\tilde{\tilde{X}}_i - X_i(t))) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tilde{X}_i)\delta(\tilde{X}_i - X_i(t))dx_i = f_i(X_i(t))-$ математическое ожидание функции $\delta(\tilde{\tilde{X}}_i - X_i(t))$ случайного аргумента $\tilde{\tilde{X}}_i$ с нормальным законом распределения вероятности ($i=1,2$), $Q \equiv Q(t)$ – ограниченная неотрицательная функция, характеризующая ущерб в случае реализации неблагоприятной ситуации, или просто «ущерб».

Сделаем пояснения к заданию функционала $J_2$ в виде (2). Так будем рассматривать следующее выражение функции ущерба $Q$ от случайной величины $\tilde{\tilde{X}}$ :

$$Q(\tilde{\tilde{X}}, X(t)) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t)\cdot Q(t)\cdot \delta\,(\tilde{\tilde{X}} - X\,(t\,))dt\,.$$

Очевидно, что эта функция нетривиальна, если только существует значение $t \in (t_1, t_2)$ такое, что $\tilde{\tilde{X}} = X(t)$. Замечаем, что при рассмотрении $Q(\tilde{\tilde{X}}, X(t))$ необходимо оперировать с бесчисленным множеством реализаций $\tilde{X}$ вероятной величины $\tilde{\tilde{X}}$. Поэтому, как это осуществляется во многих вопросах теории и приложений случайных процессов, переходим к рассмотрению математических ожиданий случайных процессов как одних из «осредненных характеристик» этих процессов. В силу изложенного выше перейдем от рассмотрения функции $Q(\tilde{\tilde{X}}, X(t))$ случайного аргумента к ее математическому ожиданию:

$$M(Q) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tilde{X}_1) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tilde{X}_2) \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}\cdot Q(t)\cdot \delta\,(\tilde{X} - X\,(t\,))dt d\tilde{X}_2 d\tilde{X}_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t)\cdot Q(t)(\prod_{i=1}^{2} f_i\,(X_i\,(t)))dt = \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}\,(t\,)\cdot Q\,(t\,)f\,\,(X\,(t\,))dt = J_2\,(X\,)$$

Итак, *функционал* $J_2(X)$ *вида* (2) *является математическим ожиданием функции ущерба* $Q(\tilde{\tilde{X}}, X(t))$ *от случайного аргумента* $\tilde{\tilde{X}}$ *с нормальным законом распределения вероятностей.*

Величина $J_2$ представляет собой *функционал риска* или просто *риск* возможной неблагоприятной ситуации. Здесь для измерения рисков используется подход, основанный на измерении убытков в неблагоприятной ситуации, когда показатель риска зависит как от вероятности опасности рассматриваемого события, так и от величины ожидаемых последствий (ущерба). Если ввести разбиение $(t_1, t_2)$ на элементарные подынтервалы длиной $\Delta t$, нетрудно заметить, что величина $J_2$ есть предел суммы «элементарных» рисков, определяемых как произведение вероятности события на величину ущерба от него, широко используемых в инженерных расчетах и практике принятия решений [1].

Образуем теперь функционал вида

$$J_\alpha(X) = J_1(X) + \alpha J_2(X),$$

где $\alpha..0$ – весовой коэффициент. Выбирая $\alpha$ так или иначе мы можем рассматривать различные случаи задачи об оптимальном маршруте корабля.

Сформулируем теперь следующую задачу: требуется найти траекторию $X(t) \in (W_2^1(0,T))^2$, такую что

$$J_\alpha(X(\cdot)) = \inf_{\substack{\tilde{X} \in (W_2^1([0,T]))^2 \\ \tilde{X}(0) = X_{(0)}, \tilde{X}(T) = X_{(T)}}} J_\alpha(\tilde{X}(t)) \tag{3}$$

*– задача об оптимальном маршруте корабля в условиях неблагоприятной ситуации.*

Если принимается $\alpha = 0$ или $0 < \alpha \quad 1$, то это означает, что рассматривается задача с «пренебрежительным» риском неблагоприятной ситуации, и очевидно, что здесь $X \approx X^{(0)}$. Если $\alpha \quad 1$, то величина риска в $J_\alpha$ может стать преобладающей и, возможно, здесь придется принимать решение о значительном изменении траектории $X(t)$ по сравнению с $X^{(0)}$ и идти на значительные дополнительные затраты с целью уменьшения риска.

**Разрешимость задачи и вариационное уравнение.** Предположим, что $X(t)$ есть решение поставленной задачи минимизации (3). Тогда оно необходимо удовлетворяет вариационному уравнению (уравнение Эйлера, необходимое условие оптимальности):

$$\delta J_{\alpha} = \int_0^T \left( k_1(t) \frac{d(X - X^{(0)})}{dt} \cdot \frac{dY}{dt} + \right.$$

$$\left. + \alpha \cdot m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \cdot \nabla f(X) Y \right) dt = 0,$$

$$\forall Y \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2,$$

где

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_1) f_2(X_2),\ f_1(X_1)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_2)\right).$$

Пусть $X^{(0)}$ есть «гладкая» траектория, например $X^{(0)} \in (W_2^2(0,T))^2$. Тогда из вариационного уравнения получаем классическую форму вариационной задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\left( k_1(t) \dfrac{d(X - X^{(0)})}{dt} \right) + \alpha \cdot m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \cdot \nabla f(X(t)) = 0, \\ \qquad t \in (0,T), \\ X(0) = X_{(0)}, X(T) = X_{(T)}. \end{cases}$$

Пусть

$$x(t) = X(t) - X^{(0)}(t).$$

Тогда $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t)) \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$ удовлетворяет системе вида

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\left( k_1(t) \dfrac{dx}{dt} \right) + \alpha \cdot m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \cdot \nabla f(x + X^{(0)}) = 0, t \in (0,T) \\ x(0) = x(T) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

или в покомпонентной форме записи:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\left( k_1(t) \dfrac{dx_1}{dt} \right) + \alpha \cdot m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x + X^{(0)}) = 0, \\ -\dfrac{d}{dt}\left( k_1(t) \dfrac{dx_2}{dt} \right) + \alpha \cdot m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x + X^{(0)}) = 0 \\ \qquad \text{где } t \in (0,T), \\ x_1 = x_2 = 0 \qquad \text{где } t = 0, t = T. \end{cases}$$

Исследование и решение задачи (3) можно осуществить методами теории экстремальных задач [2, 3]. Отыскание экстремальных точек этой задачи можно также осуществить путем отыскания и анализа критических точек, т. е. фактически решений полученной системы (4).

Исследуем вопросы, связанные с разрешимостью задачи (3). Для этого рассмотрим сначала свойства функционала $J_2$.

Запишем $J_2$ как функционал для приращения $x(t) \equiv (X - X^{(0)}) \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$ с учетом того, что $(t_1, t_2) \subseteq (0,T)$:

$$J(x) \equiv J_2(X^{(0)} + x) \equiv \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^T m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \cdot \tilde{f}\,(x(t))dt,$$

где

$$\tilde{f}(x) \equiv \tilde{f}_1(x_1) \cdot \tilde{f}_2(x_2), \tilde{f}_i(x_i) = e^{-\frac{(x_i + X_i^{(0)} - a_i)^2}{2\sigma^2}}.$$

Замечаем, что выражение для первой и второй производных Гато от $J(x)$ имеет вид:

$$DJ(x,h) \equiv \langle F(x), h \rangle \equiv \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^T m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \cdot \nabla\tilde{f}\,h\,dt$$

$$\nabla\tilde{f} \equiv -\frac{\tilde{f}}{\sigma^2}\Big((x_1 + X_1^{(0)} - a_1), (x_2 + X_2^{(0)} - a_2)\Big),$$

$$D^2 J(x; h_1, h_2) \equiv \langle F'(x) h_1, h_2 \rangle \equiv \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^T m_{1,2}(t) \cdot Q(t) \cdot \frac{\tilde{f}}{\sigma^4} \cdot A(x) h_1 h_2\,dt$$

где $h, h_1, h_2 \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$, а матрица $A(x) = A^T(x) \equiv \{a_{ij}(x)\}$ имеет следующие элементы: $a_{ii} = (x_i + X_i^{(0)} - a_i)^2 - \sigma^2$, $i = 1,2$, $a_{12} = a_{21} = (x_1 + X_1^{(0)} - a_1) \cdot (x_2 + X_2^{(0)} - a_2)$.

Собственные числа матрицы $A(x)$ имеют вид:

$$\lambda_1 = -\sigma^2, \lambda_2 = (x_1 + X_1^{(0)} - a_1)^2 + (x_2 + X_2^{(0)} - a_2)^2 - \sigma^2.$$

Следовательно, для любых вектор-функций $x, h \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$ имеем:

$$D^2 J(x; h, h) = \langle F'(x) h, h \rangle \ldots \frac{(-Q_1)}{2\pi\sigma^4} \| h \|^2_{L_2(0,T))^2},$$

где

$$Q_1 \equiv \max_{t\in[0,T]} |Q(t)|.$$

Рассмотрим теперь функцию $\phi(\xi)$ при $\xi \in [0,1]$ вида

$$\phi(\xi) \equiv \langle F(\xi x), x\rangle$$

при некотором $x \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$. Отмечаем, что

(а)
$$|\phi(0)| = |\langle F(0), x\rangle| \le \frac{Q_1}{2\pi\sigma^4}\int_0^T | X^{(0)} - a |\cdot |x|\,dt \le$$
$$\le \frac{Q_1}{2\pi\sigma^4} \| X^{(0)} - a \|_{(L_2(0,T))^2} \cdot \| x \|^2_{(L_2(0,T))^2} < \infty;$$

(б)
$$\frac{d\phi}{d\xi}(\xi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^T m_{1,2}(t)\cdot Q(t)\cdot\frac{\tilde{f}}{\sigma^4}\cdot A(\xi x)x\,x\,dt$$
$$\left|\frac{d\phi(\xi)}{d\xi}\right| \le \frac{Q_1}{2\pi\sigma^6}\cdot C_0\cdot\| x \|^2_{(L_2(0,T))^2},$$

где $C_0 = \max_x(|\lambda_1|,|\lambda_2|) \le \text{const} < \infty$ при условии ограниченности области.

Следовательно, при любом $\xi \in [0,1]$ справедлива формула

$$\phi(\xi) = \int_0^T \frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi')d\xi' + \phi(0),$$

из которой в частности следует непрерывность $\phi(\xi)$ по $\xi$:

$$|\phi(\xi + \Delta\xi) - \phi(\xi)| \le |\Delta\xi|\cdot\frac{C_0 Q_1}{2\pi\sigma^6}.$$

*Таким образом функция* $\langle F(\xi x), x\rangle$ *непрерывна по* $\xi$ *на* $[0,1]$ *при любом* $x \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$.

Функционал $J_1(x) \equiv J_1(x + X^{(0)})$ является квадратичным и для него справедлива оценка вида

$$J_1(x) \ge \frac{k_1^{(0)}}{2}\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \| x \|^2_{(L_2(0,T))^2},$$

где

$$k_1^{(0)} = (\min_{t\in[0,T]} k_1(t)) > 0,$$

а также имеют место очевидные соотношения:

$$\left\langle J_1'(x), x\right\rangle = \int_0^T \frac{1}{2} k_1(t) \left| \frac{dx}{dt} \right|^2 dt \ldots \frac{1}{2} k_1^{(0)} \left\| \frac{dx}{dt} \right\|^2_{(L_2(0,T))^2} \ldots \frac{1}{2} k_1^{(0)} \left( \frac{\pi}{T} \right)^2 \| x \|^2_{(L_2(0,T))^2},$$

$$\left\langle J_1''(x)h, h\right\rangle = \int_0^T \frac{1}{2} k_1(t) \left| \frac{dh}{dt} \right|^2 dt \ldots \frac{1}{2} k_1^{(0)} \left( \frac{\pi}{T} \right)^2 \| h \|^2_{(L_2(0,T))^2}.$$

Предположим в дальнейшем выполнение следующего неравенства:

$$\alpha \cdot Q_1 < \frac{\pi^3 \sigma^4 k_1^{(0)}}{T^2}. \tag{5}$$

При выполнении (5), свойств функционалов $J_1(x)$, $J_2(x)$ и теорем нелинейного анализа [3] для функционала $J_\alpha = J_1 + \alpha J_2$ и его градиента $DJ_\alpha \equiv F_\alpha$ имеет место соотношение и свойства:

а) функция $\left\langle F_\alpha(x), x \right\rangle$ непрерывна по $\xi$ на $[0,1]$ при любом $x \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$,

б) $\left\langle F_\alpha(x+h) - F_\alpha(x), h \right\rangle > 0$ для всех $x, h \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$, т. е. $F_\alpha$ – строго монотонный оператор, а $J_\alpha$ – строго выпуклый,

в) $\lim\limits_{\|x\|_{(\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2} \to \infty} \dfrac{\left\langle F_\alpha(x), x \right\rangle}{\| x \|^2_{(\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2}} \geq C = \text{const} > 0,$ следовательно $F_\alpha$ – коэрцитивен.

На основании приведенных свойств функционала $J_\alpha$ устанавливается:

***Теорема.*** Пусть выполнено условие (5). Тогда в любой конечной окрестности $S \equiv \{X \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2 : \| X - X^{(0)} \|_{(\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2}, R < \infty\}$ существует внутренняя точка $X \in S$, в которой $J_\alpha$ имеет абсолютный минимум и $X$ удовлетворяет уравнению $\left\langle J_\alpha'(X), h \right\rangle = 0 \;\; \forall h \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$, т. е. $X$ является решением задачи (3).

***Доказательство.*** Переходя к $x \equiv X - X^{(0)}$, рассмотрим функционал $J_\alpha(x)$. Тогда задача (3) эквивалентна задаче об отыскании минимального значения $J_\alpha(x)$ при $x \in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2$.

Для $J_\alpha(x)$ справедливы установленные ранее свойства (а) – (в). Кроме того, при выполнении (5) имеем:

$$\left\langle J''_{\alpha}(x)h,h\right\rangle ..0 \quad \forall x,h\in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2.$$

Следовательно функционал $J_{\alpha}(x)$ слабо полунепрерывен снизу на любом $S_R = \{x\in (\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2 |:\| x\|_{(\overset{0}{W}{}_2^1(0,T))^2} \leqslant R\}$ (см. теоремы 8.5, 8.6 из [3]).

Теперь на основе обобщения теорем Вейерштрасса и теорем о существовании критических точек (см. § 8 из [3]) заключаем, что в $S_R$ существует единственная внутренняя точка $x_0$ абсолютного минимума функционала $J_{\alpha}$, при этом $x_0$ удовлетворяет уравнению $J'_{\alpha}(x_0)=0$, которое в «классической» форме записи есть (4). Если теперь ввести вектор-функцию $X \equiv x_0 + X^{(0)}$, то именно она является решением системы (4). Данное решение единственно и оно удовлетворяет (3).

Приближенное решение системы (4) можно осуществить различными методами, один из которых будет рассмотрен далее.

**Приближенное решение задачи.** Пусть $Q = \text{const} > 0$ и $m_{1,2} = \text{const} > 0$ и $k_1 = \text{const} > 0$ (интерпретацию задачи, когда это возможно, мы фактически дали уже выше). Приближенное решение нелинейной задачи (4) будем искать итерационным методом. Для его построения заменим $x$ на $x^{k+1}$, после чего линеаризуем уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(k_1(t)\frac{dx^{k+1}}{dt}\right) = \alpha\cdot Q(t)\cdot m_{1,2}(t)\nabla f\left(x^{k+1}+X^{(0)}\right)\approx$$

$$\approx \alpha\cdot Q\cdot m_{1,2}\nabla f\left(x^{k}+X^{(0)}\right)+\left(\alpha Q\, m_{1,2}\,\Delta f\left(x^{k}+X^{(0)}\right)\right)\left(x^{k+1}-x^{k}\right)$$

Получили итерационный метод Ньютона. Известно, что метод дает квадратичную скорость сходимости. Далее можно также получить приближенное решение, например, разностным методом или методом конечных элементов. В общем случае для решения задачи типа (4) целесообразно применять тот или иной алгоритм в зависимости от свойств операторов задачи (величин параметров $\alpha, Q$ и т.д.).

Далее приведены примеры результатов численных расчетов на «модельной» задаче. Исследовалось влияние изменения параметра весового коэффициента $\alpha$, задающего величину влияния риска неблагоприятной ситуации на изменение траектории судна, и среднего квадратичного отклонения $\sigma$, характеризующего плотность вероятности неблагоприятной ситуации с судном. Результаты отражены на рисунке.

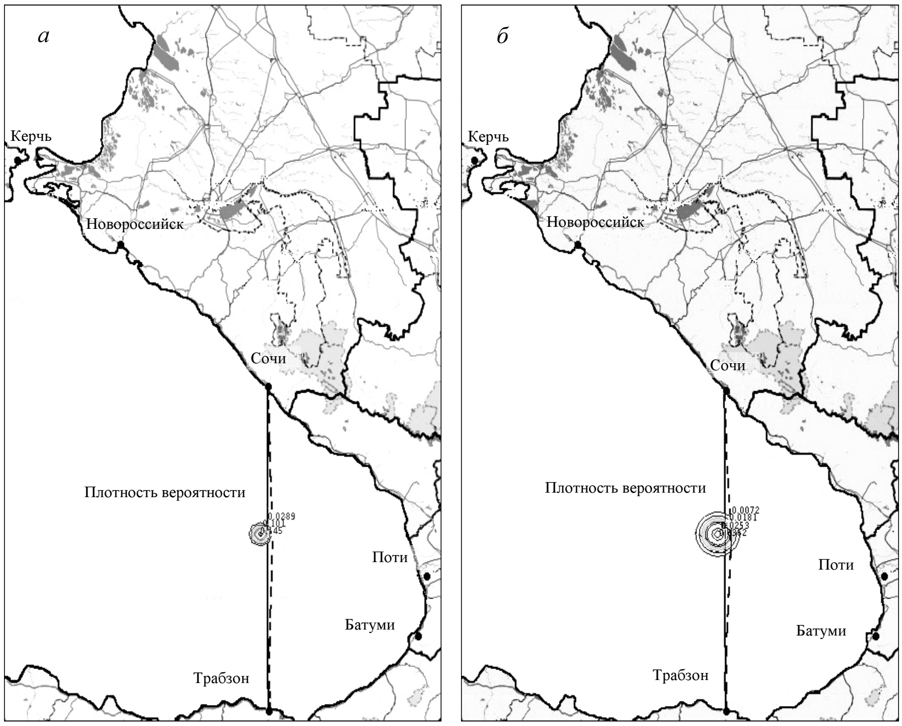


Рисунок. На карте представлены оптимальные маршруты Трабзон (Турция) – Сочи (Россия) как результат работы программы при различных значениях входных параметров $\alpha$ и $\sigma$: *а* – $\alpha$ = 1 и $\sigma$ = 2; *б* – $\alpha$ = 5 и $\sigma$ = 20. Остальные параметры для простоты вычислений брались константой, равной единице. Сплошная линия – изначальная траектория, пунктир – оптимальная траектория, круги – функция плотности распределения.

**Заключение.** Несложно заметить, что рассмотренная выше задача легко обобщается на случай наличия $N$ возможных критических ситуаций. В этом случае функционал $J_2$ может быть задан в следующем виде:

$$J_2(X) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}^{(n)}(t) \cdot Q^{(n)}(t) \cdot f^{(n)}(X(t))dt,$$

где $m_{1,2}^{(n)}(t)$, $Q^{(n)}(t)$, $f^{(n)}(X(t))$ имеют физический смысл, что и $m_{1,2}(t)$, $Q(t)$, $f(X(t))$ в рассмотренной выше задаче, но только для $n$-й критической ситуации.

Аналогично изложенному можно также рассмотреть алгоритм решения других задач об оптимальном маршруте судна, сформулированных во введении. Конечно, каждая из этих задач имеет свою специфику, что будет отражаться и на алгоритмах их исследования и решения. Однако, общим для них может быть применение методологии, основанной на теории случайных функций, теории риска и методах решения экстремальных задач.

**Благодарности.** *Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы и федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007 – 2013 годы».*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений – М.: Мир, 1990. – 208 с.
2. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление – М.: Физматлит, 2007. – 408 с.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов – М.: Наука, 1977. – 417 с.
4. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам – М.: Айрис-пресс, 2010. – 288 с.
5. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды – М.: Наука, 1982. – 320 с.
6. *Агошков В.И., Заячковский А.О.* Исследование и алгоритм решения задачи об оптимальном маршруте корабля на основе теории рисков при дистанционном зондировании опасностей // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2012. – Том 9, № 3. – С. 9-17.

Материал поступил в редакцию 25.10.2012 г.

*АНОТАЦІЯ* Для різних даних, що вказують на наявність небезпеки для проходження судна, встановлюється величина ризику виникнення критичної ситуації з кораблем і запропоновано алгоритм знаходження оптимального маршруту корабля. Метод знаходження оптимального маршруту корабля базується на мінімізації «функціоналу вартості», що описує сумарні витрати, якими може бути обтяжений обраний маршрут між розрахунковими точками. Розглянуті варіаційні рівняння для мінімізації функціоналу і досліджені питання, які пов'язані з здійсненнем завдання. Завдання вирішувалася чисельно, для наближеного розв'язання використовувався ітераційний метод на акваторії Чорного моря.

*ABSTRACT* In this paper an algorithm for finding the optimum ship route is proposed. The method for finding the optimum ship route is based on the route cost functional, which describes the total costs the route between the two points may be burdened with. We consider some kinds of critical situation with the ship. Having described the situation possibilities characteristics and the loss of consequences we get the numerical estimation of risk. There are considered variational equations for minimization of the functional and the problem of solvability is examined. The problem was solved numerically, for the approximate solution of iterative method has been used in the water area of the Black sea.