УДК 551.46(262.5)

С.В. Кочергин

Морской гидрофизический институт НАН Украины, г. Севастополь

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ И ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ФИЛЬТРАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Реализован алгоритм идентификации начального поля концентрации на основе вариационного метода фильтрации линейных систем алгебраических уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *сопряженная задача, метод фильтрации, поле концентрации, алгоритм оценки.*

Для решения ряда практических задач экологической направленности требуется определение начального поля концентрации по данным измерений, имеющихся в различных точках исследуемой области для различных моментов времени. В данной работе для определения начального поля концентрации предлагается использовать алгоритм оценки значений поля концентрации [1] и вариационный алгоритм фильтрации алгебраических систем уравнений [2], который неоднократно успешно применялся для решения океанографических задач [3].

Алгоритм. Пусть динамика поля концентрации пассивной примеси описывается одномерным уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x}=k\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial C}{\partial n}=0 \qquad (2)$$

и начальными данными

$$t=0: C(x)=C_0(x), \qquad (3)$$

где C – концентрация примеси, U – скорость течения, k – коэффициент турбулентной диффузии, n – нормаль к границе области $D_t=D\times[0,T]$. Следуя [4], поставим в соответствие (1) – (3) сопряженную задачу

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t}-\frac{\partial UC^*}{\partial x}-k\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2}=p(x). \qquad (4)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial n}=0. \qquad (5)$$

$$t=T: C^*(x)=h(x). \qquad (6)$$

Откуда получаем

$$\int_{\Omega} C d\Omega = \int_{D} C_0 C^* dD , \tag{7}$$

где Ω – некоторая область D, а C^* – решение сопряженной задачи (4) – (6) в которой $p(x) \equiv 0$, $h(x) = \begin{cases} 1 \text{ в } \Omega \\ 0 \text{ вне } \Omega \end{cases}$. Следуя [1] из (7) имеем оценку концентрации в ячейке разностной сетки

$$\overline{C} = \int_{D} C_0 C^* dD , \tag{8}$$

где $\Omega = \Delta x$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x} & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases}$.

Пусть сеточные значения поля C_0 заданы следующим образом

$$C_0 = \begin{cases} C_i^0, & \tau \in [i_1, i_2] \\ 0, & \tau \notin [i_1, i_2] \end{cases}. \tag{9}$$

Тогда (8) можно записать в виде

$$\overline{C}^{\,j} = \sum_{i_1}^{i_2} C_i^0 C_i^{*j} \Delta x \quad . \tag{10}$$

Систему алгебраических уравнений (10) перепишем в виде

$$AC^0 = \overline{C} , \tag{11}$$

где C^0 – искомые значения, $\overline{C}$ – данные измерений, которые чаще всего известны с ошибкой

$$\overline{C} = C + \delta C . \tag{12}$$

Будем считать, что задана априорная информация $\|\delta C\|_E^2 = \delta^2$, $\|C\|_E^2 \le M^2$, где δ^2 и M^2 – заданные числа.

Суть метода фильтрации состоит в том, что используется специальная процедура, в которой происходит переход к новой системе с меньшим уровнем шума в правой части. Этот переход осуществляется за счет плоских вращений исходной системы и максимизации квадратичного функционала специального вида. Уравнения новой системы сортируются по рангу и неинформативные уравнения не рассматриваются при ее решении. В качестве априорной информации используется дисперсия ошибок при определении правой части уравнений исходной системы и максимум возможных амплитуд искомого начального поля, который определяется из физических соображений. В результате работы алгоритма получаем эквивалентную систему, в которой уравнения выстроены по рангу информативности. Считая, что система (11) переопределенная, выбираем необходимое количество наиболее информативных уравнений и решаем их одним из известных способов.

Результаты численных экспериментов. Модель (1) – (3) интегрировалась со следующими входными параметрами: $U = 10$ см/с, $k = 5 \cdot 10^3$ см/с, $[0, T] \approx 37$ суток. При решении (1) – (3) использовалась явная схема по времени $(\Delta t = 400\ c)$ и *TVD*-аппроксимации (*Total Variation Diminishing* – уменьшение полной вариации) по пространству [5].

На рис. 1 представлено начальное поле (жирная сплошная линия), решение модели (1) – (3) на конечный момент времени (тонкая сплошная линия) и оценка поля концентрации (пунктирная линия) полученная по формуле (10).

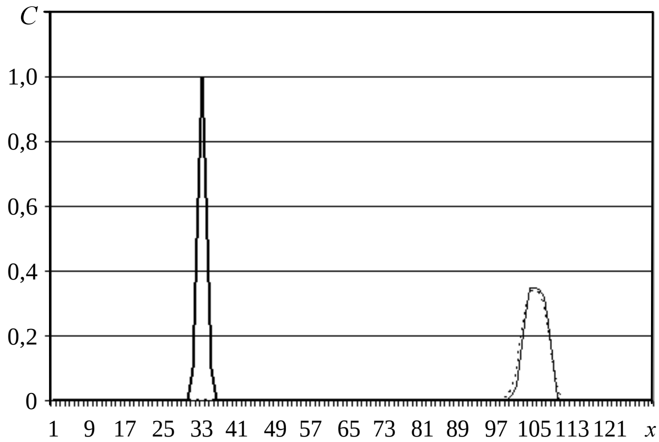

Рис. 1. Поля концентрации.

На рис. 2 представлено начальное поле C_0 (в пяти точках заданы следующие значения: 0,1; 0,5; 1,0; 0,5; 0,1) – жирная сплошная линия. Решение модели рассматривается в качестве данных измерений. Отличия $\overline{C}$ от модельных значений будем считать ошибками измерений. Если в правой части системы (11) использовать значения оценок $\overline{C}$, то система уравнений точная. Решение наиболее информативных пяти уравнений, совпадает с известным начальным полем C_0. Если в качестве правой части (11) взять решение задачи (1) – (3), то найденное начальное поле C_0 (тонкая сплошная линия) не согласованно с известным. При использовании десяти измерений переопределенная система и алгоритм фильтрации дает решение изображенное на рис. 2 пунктирной линией. Добавление к системе еще трех уравнений с точными данными $\overline{C}$ в правой части существенно улучшает решение (штриховая линия).

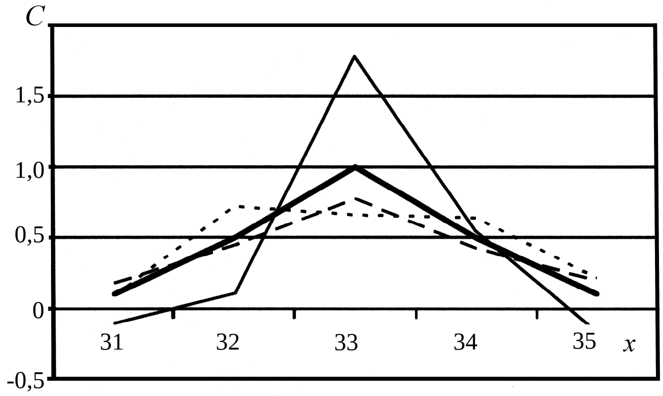

Рис. 2. Распределения начальных полей концентрации.

Таким образом, на тестовом примере показана работоспособность предложенного алгоритма, в основе которого лежат метод оценки поля концентрации с использованием решения сопряженных задач и вариационного алгоритма фильтрации систем алгебраических уравнений. За счет преобразования исходной переопределенной системы алгебраических уравнений происходит понижение зашумленности правой части данных измерений, а добавление точных данных существенно улучшает структуру идентифицируемого начального поля концентрации.

Список литературы

1. *Кочергин В.С.* Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач // «Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа». – Севастополь.: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика». – 2011. – Вып. 25, том 2. – С. 270-376.
2. *Страхов В.Н.* // Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений – основа для решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии // Докл. АН СССР. – 1991, № 3. – С. 595-599.
3. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2002. – 238 с.
4. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
5. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // I. Comput. Phys. – 1983. – Vol. 49. – P. 357-393.

Материал поступил в редакцию 17.10.2012 г.

АНОТАЦІЯ Реалізовано алгоритм ідентифікації початкового поля концентрації на основі варіаційного методу фільтрації лінійних систем алгебраїчних рівнянь.

ABSTRACT An algorithm of identification of the initial concentration fields on the basis of the variational method of filtration linear systems of algebraic equations was done.