

С.В.Доценко, С.А.Кузнецов

*Севастопольский национальный технический университет, г.Севастополь***СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АКУСТИЧЕСКОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ ПРИБРЕЖНОГО МОРСКОГО ВОЛНЕНИЯ**

Представлена теоретическая модель процесса измерения акустического поля, создаваемого прибрежным морским волнением. Показано, что измерительный прибор является пространственно-временным фильтром низких частот; найдены его характеристики.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *акустическое поле, измерение, морское волнение, диаграмма направленности, спектр, корреляционная функция.*

Морские волны, набегающие на берег, создают акустический шум, физические параметры которого связаны с характеристиками волнения. Поэтому шум прибоя можно использовать для количественного определения этих характеристик [1].

Любой измерительный прибор обладает фильтрующими свойствами по отношению к воспринимаемому процессу. В нашем случае он представляет собой пространственно-временной фильтр. Влияние этого прибора на измеренные характеристики волнения можно оценить, только зная параметры этого фильтра.

Получим и исследуем эти параметры. Их правильная оценка может быть произведена при знании связи выходного сигнала акустического приемника с шумом прибрежного морского волнения. Найдем эту связь. При этом сделаем следующие предположения:

1. Береговая линия (линия прибоя) прямолинейна.
2. Излучение акустических колебаний происходит только в точках этой линии.
3. Акустические колебания представляют случайный стационарный процесс, статистически однородный вдоль береговой линии. Он генерируется разрушающимися на берегу волнами и перемещением грунта (щебня, гальки, песка), вызванного волнением.
4. Приемник акустического излучения (микрофон, геофон) является точечным, безынерционным и находится на некотором расстоянии от берега.



Рис. 1. Геометрия задачи.

На рис.1 представлено взаимное расположение приемника и береговой линии. Выделим на береговой линии на расстоянии  $x$  от точки  $O$  – начала координат элемент  $dx$ , излучающий акустические колебания. Амплитуда этих колебаний есть  $X(x; t)dx$ , где  $X(x; t)$  – значение централизованного случайного процесса акустического излучения в точке  $x$  береговой линии в момент  $t$ . Согласно принципу Гюйгенса [2] элемент  $dx$  излучает сферические колебания,

центром которых он является, с интенсивностью, убывающей обратно пропорционально расстоянию до приемника. Поэтому акустический сигнал от этого элемента, имеющий в точке излучения  $x$  в момент  $t$  значение  $X(x; t)$ , в точке приема  $A$  имеет значение

$$X(x; t - t_3) \frac{dx}{r}. \quad (1)$$

Здесь величина

$$r = \sqrt{l^2 + x^2} \quad (2)$$

есть расстояние между точками  $x$  и  $A$ , а

$$t_3 = r/c = \sqrt{l^2 + x^2}/c \quad (3)$$

– время запаздывания, в течение которого акустический сигнал, распространяясь со скоростью  $c$ , приходит из точки  $x$  в точку  $A$ .

Допустим, что поле  $X(x; t)$  представляет собой случайный двумерный пространственно-временной высокочастотный акустический шум  $X_a(x; t)$ , амплитудно-модулированный низкочастотными случайными поверхностными волнами  $X_w(x; t)$ . Его можно записать как

$$X(x; t) = X_w(x; t) X_a(x; t).$$

Здесь зависимость от  $x$  описывает пространственную изменчивость акустического поля вдоль береговой линии, зависимость от  $t$  – временную.

Акустический шум и поверхностные волны имеют различную физическую природу. Поэтому можно считать поля  $X_a(x; t)$  и  $X_w(x; t)$  статистически независимыми, а, следовательно, некоррелированными.

Отметим одно важное обстоятельство. Рассматриваемое поле  $X(x; t)$  зависит от двух переменных, имеющих различную физическую размерность:  $x$  – пространственная переменная,  $t$  – временная. Применяемые ниже расчеты требуют, чтобы двумерное поле зависело от переменных одинаковой размерности. За основу возьмем пространственную переменную. При этом можно временную переменную привести к пространственной с помощью соотношения:  $y = ct$ , где  $c$  – скорость звука, и тем самым заменить  $X(x; t)$  на  $\hat{X}(x; y)$ . Согласно формуле (3) видим, что при этом величина

$$y_3 = ct_3 = \sqrt{l^2 + x^2} \quad (4)$$

есть просто расстояние от точки излучения  $x$  акустического сигнала до точки  $A$  его приема. Формула (1) принимает вид

$$\hat{X}(x; y - y_3) \frac{dx}{r}, \quad (5)$$

и полный сигнал на выходе акустического приемника является взвешенной суммой элементарных сигналов вида (5), излучаемых во всех точках береговой линии

$$Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(x; y - y_3) \frac{H(\varphi)}{r} dx, \quad (6)$$

где  $H(\varphi) = H(\arctg(x/l))$  – диаграмма направленности акустического приемника.

Так как поле  $\widehat{X}(x; y)$  статистически однородно и стационарно, то сигнал  $Y(y)$  также стационарен. Оценим корреляционную функцию этого сигнала

$$B_Y(\Delta) = \mathbf{M}[Y(y)Y(y + \Delta)].$$

Символ  $\mathbf{M}[\cdot]$  означает математическое ожидание величины, стоящей в прямых скобках, величина

$$\Delta = c\tau \quad (7)$$

– пространственный сдвиг, соответствующий временному сдвигу  $\tau$ .

Учет выражения (6) дает

$$B_Y(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}[\widehat{X}(x_1; y - y_{31})\widehat{X}(x_2; y + \Delta - y_{32})] \frac{H(\varphi_1)H(\varphi_2)}{r_1 r_2} dx_1 dx_2, \quad (8)$$

Здесь индекс «1» относится к величинам, зависящим от переменной  $x_1$ , индекс «2» – к величинам, зависящим от переменной  $x_2$ . Так как поле  $\widehat{X}(x; y)$  статистически однородно и стационарно, то стоящее под знаком интеграла выражение  $\mathbf{M}[\cdot] = B_{\widehat{X}}(x_2 - x_1; \Delta + y_{31} - y_{32})$  есть корреляционная функция этого поля. Поэтому (8) можно записать как

$$B_Y(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\widehat{X}}(x_2 - x_1; \Delta + y_{31} - y_{32}) \frac{H(\varphi_1)H(\varphi_2)}{r_1 r_2} dx_1 dx_2. \quad (9)$$

Будем считать, что диаграмма направленности акустического приемника может быть аппроксимирована функцией

$$H(\varphi) = H_n(\varphi) = \cos^n \varphi, \quad n \geq 1.$$

Диаграммы направленности такого вида для  $n = 1, 2, 3, 4$  представлены на рис.2, а. Они достигают уровня  $1/\sqrt{2}$  при углах (в градусах)

$$\varphi_n^0 = 90 - 180 \arccos(2^{-n/2}) / \pi.$$

В частности, имеем  $\varphi_1^0 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2^0 = 30^\circ$ ,  $\varphi_3^0 = 20,7^\circ$ ,  $\varphi_4^0 = 14,48^\circ$ ,  $\varphi_5^0 = 10,18^\circ$ . Чем больше показатель  $n$ , тем диаграмма уже.

Учитывая, что  $\cos(\arctg(z)) = 1/\sqrt{1+z^2}$ , получим весовые функции акустических приемников

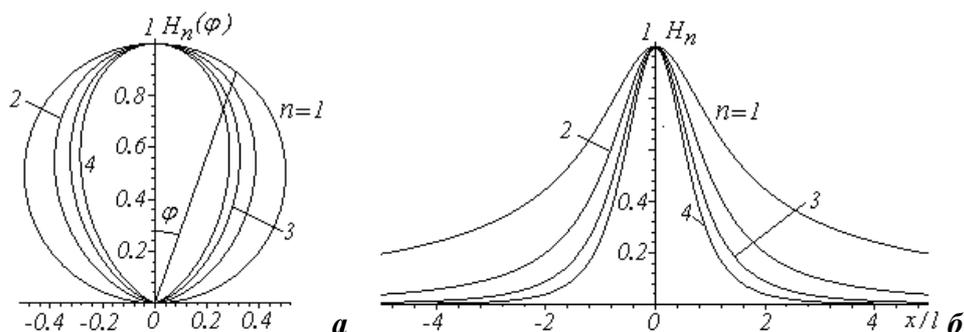


Рис. 2. Диаграммы направленности (а) и весовые функции (б).

$$H_n(\operatorname{arctg}(x/l)) = \left[1 + (x/l)^2\right]^{-n/2}, \quad (10)$$

ассоциированные с береговой линией. Они изображены на рис.2, б. Характерная полуширина этих функций

$$r_{Hn} = \int_0^{\infty} \left[1 + (x/l)^2\right]^{-n} dx = \frac{(2n-3)!! \pi}{(2n-2)!! 2}.$$

В частности, для различных  $n$  имеем:

$$r_{H1} = \frac{\pi}{2}l, \quad r_{H2} = \frac{\pi}{4}l, \quad r_{H3} = \frac{3\pi}{16}l, \quad r_{H4} = \frac{5\pi}{32}l, \quad r_{H5} = \frac{35\pi}{256}l.$$

Чем больше  $n$ , тем они уже. При этом приемник осредняет акустический сигнал, принятый от меньшего сектора береговой линии.

Учитывая формулу (10) и соотношение (2), запишем выражение (9) в виде

$$B_Y(\Delta) = \frac{1}{l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\bar{X}}(x_2 - x_1; \Delta + y_{31} - y_{32}) \cdot \left\{ \left[1 + (x_1/l)^2\right] \left[1 + (x_2/l)^2\right] \right\}^{-(n+1)/2} dx_1 dx_2. \quad (11)$$

Согласно теореме Винера-Хинчина, корреляционная функция  $B(x; y)$  двумерного поля связана с его двумерной спектральной плотностью  $G_2(\alpha_1; \alpha_2)$  двумерным преобразованием Фурье

$$B_{\bar{X}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\alpha_1, \alpha_2) e^{j(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$G_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\bar{X}}(x, y) e^{-j(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy,$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – волновые числа, соответствующие первой и второй пространственным координатам. Подставив первое из этих выражений в (11), найдем

$$B_Y(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\alpha_1, \alpha_2) |h_n(\alpha_1, \alpha_2)|^2 e^{j\alpha_2 \Delta} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (12)$$

где обозначено  $h_n(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + (x/l)^2\right]^{-(n+1)/2} \exp\left[j(\alpha_1 x - \alpha_2 y_3)\right] dx$ .

Учитывая выражение (4), отсюда получаем:

$$h_n(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + (x/l)^2\right]^{-(n+1)/2} \exp\left[j\left(\alpha_1 x - \alpha_2 \sqrt{l^2 + x^2}\right)\right] dx. \quad (13)$$

Из формулы (12) видно, что найденная двумерная функция  $h_n(\alpha_1; \alpha_2)$  представляет собой характеристику пространственно-временного фильтра, которым является измерительный прибор. Параметры этого фильтра не зависят от свойств измеряемого поля, а определяются видом диаграммы направленности  $H_n(\varphi)$  акустического приемника и расстоянием  $l$  этого приемника от берега.

Показателем экспоненты формулы (12), согласно (7), является величина  $\alpha_2 \Delta = \alpha_2 c \tau$ . Так как  $\tau$  – временной сдвиг, то это произведение есть  $\omega \tau$ , где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота. Отсюда имеем  $\alpha_2 = \omega/c$ .

Упростим выражение (13). Для этого произведем замену переменной  $x = lz$  и обозначим нормированные параметры  $\beta = \alpha_1 l$ ,  $\gamma = \alpha_2 l$ . Получим

$$h_n(\beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+z^2)^{-(n+1)/2} \exp\left[j(\beta z - \gamma \sqrt{1+z^2})\right] dz. \quad (14)$$

По определению величина  $\alpha_1 = 2\pi/\lambda$  есть волновое число акустического поля вдоль береговой линии, соответствующее длине волны  $\lambda$  этого поля. Следовательно, безразмерная величина  $\beta = 2\pi l/\lambda$  соответствует пространственной частоте фильтра, безразмерная  $\gamma = \omega l/c = 2\pi f l/c$  – его временной частоте.

Применяя формулу Эйлера, преобразуем числитель подынтегрального выражения следующим образом

$$\begin{aligned} \exp\left[j(\beta z - \gamma \sqrt{1+z^2})\right] &= \cos(\beta z) \left[ \cos(\gamma \sqrt{1+z^2}) - j \sin(\gamma \sqrt{1+z^2}) \right] + \\ &+ \sin(\beta z) \left[ \sin(\gamma \sqrt{1+z^2}) + j \cos(\gamma \sqrt{1+z^2}) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Первое слагаемое правой части этой формулы – четная функция аргумента  $z$ , второе – нечетная функция. Результат подстановки (15) в (14) можно записать как

$$h_n(\beta, \gamma) = h_{n_o}(\beta, \gamma) - j h_{n_m}(\beta, \gamma),$$

где действительная часть характеристики фильтра  $h_n(\alpha_1, \alpha_2)$  равна

$$h_{n_o}(\beta, \gamma) = 2 \int_0^{\infty} (1+z^2)^{-(n+1)/2} \cos(\beta z) \cos(\gamma \sqrt{1+z^2}) dz$$

и мнимая часть равна

$$h_{n_m}(\beta, \gamma) = 2 \int_0^{\infty} (1+z^2)^{-(n+1)/2} \cos(\beta z) \sin(\gamma \sqrt{1+z^2}) dz.$$

Полученные интегралы не вычисляются аналитически и их значения должны определяться численно. Приведенные в справочниках [3, 4] аналитические выражения для этих интегралов неверны.

Входящий в формулу (12) квадрат модуля характеристики есть

$$|h_n(\beta, \gamma)|^2 = h_{n_o}^2(\beta, \gamma) + h_{n_m}^2(\beta, \gamma). \quad (16)$$

Эта функция описывает коэффициент передачи мощности воспринимаемого прибором случайного двумерного сигнала в зависимости от пространственной и временной частот этого сигнала. Ее частный случай для  $n = 1$  представлен на рис.3, из которого следует, что эта спектральная характеристика прибора представляет собой фильтр низкой частоты в области как временных, так и прост-

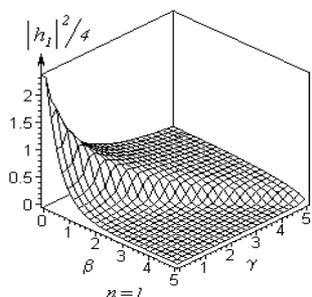
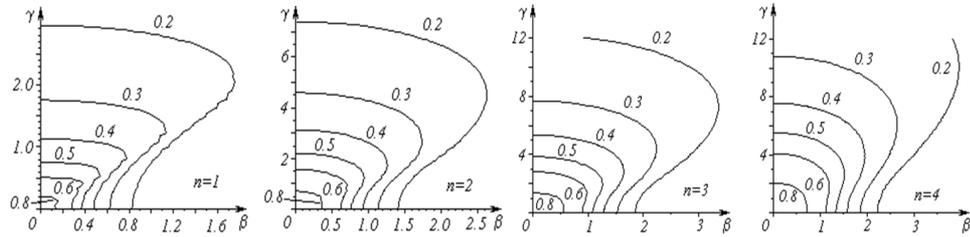


Рис. 3. Спектральная характеристика акустического приемника.



Р и с . 4 . Горизонтальные сечения спектральных характеристик акустического приемника.

ранственных частот. Для других  $n$  эта характеристика качественно имеет близкий вид, отличаясь количественными показателями.

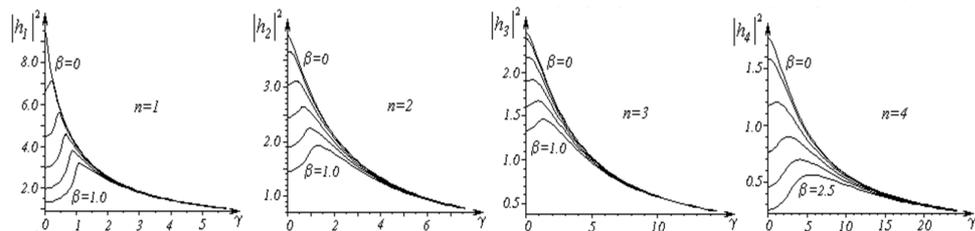
Анализировать и применять эту характеристику можно, используя ее горизонтальные сечения на заданных уровнях  $q$  ослабления спектра. На рис.4 представлены изолинии нормированного квадрата модуля характеристики фильтра  $q = |h_n(\beta, \gamma)|^2/a_n$ , где обозначены как  $a_n = |h_n(0, 0)|^2$  значения этой величины в начале координат. Расчеты дают  $a_1 = 9,455$ ,  $a_2 = 3,990$ ,  $a_3 = 2,465$ ,  $a_4 = 1,777$ .

Величины уровня указаны около каждой изолинии.

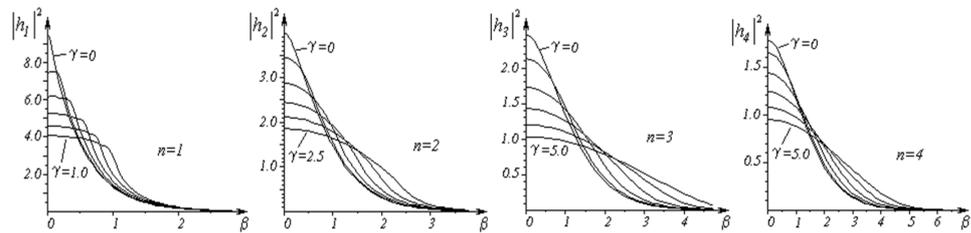
На рис.4 изображена характеристика только в первом квадранте. В силу четности по переменным  $\beta$  и  $\gamma$  она симметрично повторяется в остальных квадрантах.

Из рисунка следует, что с увеличением числа  $n$  (т.е. с уменьшением ширины диаграммы направленности приемника) спектральная характеристика расширяется, особенно в частотном направлении (вдоль переменной  $\gamma$ ). Это, как и следовало ожидать, означает, что, имея более узкую диаграмму направленности, можно исследовать более мелкие детали измеряемого шума.

Рис.4 передает не все особенности этого пространственно временного фильтра. Некоторые из них значительно лучше видны на вертикальных сечениях характеристики (16). Так, на рис.5 представлены частотные характеристики прибора, соответствующие различным волновым числам сигнала (от  $\beta = 0$  до  $\beta = 2,5$ ) и разным диаграммам направленности микрофона (от  $n = 1$  до  $n = 4$ ). Величина коэффициента передачи низких частот больше для микрофонов с широкой диаграммой направленности. Имеет место слабо выраженный максимум, положение и величина которого зависят от  $n$  и  $\beta$ . В целом коэффициент передачи убывает с ростом  $\gamma$  тем быстрее, чем меньше  $n$ .



Р и с . 5 . Вертикальные сечения спектральных характеристик акустического приемника плоскостями  $\beta = \text{const}$ .



Р и с. 6. Вертикальные сечения спектральных характеристик акустического приемника плоскостями  $\gamma = \text{const}$ .

На рис.6 изображены зависимости коэффициента передачи фильтра от нормированного волнового числа  $\beta$  при постоянных заданных нормированных частотах  $\gamma$ . Эти характеристики монотонно убывают с ростом  $\beta$ . Общая величина коэффициента передачи убывает с ростом  $n$  (т.е. с уменьшением ширины диаграммы направленности микрофона).

Приведенный анализ спектральных характеристик акустического измерителя прибрежного морского волнения показывает, что эти характеристики имеют достаточно сложную структуру, которую необходимо учитывать при проведении измерений и интерпретации полученных результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доценко С.В., Кузнецов С.А. Измерение характеристик прибрежного морского волнения сейсмоакустическими методами // Вісник СевНТУ. Інформатика, електроніка, зв'язок.– Севастополь, 2003.– вып.101.– С.150-152.
2. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. / Е.Л. Шендеров. — Л.: Судостроение, 1989. — 304 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физмат, 1962.– 1100 с.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.– М.: Наука, 1981.– 800 с.

Материал поступил в редакцию 21.11.2012 г

**АНОТАЦІЯ.** Представлена теоретична модель процесу виміру акустичного поля, створюваного прибрежним морським хвилюванням. Показано, що вимірювальний прилад є просторово-часовим фільтром низьких частот; знайдені його характеристики.

**ABSTRACT.** The theoretical model of process of measuring of the acoustic field created by nearshore sea waves is presented. It is shown that a measuring device is a spatial and temporal low-pass filter; its parameters are found.