

## Расчет и визуализация тонкой структуры полей двумерных присоединенных внутренних волн

В линейном приближении рассчитана картина двумерных возмущений, возникающих в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости при движении пластины под произвольным углом к горизонту. Полученное в квадратурах точное решение задачи, удовлетворяющее физически обоснованным граничным условиям, проанализировано численно. Рассчитаны и описаны свойства полей в широком диапазоне всех параметров задачи – длины и скорости движения пластины, величин стратификации и вязкости среды, угла наклона траектории. В картине течения выделены две группы волн и компактные неволновые особенности вблизи краев источника генерации. Проведено сравнение с известными данными независимо выполненных расчетов и экспериментов, показавшее согласие рассчитанных и наблюдаемых картин течения.

**Введение.** Внутренние волны – важный элемент динамики морской среды и атмосферы [1]. Они переносят на большие расстояния энергию и импульс, образуют при обрушении пятна турбулентности [2], интенсифицирующие перенос вещества в океане и влияющие на безопасность полетов в атмосфере [3]. Их параметры регистрируются как контактными [2], так и дистанционными методами [4]. Большое число теоретических и экспериментальных работ посвящено изучению присоединенных (подветренных) внутренних волн, которые возникают при обтекании препятствий [1].

В силу несогласованности уравнений и граничных условий расчеты волновых полей обычно проводятся в линейном приближении, а реальное тело заменяется набором гидродинамических источников и стоков в приближениях вязкой [5] и идеальной экспоненциально стратифицированной жидкостей [6, 7]. Погрешность таких расчетов оценить достаточно трудно, поскольку методика оценки интенсивности источников развита только для случая идеальной однородной жидкости. Научный и практический интерес представляют точные решения уравнений внутренних волн, точно удовлетворяющие граничным условиям.

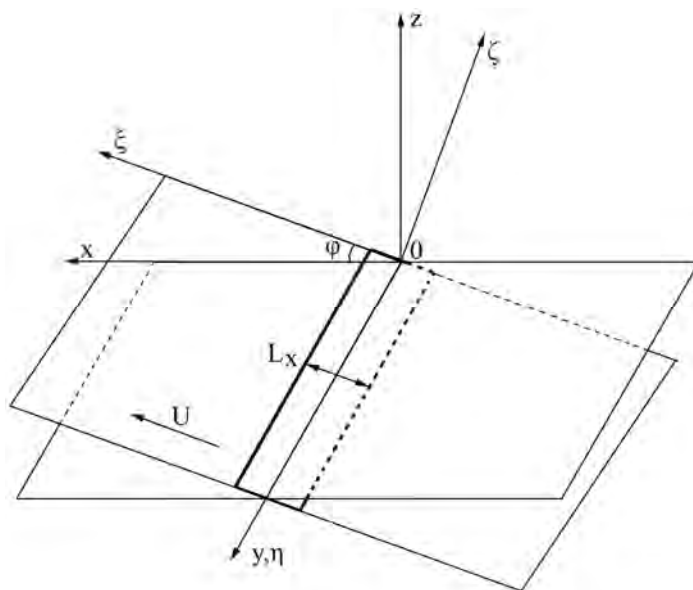
В общем случае обтекание препятствий осуществляется потоком со скопом, от величины которого немонотонно зависят свойства всех компонент течения. На практике рассматривается эквивалентная задача расчета поля волн, образующихся при движении трехмерных тел в неподвижной жидкости под произвольным углом к горизонту [5 – 7]. Наиболее полно изучены предельные случаи вертикального (в направлении действия силы тяжести) и горизонтального (вдоль изопикнических поверхностей) движений тела. Для каждого из них характерна собственная картина волнового поля [1, 8].

© Ю.Д. Чашечкин, Р.Н. Бардаков, Я.В. Загуменный, 2010

Метод построения точных решений фундаментальных уравнений механики неоднородных жидкостей в линейном приближении предложен в работе [8]. В картине течения, вызванного равномерным движением горизонтальной пластины, наряду с внутренними волнами выделены мелкомасштабные возмущения на передней и задней кромках пластины и монотонно растущий с удалением от передней кромки пограничный слой [9]. Рассмотрен только вырожденный случай, исследования свойств течения для задач в полной постановке ранее не проводились.

Целями данной работы являются: построение точного решения линеаризованной системы фундаментальных уравнений движения; анализ структуры возмущений, образующихся при движении пластины вдоль плоскости, расположенной в экспоненциально стратифицированной жидкости под произвольным углом  $\varphi$  к горизонту; визуализация найденных численно полей, иллюстрирующая свойства течений в окрестности и на больших удалениях от источника возмущений.

**Постановка задачи и исходные уравнения.** Анализируются двумерные течения вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости, возникающие при равномерном движении пластины. Рассмотрение ведется в лабораторной  $\{x, y, z\}$  (связанной с жидкостью) системе координат, ось  $z$  которой направлена вдоль линии действия силы тяжести  $\mathbf{g}$ , и в локальной системе  $\{\xi, \eta, \zeta\}$ , ось  $O\eta$  которой расположена в центре, а ось  $O\zeta$  ортогональна к полосе длиной  $L_x$ , движущейся вдоль бесконечной жесткой плоскости, расположенной под углом  $\varphi$  к горизонту. Геометрия задачи показана на рис. 1. Полоса движется с постоянной скоростью  $U$  по нормали к своей передней кромке в направлении оси  $\xi$ , ось  $\eta$  совпадает с осью  $y$ .



Р и с. 1. Системы координат задачи

Двумерные возмущения описываются системой уравнений [1, 8]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 \nu \Delta v_x, \quad \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 \nu \Delta v_z - \rho g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$ ,  $P, \rho$  – переменные скорость, давление, плотность;  $\rho_0(z)$  – невозмущенное экспоненциальное распределение плотности;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости. Стратификация, которая характеризуется масштабом  $\Lambda = \left| \frac{d \ln \rho}{dz} \right|^{-1}$ , частотой  $N = \sqrt{\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}}$  и периодом плавучести  $T_b = 2\pi/N$ , предполагается слабой, что обосновывает применимость приближения Буссинеска.

Граничные условия прилипания заданы на всей твердой поверхности, включая ее подвижную часть. Все возмущения затухают на бесконечности.

Уравнение неразрывности в (1) позволяет использовать функцию тока  $\Psi$ , производные которой задают компоненты скорости жидкости  $v_x = \partial \Psi / \partial z$ ,  $v_z = -\partial \Psi / \partial x$ . Тогда система (1) приводится к уравнению внутренних волн [1], которое в локальной системе координат  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  принимает вид:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + N^2 \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 - \nu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \right] \Psi = 0. \quad (2)$$

Граничные условия для функции тока имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} &= U \vartheta \left( \xi + \frac{L_x}{2} - Ut \right) \vartheta \left( \frac{L_x}{2} + Ut - \xi \right), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \Big|_{\zeta=0} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vartheta$  – функция Хевисайда. Возмущения затухают на бесконечности.

Малый параметр – коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  при старших производных – свидетельствует о принадлежности уравнения (2) к классу сингулярно возмущенных уравнений [10]. Полные решения таких уравнений включают как регулярно возмущенные функции, в пределе переходящие в решения уравнения Эйлера, так и сингулярно возмущенные, некоторые параметры которых обращаются в бесконечность при стремлении малого параметра к нулю.

Решение уравнения (2) с граничными условиями (3) отыскивается в виде разложений в интегралы Фурье по плоским волнам  $A = A_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$  ( $A_0$  – амплитуда возмущений плотности, скорости или давления,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  – комплексный волновой вектор,  $\omega$  – действительная частота,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор):

$$\Psi(\xi, \zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} [A_w(\omega, k) e^{ik_w(\omega, k)\zeta} + A_i(\omega, k) e^{ik_i(\omega, k)\zeta}] e^{ik\xi} dk d\omega. \quad (4)$$

В случае равномерного движения тела  $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$ , волновое поле стационарно в локальной системе координат, фазовая скорость в направлении движения равна скорости пластины. Волновые числа  $k_w$  и  $k_i$  в решении (4) – регулярные и сингулярные корни дисперсионного уравнения, которое в локальной системе координат принимает вид:

$$\omega^2(k^2 + k_z^2) - N^2(k \cos \varphi - k_z \sin \varphi)^2 + i\omega v(k^2 + k_z^2)^2 = 0. \quad (5)$$

Для нахождения корней уравнение (5) приводится к виду

$$k_z^4 + \alpha k_z^2 + \beta k_z + \gamma = 0; \quad (6)$$

коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в (6) выражаются следующим образом через параметры задачи:

$$\alpha = 2k^2 - i \frac{\omega}{v} + i \frac{N^2 \sin^2 \varphi}{\omega v},$$

$$\beta = \frac{-2iN^2 k \cos \varphi \sin \varphi}{\omega v},$$

$$\gamma = k^4 + k^2 \left( \frac{iN^2 \cos^2 \varphi}{\omega v} - \frac{i\omega}{v} \right).$$

В общем случае решение уравнения (6) можно представить в виде

$$k_+ = \frac{W}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\left(\frac{4}{3}\alpha + 2y + \frac{2\beta}{W}\right)}, \quad (7)$$

$$k_- = -\frac{W}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\left(\frac{4}{3}\alpha + 2y - \frac{2\beta}{W}\right)},$$

где  $W = \sqrt{2y - \frac{2}{3}\alpha}$ , а  $y$  – один из корней кубического уравнения

$$y^3 + Py + Q = 0,$$

в котором  $P = -\frac{\alpha^2}{12} - \gamma$ ,  $Q = -\frac{\alpha^3}{108} + \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{\beta^2}{8}$ . Из двух пар корней  $k_+$  и  $k_-$  выбираются решения  $k_w$  и  $k_i$ , удовлетворяющие условию затухания на бесконечности.

При горизонтальном (или вертикальном) движении пластины, когда  $\beta = 0$ , уравнение (5) становится биквадратным. Его решение принимает более простой вид

$$k_{i,w} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}}. \quad (8)$$

Корни  $k_w$  и  $k_i$  отличаются соотношениями между значениями действительной и мнимой частей и видом зависимости от вязкости.

Условия затухания возмущений на бесконечности ( $\zeta \rightarrow +\infty$ ) удовлетворяются в верхнем полупространстве, когда выполняются неравенства  $\text{Im } k_w \geq 0$ ,  $\text{Im } k_i \geq 0$ . Решение под плоскостью ( $\zeta \rightarrow -\infty$ ) описывается другой парой корней.

Подстановка (4) в граничные условия (3) приводит к алгебраической системе уравнений для коэффициентов  $A_w$  и  $A_i$ :

$$A_w(\omega, k) = -A_i(\omega, k) = \frac{iU}{\pi k(k_w - k_i)} \sin \frac{kL_x}{2} \delta(\omega - kU).$$

Подставляя решение (7) в (4) и выполняя интегрирование по  $\omega$ , получим окончательное выражение для функции тока  $\Psi$  в локальной системе координат

$$\Psi(\xi, \zeta, t) = \frac{iU}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{kL_x}{2} e^{ik(\xi - Ut)} \frac{e^{ik_w(kU, k)\zeta} - e^{ik_i(kU, k)\zeta}}{k_w(kU, k) - k_i(kU, k)} dk, \quad (9)$$

которое позволяет в этой же системе определить поле скорости:

$$U_\xi(\xi, \zeta, t) = -\frac{U}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{kL_x}{2} e^{ik(\xi - Ut)} \frac{k_w(kU, k)e^{ik_w(kU, k)\zeta} - k_i(kU, k)e^{ik_i(kU, k)\zeta}}{k_w(kU, k) - k_i(kU, k)} dk, \quad (10)$$

$$U_\zeta(\xi, \zeta, t) = \frac{U}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{kL_x}{2} e^{ik(\xi - Ut)} \frac{e^{ik_w(kU, k)\zeta} - e^{ik_i(kU, k)\zeta}}{k_w(kU, k) - k_i(kU, k)} dk. \quad (11)$$

В случае горизонтального движения полосы решение (8) явно разделяется на регулярно возмущенное решение для волн

$$k_w(\omega, k) = \pm \sqrt{-k^2 + \frac{i\omega}{2\nu} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{4i\nu k^2 N^2}{\omega^3}} \right]} \quad (12)$$

и сингулярно возмущенное решение, характеризующее неволновую компоненту течения

$$k_i(\omega, k) = \pm \sqrt{-k^2 + \frac{i\omega}{2\nu} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4i\nu k^2 N^2}{\omega^3}} \right]}, \quad (13)$$

локализация которого не обусловлена положением границ.

Вид корней (12) и (13) дисперсионного уравнения указывает на невозможность их представления полиномиальным выражением конечной степени

даже в вырожденном случае горизонтального движения источника ( $\varphi = 0$ ), что свидетельствует о неэквивалентности замены тела сингулярными источниками и стоками при изучении волн в вязкой жидкости.

Из вида решений (12), (13) следует, что масштаб регулярно возмущенной компоненты решения (8) задается длиной внутренней волны  $\lambda = UT_b$  ( $\varphi = 0$ ). Поперечный размер тонкоструктурных элементов характеризуется масштабом  $\delta_U = \nu / U$ .

Отношения длин волны и пластины задают внутреннее число Фруда  $Fr = U/NL_x$ , масштаба  $\sigma_U$  к длине пластины – число Рейнольдса  $Re = UL_x / \nu = L_x / \delta_U$ , масштаба плавучести к длине пластины – число  $S = \Lambda / L_x$ , характеризующее относительное изменение плотности.

Полное решение (8) позволяет рассчитать распределение сил и момента сил относительно центра пластины. Значение силы трения, действующей в направлении среднего течения, определяет компонент  $\sigma_{\xi\xi}$  тензора вязких напряжений, который должен находиться в локальной системе координат:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \zeta, t) = -\frac{i\nu U}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{kL_x}{2} e^{ik\xi} \frac{k_w^2 e^{ik_w\zeta} - k_i^2 e^{ik_i\zeta}}{k_w - k_i} dk. \quad (14)$$

Нормальные компоненты силы, действующей на пластину, характеризует  $\sigma_{zz}$ -компонент тензора вязких напряжений в локальной системе:

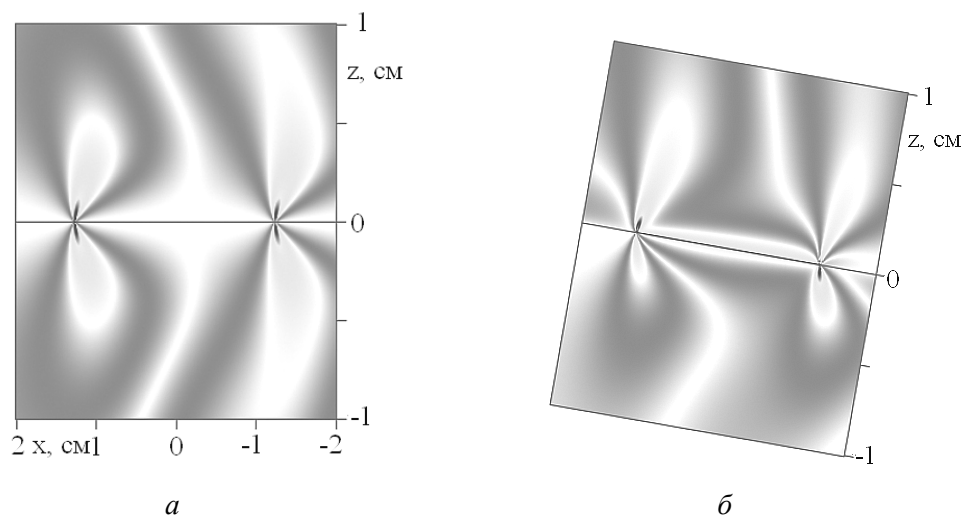
$$\sigma_{zz}(\xi, \zeta, t) = \frac{i\nu U}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{kL_x}{2} e^{ik\xi} \frac{k_w e^{ik_w\zeta} - k_i e^{ik_i\zeta}}{k_w - k_i} dk. \quad (15)$$

Наличие многомасштабных компонент течения затрудняет аналитическое исследование свойств решения (4). В этой связи анализ интегралов (10) и (11) проводился численными методами.

**Алгоритм визуализации решения.** Для построения картины течения значения интегралов (10), (11) вычислялись методом Симпсона. Компоненты вектора скорости рассчитывались в узлах сетки, вид и шаг которой выбирались из условия разрешимости сингулярно возмущенных компонент на фоне внутренних волн. При изучении тонкой структуры сетка задавалась неравномерной и шаги выбирались из расчета разрешения мелкомасштабных компонент (до 100 точек на масштабе  $\delta_\nu = \nu / U$ ). Полученный цифровой массив использовался для построения цветного изображения различных физических полей с помощью оригинальной программы, составленной с использованием *MS Visual C++*.

**Анализ результатов расчетов.** На распределение скорости вблизи пластины в равной степени влияют и регулярно и сингулярно возмущенные компоненты скорости течения (рис. 2), только совместный учет которых обеспечивает точное выполнение граничного условия прилипания. Светлой линии в

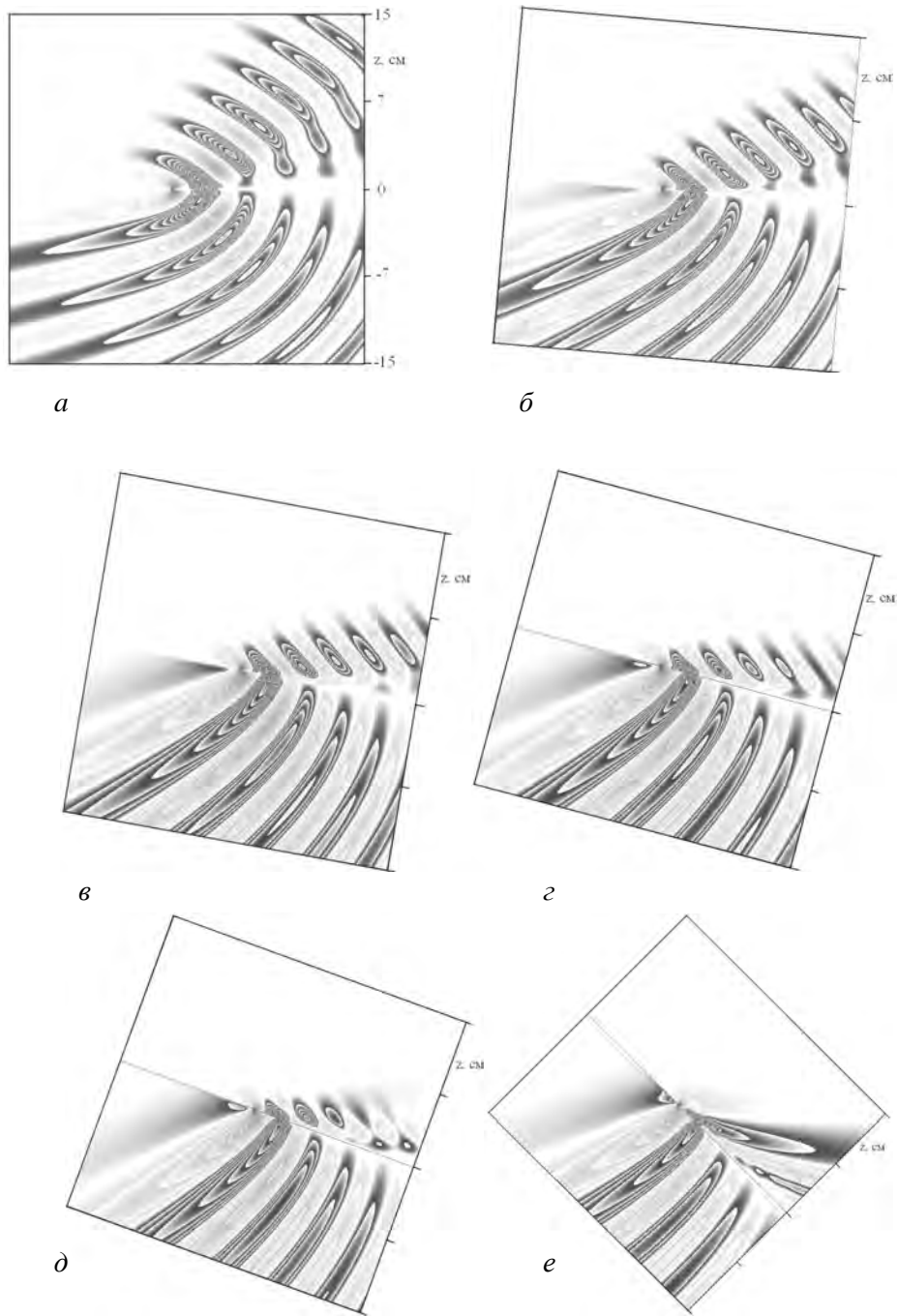
центре изображения соответствуют нулевые скорости. Линия расположена симметрично по отношению к краям только при горизонтальном движении полосы (рис. 2, а).



**Р и с. 2.** Ближнее поле модуля вертикальной компоненты скорости течения при различных углах наклона плоскости движения полосы (лабораторная система;  $L_x = 2,5$  см,  $N = 0,86$  с<sup>-1</sup>,  $U = 0,47$  см·с<sup>-1</sup>): а –  $\varphi = 0$ ; б –  $\varphi = 10^\circ$

При движении под углом к горизонту линия нулевой вертикальной компоненты скорости в верхнем полупространстве стремится к задней кромке полосы, в нижнем – к передней. Вблизи краев пластины наблюдаются характерные сингулярности. При  $\varphi = 0$  возмущения симметричны относительно линии движения тела, интегрально на пластину действует только сила трения. При  $\varphi \neq 0$  появляется асимметрия течения, указывающая на появление подъемной силы, действующей снизу вверх.

Набор картин, иллюстрирующих структуру поля внутренних волн при различных углах наклона траектории движения полосы вдоль ориентирующей плоскости при фиксированных параметрах задачи, представлен на рис. 3. Во всех случаях волновое поле состоит из системы поперечных волн в нижнем полупространстве и косых волн в верхнем. Светло-серым цветом обозначены положительные значения скорости, темно-серым – отрицательные значения. При малых углах различие между волновыми системами незначительное, хотя уже и этом случае опережающие возмущения более выражены под полосой в поле поперечных волн (рис. 3, а). С увеличением угла наклона заметно уменьшается область, занятая внутренними волнами над пластиной, их фазовые поверхности поворачиваются, уменьшается угол их наклона к плоскости движения (рис. 3, б).



**Р и с. 3.** Дальнее поле нормальной компоненты скорости течения при различных углах наклона полосы (локальная система;  $L_x = 2,5$  см,  $T_b = 7,3$  с,  $U = 0,47$  см·с<sup>-1</sup>,  $\lambda = 3,4$  см,  $Fr = 0,21$ ,  $Re = 117$ ):  $a - \varphi = 1^\circ$ ;  $b - \varphi = 5^\circ$ ;  $v - \varphi = 10^\circ$ ;  $z - \varphi = 15^\circ$ ;  $d - \varphi = 20^\circ$ ;  $e - \varphi = 45^\circ$



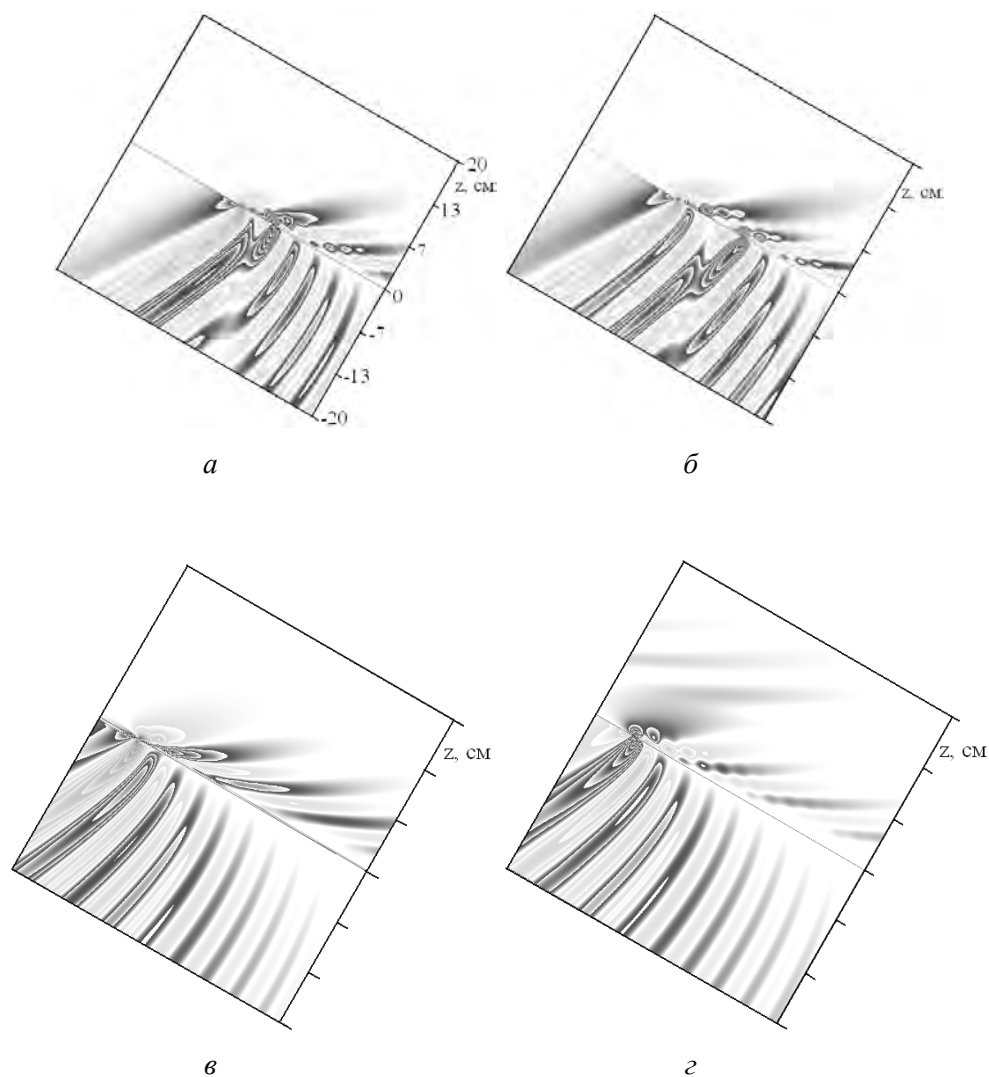
При дальнейшем увеличении угла наклона волны начинают проникать в асимметричную клиновидную область вблизи разделяющей поверхности (рис. 3, *в*). Изменяется и положение геометрического места точек локальных экстремумов, расположенных внутри замкнутых изолиний на выбранных гребнях и впадинах областей максимальных волновых возмущений. При дальнейшем увеличении угла наклона фазовые поверхности косых волн начинают стелиться вдоль плоскости движения (рис. 3, *г*). При  $\varphi = 20^\circ$  косые волны оказываются модулированными вдоль своих гребней и впадин с масштабом порядка длины волны. При этом поле поперечных волн сохраняет свою структуру, однако уменьшается длина области значимых опережающих возмущений (рис. 3, *д*). При больших углах наклона восстанавливается монотонный характер косых волн над полосой (рис. 3, *е*). Опережающее возмущение занимает еще меньшую область в нижнем полупространстве и отсутствует в верхнем.

Угол наклона фазовых поверхностей к горизонту характеризует локальную частоту присоединенных волн, которая мала на внешних концах поперечных волн и приближается к частоте плавучести в окрестности линии движения. Положение границ клиновидной области, свободной от присоединенных внутренних волн вблизи плоскости движения, выраженной при малых  $\varphi$  (рис. 3, *а, б*), определяется условием  $\omega = N$ . Положение касательной к фазовым поверхностям задает направление групповой скорости. Для поперечных волн она всегда направлена вниз и вперед (рис. 3, *а – е*). В косых волнах наблюдается изменение направления групповой скорости волн. При  $\varphi \leq 20^\circ$  она направлена вверх и, как и для поперечных волн, вперед. При  $\varphi \geq 45^\circ$  она отклоняется назад.

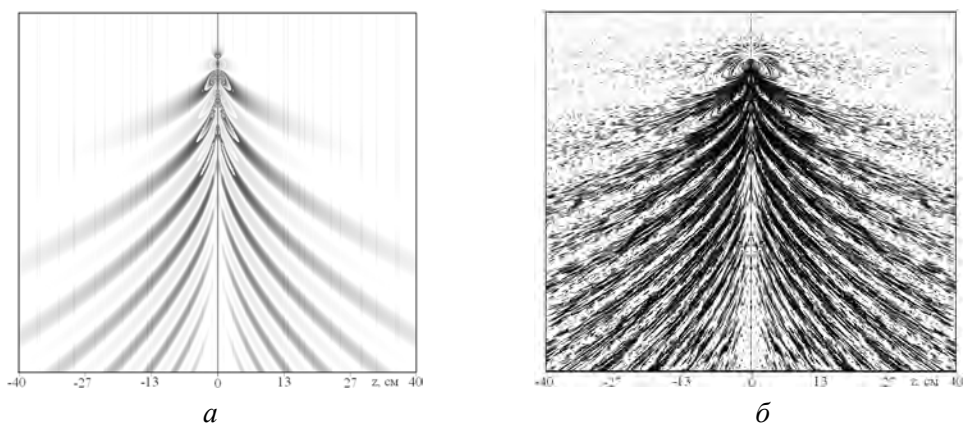
В данной задаче жесткая поверхность разделяет поля косых и поперечных волн, которые могут проникать в соседние области в свободном пространстве.

Структура поля присоединенных волн зависит от длины полосы. Детальное рассмотрение показывает, что краевые особенности всегда выражены вблизи кромок (рис. 2), а структура дальнего поля (рис. 4) зависит от соотношения между длинами пластины и волны (числа Фруда  $Fr = U / NL_x$  задачи). Короткая полоса по своим свойствам аналогична сингулярному источнику [7] (рис. 4).

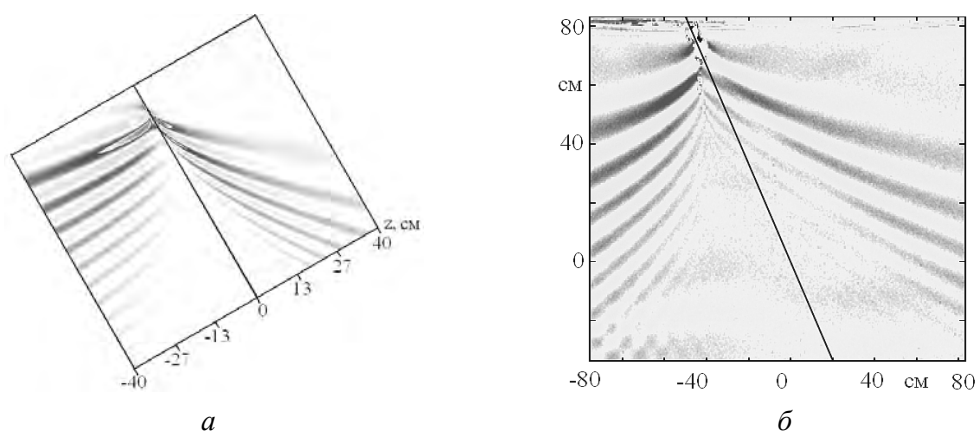
В случае вертикального движения локальная частота волны оказывается близкой к частоте плавучести, групповая скорость волн – малой, волновое поле – выраженным только позади источника (рис. 5, *a*, короткая полоса расположена в центре первой впадины, обозначенной темно-серым цветом). Наклон фазовых поверхностей волн к горизонту уменьшается, длины волн растут, волновое поле «ускоряется» – фазовая и групповая скорости волн увеличиваются с удалением от источника, что характерно для всех типов диспергирующих волн.



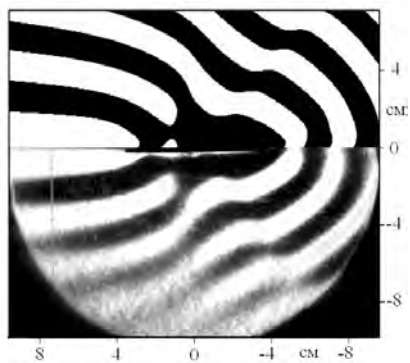
**Р и с. 4.** Поле нормальной компоненты скорости течения в подвижной системе координат при движении полос различной длины (локальная система;  $T_b = 7,3$  с,  $U = 0,47$  см·с<sup>-1</sup>,  $\lambda = 3,4$  см,  $\varphi = 30^\circ$ ): *a* –  $L_x = 5$  см; *б* –  $L_x = 10$  см; *в* –  $L_x = 60$  см (передняя кромка полосы); *г* –  $L_x = 60$  см (задняя кромка полосы)



**Р и с. 5.** Картина течения при вертикальном движении пластины (лабораторная система;  $L_x = 2,1$  см,  $\varphi = \pi/2$ ,  $N = 0,91$  с $^{-1}$ ,  $U = 0,88$  см·с $^{-1}$ ): *a* – вертикальная компонента скорости, *б* – линии тока



**Р и с. 6.** Картина течения около пластины длиной  $L_x = 2,1$  см, движущейся под углом к горизонту  $\varphi = 60^\circ$  ( $N = 0,86$  с $^{-1}$ ,  $U = 0,47$  см·с $^{-1}$ ): *a* – расчет; *б* – эксперимент [7]



**Р и с. 7.** Поле знаков вертикальной компоненты скорости течения (верхняя половина изображения) над теневой картиной течения, возникающего при движении горизонтальной полосы ( $L_x = 7,5$  см,  $T_b = 7,6$  с,  $U = 0,32$  см·с $^{-1}$ ,  $C = 185$ ,  $Re = 240$ ,  $Fr = 0,05$ )

Сравнение с данными ранее выполненных теоретических и экспериментальных работ показывает хорошее совпадение результатов (рис. 6, 7), несмотря на существенное различие в постановках. Так, для сравнения на рис. 6 приведены результаты расчетов по прилагаемой методике (рис. 6, а) и экспериментов, взятых из работы [7] (рис. 6, б). Наиболее заметное отличие обусловлено наличием гидродинамического следа за реальным телом. Качественное согласие результатов объясняется малостью волновых возмущений в окрестности плоскости движения полосы, что согласуется с использованием граничного условия прилипания на всей плоскости.

**Выводы.** Развита методика построения и визуализации точного решения линеаризованной задачи генерации возмущений при движении пластины под произвольным углом к горизонту, позволяющего рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики течения и силы, действующие на источник возмущений.

В картине течения выделены крупномасштабные компоненты, характеризующие поле внутренних волн, и тонкоструктурные компоненты, включающие краевые сингулярные возмущения и пограничные слои на пластине. Краевые сингулярности симметричны относительно центральной плоскости при горизонтальном движении и асимметричны при перемещении по наклонной плоскости.

Полученное решение для присоединенных внутренних волн согласуется с данными независимо выполненных экспериментов. Наличие линейного аналога тонкоструктурных и высокоградиентных компонент течения открывает новые возможности изучения природы вихревых течений, их структуры и механизмов формирования, а также природы наблюдаемой тонкой структуры морской среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 17 «Океан», РФФИ (проекты 08-05-00434-укр, 08-05-90901-моб\_снг\_ст).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981. – 598 с.
2. *Веденьков В.Е., Смирнов Г.В., Борисов Т.Н.* Динамика поверхностных и внутренних корабельных волн. – Владивосток: Дальнаука, 1999. – 224 с.
3. *Nappo C.J.* An introduction to atmospheric gravity waves // – International geophysics series. – Amsterdam: Academic Press, 2002. – 85. – 286 p.
4. *Кудрявцев В.Н., Малиновский В.В.* О влиянии внутренних волн на радиолокационный сигнал при малых углах скольжения // Морской гидрофизический журнал. – 1988. – № 6. – С. 3 – 9.
5. *Смирнов С.А., Чашечкин Ю.Д.* Подветренные (присоединенные) внутренние волны при произвольной ориентации набегающего потока // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 1998. – 34, № 4. – С. 528 – 536.
6. *Scase M.M., Dalziel S.B.* A theoretical and experimental investigation into internal waves generated by a translating body // Fluxes and Structures in Fluids, Moscow, 2005. Selected Papers / Ed. Yu.D. Chashechkin, V.G. Baydulov. – М., 2006. – P. 289 – 295.
7. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields generated by a translating body in a stratified fluid: an experimental comparison // J. Fluid Mech. – 2006. – 564. – P. 305 – 331.

8. Бардаков Р.Н., Чашечкин Ю.Д. Расчет и визуализация двумерных присоединенных внутренних волн в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 2004. – 40, № 4. – С. 553 – 565.
9. Бардаков Р.Н., Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д. Тонкая структура стратифицированного течения около пластины // ПМТФ. – 2007. – 48, № 6. – С. 77 – 91.
10. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

\*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва

Материал поступил  
в редакцию 30.03.09

\*\*Институт гидромеханики НАН Украины,  
Киев  
E-mail: chakin@ipmnet.ru

АНОТАЦІЯ У лінійному наближенні розрахована картина двовимірних збурень, що виникають у в'язкій експоненціально стратифікованій рідині при русі пластини під довільним кутом до горизонту. Отримане в квадратурах точне рішення задачі, яке задовольняє фізично обґрунтованим граничним умовам і проаналізоване чисельно. Розраховані та описані властивості полів в широкому діапазоні всіх параметрів задачі – довжини і швидкості руху пластини, величин стратифікації і в'язкості середовища, кута нахилу траєкторії. У картині течії виділені дві групи хвиль і компактні нехвильові особливості поблизу країв джерела генерації. Проведене порівняння з відомими даними незалежно виконаних розрахунків і експериментів показало узгодженість розрахованих і спостережуваних картин течії.

ABSTRACT Pattern of two-dimensional disturbances occurring in viscous continuously stratified fluid when the plate moves under an arbitrary angle to horizon is calculated in the linear approximation. The obtained in quadratures accurate solution of the problem is numerically analyzed. It satisfies physically grounded boundary conditions. Calculated and described are the fields' features in a wide range of all the problem parameters – lengths and speeds of the plate motion, values of the environment stratification and viscosity, slope angle of the trajectory. Two groups of waves and compact non-wave singularities in vicinity of the generation source edges are distinguished in the current pattern. The comparison carried out with the known results of independent calculations and experiments shows good agreement between the calculated and the observed current patterns.