УДК 555.466.81

Ю.Д. Чашечкин

Иерархия моделей классической механики неоднородных жидкостей

Методами теории возмущений и интегральных представлений анализируются общие свойства системы уравнений механики неоднородных жидкостей, включающей уравнения переноса импульса, вещества и температуры, и ее основных подмоделей, как редуцированных, в которых равны нулю некоторые кинетические коэффициенты, так и вырожденных, пренебрегающих изменением плотности или некоторых других переменных. Анализируются регулярно возмущенные и сингулярно возмущенные решения системы. При редукции или вырождении решений уменьшается порядок системы. При этом сохраняются (с некоторой модификацией) регулярно возмущенные решения, но сокращается число сингулярно возмущенных компонентов, которые образуют пограничные слои на контактных поверхностях и их аналоги в толще жидкости – протяженные высокоградиентные прослойки. Все компоненты течений нелинейно взаимодействуют между собой, несмотря на различие в характерных масштабах.

Аналитические методы, наряду с экспериментальными и численными, остаются одним из основных инструментов исследования природы течений жидкости. В ходе их развития выделены информативные переменные, устойчиво характеризующие физические свойства среды и параметры течений, а также выведены фундаментальные уравнения, описывающие механику и термодинамику жидкостей [1, 2]. Однако изучение поведения системы в целом, свойств отдельных уравнений и построение частных решений затруднено многомасштабностью процессов, нелинейностью уравнений, граничных и начальных условий. Ряд важных результатов в теории медленных (по сравнению со скоростью звука) течений маловязких, слабо стратифицированных жидкостей получен методами теории возмущений [1, 2].

Наряду с фундаментальными уравнениями на практике широко используются конститутивные модели (в гидроаэродинамике окружающей среды – различные версии теории турбулентности [3], в технической гидромеханике – теории пограничного слоя [4]), симметрии которых отличаются от симметрий фундаментальных уравнений [5]. Незамкнутость конститутивных моделей стимулировала проведение более детального анализа фундаментальной системы уравнений и ее подмоделей. Изучение механизмов адаптации физических полей к внезапно изменяющимся внешним условиям проведено в предположении о существовании стационарных динамических состояний неоднородных вращающихся жидкостей, включающих состояние покоя [6]. Переходные волновые процессы проанализированы в линейном приближении, влияние диссипативных факторов (вязкость, температуропроводность и диффузия) не учитывалось [6].

© Ю.Д. Чашечкин, 2010

Учет диссипации приводит к существенному повышению порядка уравнений, изменению характера и усложнению структуры решений. В частности, стратифицированные среды, ограниченные твердыми поверхностями произвольной формы (топографией), не стремятся к состоянию покоя даже в отсутствие возмущающих сил. Прерывание молекулярного потока на непроницаемых границах формирует специфические, индуцированные диффузией, течения, которые включают пограничные слои, крупные медленные вихри и диссипативно-гравитационные волны (нестационарное течение, индуцированное диффузией на сфере, рассчитано в [7]). Более сложными становятся и инфинитезимальные периодические течения, которые в вязких, непрерывно стратифицированных и вращающихся средах сосуществуют с двумя разнородными тонкоструктурными компонентами [8].

Учет всех молекулярных эффектов приводит к дальнейшему повышению порядка фундаментальной системы уравнений [1, 2] и усложнению полного решения линеаризованной системы. Сравнительный анализ общих свойств инфинитезимальных периодических течений, описываемых полной системой уравнений механики неоднородных жидкостей и ее основными подмоделями, впервые проведен в данной работе. Для сокращения записи эффекты сжимаемости, рассмотренные в [9], здесь не учитываются.

Зависимость плотности стратифицированной жидкости ρ от температуры T и концентрации растворенных (или взвешенных) частиц S разных типов (в общем случае их число n определяет число входящих в систему дополнительных уравнений диффузии компонентов примеси S_n) для простоты задается в линеаризованной форме:

$$\rho = \rho_0\,(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_{n0})), \quad \alpha = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,S}, \quad \beta = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S_n}\right)_{p,T}, \qquad (1)$$

где α – коэффициент температурного расширения жидкости; β – коэффициент солевого сжатия; T_0, S_{n0} – реперные температура и соленость. Рассматриваются устойчивые невозмущенные распределения температуры $T_0(z)$, солености $S_0(z)$ и плотности $\rho_0(z)$, которые характеризуются постоянными масштабами [10] $\Lambda_T = \left|\frac{1}{T_0(z)}\frac{dT(z)}{dz}\right|^{-1}$, $\Lambda_S = \left|\frac{1}{S_0(z)}\frac{dS(z)}{dz}\right|^{-1}$, $\Lambda_\rho = \left|\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{d\rho_0(z)}{dz}\right|^{-1}$, частотами $N_S = \sqrt{\frac{g}{\Lambda_S}}$, $N_T = \sqrt{\frac{g}{\Lambda_T}}$, $N = \sqrt{\frac{g}{\Lambda_\rho}}$ и периодом плавучести $T_b = \frac{2\pi}{N}$ (**g** – ускорение свободного падения, ось z вертикальная). Преобразование масштабов [11] позволяет переносить результаты расчетов, выполненных для жидкости с постоянной частотой плавучести, на случай произвольного гладкого распределения плотности.

Система фундаментальных уравнений механики неоднородных несжимаемых жидкостей включает уравнение состояния (1) и дифференциальные уравнения неразрывности (Даламбера), переноса импульса (Навье — Стокса), температуры (Фурье) и вещества (Фика) (эффекты термо- и бародиффузии не учитываем) [1]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0,$$

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho\nu\Delta\mathbf{v}+(\rho-\rho_0)\mathbf{g}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T=\kappa_T\Delta T,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\nabla\cdot(S\mathbf{v})=\kappa_S\Delta S$$

($\mathbf{v}$ – скорость; p – давление; ν, κ_T, κ_S – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии; Δ – оператор Лапласа) с граничными условиями прилипания и непротекания на твердых стенках, а также затухания всех возмущений на бесконечности.

Уравнения и граничные условия включают масштабы длины геометрической и динамической природы. Макромасштабы Λ, Λ_T, Λ_S характеризуют исходную стратификацию (обычно слабую), геометрию задачи (размер препятствия L) и длину внутренней волны $\lambda = UT_b$ (U – скорость потока на бесконечности).

Микромасштабы определяют поперечные размеры тонкоструктурных компонентов диффузионной природы ($\delta_N=\sqrt{\frac{\nu}{N}}$, $\delta_T=\sqrt{\frac{\kappa_T}{N}}$, $\delta_S=\sqrt{\frac{\kappa_S}{N}}$ – для полей скорости, температуры и солености соответственно – аналогов масштаба Стокса $\delta_\omega=\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ [1]), а также динамической природы ($\delta_U=\frac{\nu}{U}$, $\delta_{U,T}=\frac{\kappa_T}{U}$, $\delta_{U,S}=\frac{\kappa_S}{U}$ – аналогов масштабов Прандтля и Пекле).

Большие значения отношений макро- и микромасштабов, включающих традиционные безразмерные комплексы – числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}=$ $=\frac{L}{\delta_U}>>1$ и Пекле по температуре и солености $\mathrm{Pe}_T=\frac{UL}{\kappa_T}=\frac{L}{\delta_{U,T}}>>1$, $\mathrm{Pe}_S=\frac{UL}{\kappa_S}=\frac{L}{\delta_{U,S}}>>1$, отражают физические свойства реальных жидкостей: слабость стратификации – $C=\frac{\Lambda}{L}=\frac{\rho_0}{\delta\rho}>>1$ (малое относительное изменение плотности на масштабе L), малость вязкости, температуропроводности и диффузии – $C_N=\frac{L}{\delta_N}=\sqrt{\frac{L^2N}{\nu}}>>1$ (как и $C_T=\frac{L}{\delta_T}$ и $C_S=\frac{L}{\delta_S}$, для растворов солей $C_N<<C_T<<C_S$) и обосновывают применение теории возмущений.

Система уравнений (2), в которых малые коэффициенты стоят при старших производных по пространственным переменным, принадлежит к классу сингулярно возмущенных уравнений [12]. Для получения полных решений таких уравнений необходимо находить как прямые разложения по малому параметру ε

$$k = k_0 + \varepsilon\, k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \ldots, \tag{3}$$

так и обратные

$$k_z = \varepsilon^{-\gamma}\,(k_0 + \varepsilon\, k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \ldots),\ \ \gamma > 0. \tag{4}$$

Значение коэффициента γ определяется при подстановке (4) в исследуемую систему (2) из условия старшинства полученного главного члена разложения.

При изучении малых периодических движений с фиксированной действительной частотой ω и комплексным волновым вектором $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\,\mathbf{k}_2$, учитывающим затухание волн, все переменные выбираются в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \tau(r,t), \quad \bar{p} = p_0\, \tau(r,t)\,, \quad \bar{\rho} = \rho_0 \tau(r,t)\,, \quad \tau(r,t) = \exp\bigl(i(\mathbf{kr} - \omega t)\bigr). \tag{5}$$

Решение линеаризованной системы (2) в приближении Буссинеска находится в виде разложений по плоским волнам

$$A = \sum_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_j(k_x,k_y)\exp[i(k_{zj}(k_x,k_y)z + k_x x + k_y y - \omega t)]dk_x dk_y, \tag{6}$$

где A – компоненты скорости, давление, температура, соленость или плотность. Суммирование в разложении (6) проводится по всем корням дисперсионного уравнения, выражающего условие разрешимости линеаризованной системы (2), которое обеспечивает выполнение граничных условий задачи или условия излучения в безграничной среде (затухание всех возмущений на бесконечности).

Дисперсионное соотношение для линеаризованной системы (2), учитывающей действие всех диссипативных факторов, имеет вид

$$D_\nu(k,\omega)F(k,\omega) = 0\,, \tag{7}$$

где

$$F(k,\omega) = -D_\nu(k,\omega)D_{\kappa_T}(k,\omega)D_{\kappa_S}(k,\omega)\left(k^2 + i\frac{k_z(\Lambda_T + \Lambda_S)}{\Lambda_T\Lambda_S}\right) +$$

$$+D_{\kappa_T}(k,\omega)\left(\frac{\omega k_z}{\Lambda_S}D_\nu(k,\omega) - N_S^2 k_\perp^2\right) + D_{\kappa_S}(k,\omega)\left(\frac{\omega k_z}{\Lambda_T}D_\nu(k,\omega) - N_T^2 k_\perp^2\right), \tag{8}$$

$$D_\nu(k,\omega) = -i\omega + \nu k^2\,,\ D_{\kappa_T}(k,\omega) = -i\omega + \kappa_T\, k^2\,,\ D_{\kappa_S}(k,\omega) = -i\omega + \kappa_S\, k^2\,, \tag{9}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\,, \qquad k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

В пренебрежении всеми диссипативными эффектами дисперсионное уравнение десятой степени (7) переходит в квадратное уравнение, описывающее внутренние волны в идеальной жидкости (и все другие типы волн – инерциальные, поверхностные гравитационные, акустические и гибридные при учете вращения и сжимаемости [8]). Ему соответствуют два регулярно возмущенных решения алгебраического уравнения (8) и системы дифференциальных уравнений (2) с подходящими граничными условиями соответственно, которые и определяют конический пучок периодических внутренних волн. Спектральные компоненты (5), в которых $|\mathbf{k}_1| >> |\mathbf{k}_2|$, а коэффициент затухания пропорционален кинетическим коэффициентам (здесь $\gamma = i(\nu + \kappa_T + \kappa_S)k^2$), далее будем именовать редиками (*regular disturbed components of flow*).

Оставшиеся восемь корней уравнения (7), мнимая часть которых не мала ($|\mathbf{k}_1| \sim |\mathbf{k}_2|$) и обратно пропорциональна кинетическим коэффициентам, определяют сингулярно возмущенные решения – набор сидиков (*singular disturbed components of flow*). В случае безграничной среды четыре из них, нарушающие условие затухания на бесконечности, отбрасываются. Остальные решения образуют две различные группы.

Из вида уравнения (7), в котором присутствует множитель $D_\nu(k,\omega)$, следует, что в течениях жидкости всегда существуют сингулярно возмущенные компоненты типа периодического течения Стокса на осциллирующей поверхности в вязкой жидкости [1]. Их поперечный размер определяется кинематической вязкостью и частотой волны $\delta_\omega = \sqrt{\nu/\omega}$ (или частотой плавучести $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$).

Одновременно действие вязкости обусловливает и существование другого компонента, свойства которого определяются вторым и третьим слагаемыми в (8). Его поперечный размер зависит не только от частоты и кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии, но и от наклона излучающей поверхности (здесь – от отношения k_z/k). Сингулярно возмущенные компоненты – линейные предшественники вихрей и вихревых систем в течениях жидкости.

В отличие от периодического течения Стокса, которое сосредоточено вблизи осциллирующей поверхности [1], сидики могут располагаться как в окрестности контактных поверхностей, так и в толще жидкости. Они, в частности, образуют тонкую структуру пучков внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости, расчеты которой [13] согласуются с данными теневой визуализации [14]. При увеличении амплитуды колебаний источника на границах пучков наблюдаются протяженные высокоградиентные прослойки, в областях конвергенции которых формируются вихри непосредственно в толще жидкости [14].

Из вида уравнения (7) следует, что помимо двух типов сидиков, обусловленных вязкостью, существуют еще два решения системы (2), свойства которых зависят от коэффициентов температуропроводности и диффузии. В зависимости от геометрии задачи дополнительные решения могут быть как смешанными, определяемыми одновременно всеми диссипативными факторами, так и расщепленными. В последнем случае образуется семейство вложенных разномасштабных компонентов, положение которых определяется граничными условиями задачи.

Все решения (2), и регулярно и сингулярно возмущенные, образуют единое семейство, описываемое функциями одного вида (5) с различными действительными и мнимыми частями. Они одновременно образуются, переносятся и исчезают, несмотря на различие характерных масштабов. Каждый компонент течения обусловливает перенос энергии, вещества и завихренности. Механическая энергия переносится преимущественно крупномасштабными компонентами (редиками). Диссипация движений происходит в тонкоструктурных компонентах (сидиках), которые характеризуются большими значениями всех компонентов тензора сдвига скорости (в том числе и завихренностью). Давление в сидиках постоянно.

Общие свойства решений базовой системы и ее подмоделей иллюстрирует схема, приведенная на рисунке. Фундаментальная система десятого порядка *1* описывает динамику четырех скалярных полей (ρ, *p*, *T*, *S*) и векторного поля скорости **v**, каждое из которых характеризуется собственной геометрией. Параметры задачи Λ_ρ, Λ_T, Λ_s, ν, κ_T, κ_S и угловое положение источника φ (или границ области жидкости) определяют свойства решений, включающих два (или один) регулярных и восемь (минимум четыре) сингулярных компонентов. Система *1* самосогласованна и разрешима.

При упрощении описания, например при исключении членов с наименьшими коэффициентами в (2) (в реальных жидкостях обычно минимальное значение имеет коэффициент диффузии), понижается порядок системы *2* и степень дисперсионного уравнения (7). Редуцированная система *2* восьмого порядка с параметрами Λ_ρ, ν, κ_T, φ характеризует динамику шести переменных (ρ, *p*, *T* и компонентов скорости **v**). Среди ее решений два (или один) регулярно и шесть (три) различающихся сингулярно возмущенных компонентов. Также изменяется величина коэффициента затухания регулярного решения. Система остается разрешимой.

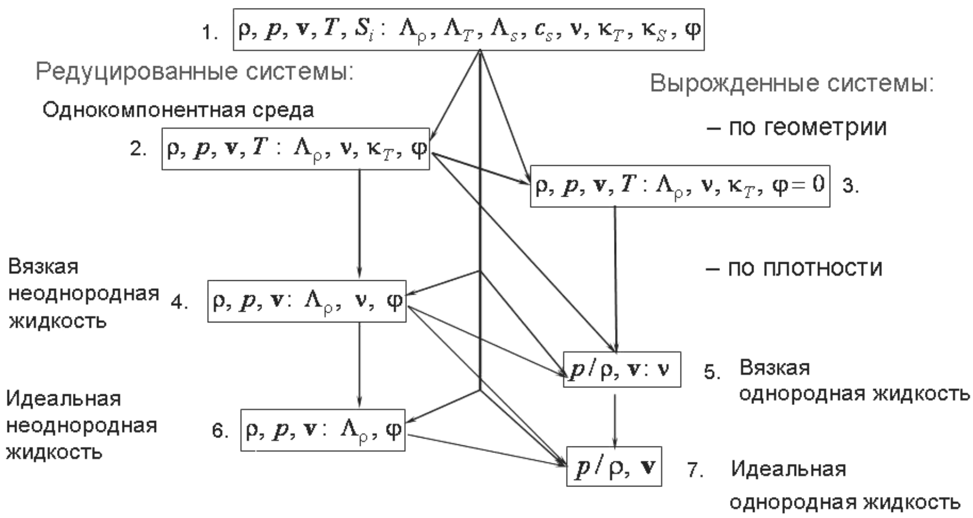
Некоторые геометрии задачи (специальная симметрия источника, вертикальное или горизонтальное положение границ: φ = 0) приводят к уменьшению числа определяющих параметров (Λ_ρ, ν, κ_T) и порядка редуцированной системы *2*. При этом некоторые сингулярные компоненты вырожденной системы *3* могут становиться тождественными или обращаться в нуль. Динамика шести независимых переменных (ρ, *p*, *T* и компонентов скорости **v**) определяется поведением двух (или одного) регулярно и четырех (двух) сингулярно возмущенных решений.

Исключение уравнения состояния при сохранении стратификации плотности переводит полную систему *1* в систему шестого порядка *4* (параметры Λ_ρ, ν и φ), решения которой – два (один) регулярно и четыре (два) различающихся сингулярно возмущенных компонента. Разрешимость системы сохраняется.

Однородной по плотности (вырожденной) системе *5*, включающей уравнения Даламбера — Навье — Стокса с единственным параметром ν для переменных *p*/ρ и **v**, соответствует дисперсионное уравнение шестой степени

$$k^2\left(\omega + i\nu k^2\right)^2 = 0$$

с кратным сингулярно возмущенным корнем, указывающим на тождественность в общем случае разнородных сингулярно возмущенных компонентов. Следовательно, задача расчета трехмерных полей переменных p/ρ и $\mathbf{v}$ при $\rho = \text{const}$ и произвольных начальных условиях оказывается некорректной. Учет сжимаемости не снимает вырождения сингулярно возмущенных компонентов, течения в которых бездивергентны [8]. Система становится разрешимой при понижении ее порядка (одно- и двумерные задачи, специальные граничные условия).



Иерархия фундаментальных моделей механики неоднородных жидкостей

Уравнения Эйлера для стратифицированных сред *6* с параметрами Λ_ρ и φ задают поле внутренних волн (переменные p, ρ и $\mathbf{v}$), содержащее разрывы на характеристиках, положение которых определяется граничными условиями. Трехмерные уравнения Эйлера (переменные p/ρ и $\mathbf{v}$) не содержат внешних параметров и в данной постановке непосредственно не разрешимы.

Решения полной *1* и редуцированных *2*, *4*, *6* систем позволяют определять и решения систем *3*, *5*, *7* путем равномерного перехода к пределу при $N \to 0$ в конечных выражениях. Вследствие понижения порядка подмоделей обратный переход невозможен.

Нелинейные члены в полной системе (2) характеризуют прямое взаимодействие всех – и регулярно, и сингулярно возмущенных – инфинитезимальных компонентов течений, результатом которого может быть генерация новых компонентов течений того же класса [15] или реальных вихрей и сопутствующих новых сингулярно возмущенных компонентов. Все переменные при этом изменяются самосогласованно. Стационарные состояния стратифицированных или вращающихся жидкостей глобально не достижимы даже в пренебрежении эффектами индуцированного переноса (типа термо- и бародиффузии).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российской академии наук (Программа ОЭ-14 ОЭММПУ РАН «Динамика многокомпонентных и неоднородных жидкостей»), РФФИ (проекты 08-05-00434-Укр.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
2. *Müller P.* The equations of oceanic motions. – Cambridge: CUP, 2006. – 292 p.
3. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. В 2-х частях. – М.: Наука, 1965; 1967. – 640 с.; 720 с.
4. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н. и др.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 455 с.
5. *Chashechkin Yu.D., Baydulov V.G., Kistovich A.V.* Basic properties of free stratified flows // J. Engin. Math. – 2006. – 55, № 1 – 4. – P. 313 – 338.
6. *Монин А.С., Обухов А.М.* Малые колебания атмосферы и адаптация метеорологических полей // Изв. АН. Сер. Геофиз. – 1958. – № 11. – С. 1360 – 1373.
7. *Байдулов В.Г., Матюшин П.В., Чашечкин Ю.Д.* Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2006. – № 2. – С. 119 – 132.
8. *Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В.* Классификация трехмерных периодических течений в жидкости // Доклады РАН. – 2004. – 395, № 1. – С. 55 – 58.
9. *Бардаков Р.Н., Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Расчет скорости распространения звука в неоднородной жидкости // Доклады РАН. – 2008. – 420, № 3. – С. 324 – 327.
10. *Левицкий В.В., Чашечкин Ю.Д.* Боковая термоконцентрационная конвекция в слабо стратифицированных жидкостях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2006. – № 3. – С. 87 – 98.
11. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – 39, № 5. – С. 88 – 98.
12. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
13. *Чашечкин Ю.Д., Васильев А.Ю., Бардаков Р.Н.* Тонкая структура пучков трехмерных периодических внутренних волн // Доклады РАН. – 2004. – 397, № 3. – С. 404 – 407.
14. *Chashechkin Yu.D.* Visualization of singular components of periodic motions in a continuously stratified fluid (Review report) // J. Visual. – 2007. – 10, № 1. – P. 17 – 20.
15. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Новый механизм нелинейной генерации внутренних волн // Доклады РАН. – 2002. – 382, № 6. – С. 772 – 776.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва
E-mail: chakin@ipmnet.ru

Материал поступил
в редакцию 03.02.09

АНОТАЦІЯ Методами теорії збурень та інтегральних зображень аналізуються загальні властивості системи рівнянь механіки неоднорідних рідин, яка включає рівняння перенесення імпульсу, речовини і температури, і її основних підмоделей, як зредукованих, в яких рівні нулю деякі коефіцієнти, так і вироджених, які нехтують змінам густини або інших змінних. Аналізуються регулярно збурені і сингулярно збурені розв'язання системи. При редукції або виродженні розв'язань зменшується порядок системи. При цьому зберігаються (з деякою модифікацією) регулярно збурені розв'язання, але скорочується число сингулярно збурених компонентів, які утворюють прикордонні шари на контактних поверхнях і їх аналоги в товщі рідини – протяжні високоградієнтні прошарки. Всі компоненти течій нелінійно взаємодіють між собою, не дивлячись на відмінність в характерних масштабах.

ABSTRACT Using the methods of disturbance theory and integral approximations analyzed are the general features of the equation system of non-homogeneous fluid mechanics including the equations of momentum, substance and temperature transport, and its main sub-models, both the reduced ones where some kinetic coefficients equal zero and the confluent ones neglecting changes of density and other variables. Regularly and singularly disturbed system solutions are analyzed. At reduction or degeneracy of the solutions the system order decreases. At that regularly disturbed solutions are preserved (with some modification), but a number of singularly disturbed components which form boundary layers on contact surfaces and their analogues in the fluid thickness, i.e. extended high-gradient strata, decreases. All the currents' components interact with each other in spite of different characteristic scales.