УДК 551.466

М.В. Билюнас, С.Ф. Доценко

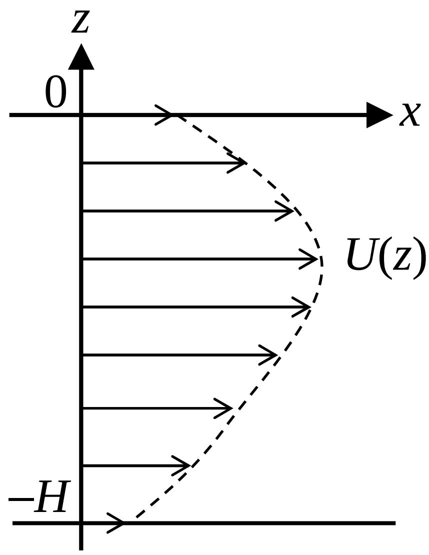
Стационарные волны в потоке однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости

В линейной постановке рассмотрена плоская задача о свободных стационарных гравитационных волнах в горизонтальном течении с вертикальным сдвигом скорости. Нахождение параметров волн сведено к решению краевой задачи Штурма – Лиувилля. Для нескольких вертикальных распределений скорости течения найдены аналитические решения. Предложен численный алгоритм нахождения параметров волн. На основе проведенного анализа установлена возможность существования в течениях стационарных поверхностных волн в определенных диапазонах значений числа Фруда. При уменьшении числа Фруда волны становятся короче, что приводит к более быстрому затуханию волновых возмущений с глубиной. Для реальных условий волны являются короткими, они подвержены влиянию сдвиговых течений только в приповерхностном слое океана.

Введение. Течения существенно влияют на кинематику и динамику поверхностных гравитационных волн в океанах и морях. Горизонтальная неоднородность скорости течения приводит к рефракции волн, а в результате – к перераспределению в пространстве энергии волнового поля [1]. Рефракция ветровых волн четко прослеживается в зонах вихревых образований и струйных течений [2]. Отметим также, что в зонах течений она может приводить к фокусировке волн и образованию волн-убийц в океане [3]. Вертикальные изменения скорости горизонтального потока (течение с вертикальным сдвигом скорости) влияют на характеристики поверхностных и внутренних волн, вертикальную структуру поля скорости, могут приводить к неустойчивости течения и усилению перемешивания в океане [4, 5], влиять на пространственную структуру волнового поля и условия генерации вынужденных волн [6 – 8]. В большинстве конкретных случаев задавались линейные (постоянный сдвиг скорости) или кусочно-линейные распределения горизонтальной скорости течения по глубине.

Ниже исследуются свободные поверхностные гравитационные волны в течениях с вертикальным сдвигом скорости, которые предполагаются линейными и стационарными. Рассмотрены некоторые общие свойства волн, найдены аналитические решения задачи для нескольких вертикальных распределений скорости течения, наконец, описана численная процедура нахождения параметров и вертикальной структуры волн для произвольного распределения однонаправленной горизонтальной скорости фонового течения.

Математическая постановка задачи. В вертикальной плоскости Oxz, где x – горизонтальная, z – вертикальная координата, отсчитываемая вверх от невозмущенной свободной поверхности $z = 0$, рассматривается горизонтальный поток $(U(z), 0)$ идеальной несжимаемой однородной жидкости постоянной глубины H (рис. 1). Скорость потока зависит только от вертикальной координаты. Будем изучать стационарные волны в таком сдвиговом течении, предполагая их линейными, а задачу плоской.



Р и с. 1. Схема задачи

Стационарные волны в потоке с вертикальным сдвигом скорости описываются в области $-\infty < x < +\infty$, $-H < z < 0$ системой трех линеаризованных относительно среднего течения $u = U(z)$, $w = 0$ уравнений с зависящими от z коэффициентами (они получены из системы уравнений Эйлера):

$$U\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{dU}{dz} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$U\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

где $u(x, z)$, $w(x, z)$ – малые возмущения поля скорости сдвигового течения; $p(x, z)$ – динамические возмущения гидростатического давления в жидкости; ρ = const – плотность жидкости.

Систему уравнений (1) – (3) необходимо дополнить кинематическим и динамическим условиями на свободной поверхности (z = 0) и условием скольжения на дне бассейна (z = –H):

$$U(0)\frac{d\zeta}{dx} = w, \qquad p - \rho g\zeta = 0 \ \ (z = 0), \tag{4}$$

$$w = 0 \quad (z = -H), \tag{5}$$

где $\zeta(x)$ – смещение свободной поверхности жидкости; g – ускорение свободного падения.

В рамках задачи (1) – (5) рассмотрим гармонические по x стационарные волны на поверхности течения, имеющие вид

$$u = u_1(z)e^{ikx},\ w = W(z)e^{ikx},\ p = p_1(z)e^{ikx},\ \zeta = ae^{ikx}, \tag{6}$$

где k – волновое число, которое подлежит определению; u_1, W, p_1 – неизвестные функции; a – константа. Подстановка выражений (6) в задачу (1) – (5) и исключение всех неизвестных функций, кроме W, приводит к краевой задаче для нахождения возможных значений k и соответствующих им вертикальных распределений амплитудной функции поля вертикальной скорости [4, 5]:

$$W'' - [k^2 + \alpha(z)]W = 0 \qquad (-H < z < 0), \tag{7}$$

$$W'(0) - \gamma W(0) = 0, \tag{8}$$

$$W(-H) = 0, \tag{9}$$

здесь штрих означает производную по вертикальной координате z;

$$\alpha = \frac{U''(z)}{U(z)}, \qquad \gamma = \frac{g}{U^2(0)} + \frac{U'(0)}{U(0)}. \tag{10}$$

Будем предполагать скорость течения направленной вдоль оси x, распределение горизонтальной скорости $U(z) > 0$ гладким и не обращающимся в нуль при всех $-H \le z \le 0$. Задача (7) – (9) является основной для последующего анализа волн в сдвиговом потоке.

Некоторые общие свойства волн в сдвиговом потоке. Запишем краевую задачу (7) – (9) в форме

$$W'' - \alpha(z)W = \mu W\ \ (-H \le z \le 0),\ W(-H) = 0,\ W'(0) - \gamma W(0) = 0. \tag{11}$$

Левая часть уравнения (11) – самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, $\mu = k^2$. Задача (11) является стандартной задачей Штурма – Лиувилля [9], в которой μ выступает в роли спектрального параметра.

Используя известные свойства задачи Штурма – Лиувилля [9], можно утверждать, что все собственные значения μ краевой задачи (11) являются вещественными. Они образуют счетное множество $\mu = \mu_j$ $(j = \overline{1,\infty})$ и предполагаются занумерованными в порядке убывания значений с ростом номера j, то есть так, что $\mu_1 > \mu_2 > \ldots$ и $\mu_j \to -\infty$ при $j \to \infty$. Каждому собственному значению $\mu = \mu_j$ соответствует собственная функция $W = W_j(z)$, имеющая ровно j нулей на отрезке $[-H, 0]$, причем один из них совпадает с точкой $z = -H$. Система собственных функций ортогональна и полна в пространстве квадратично интегрируемых на отрезке $[-H, 0]$ функций.

Таким образом, для стационарных волн вида (6) значения k могут быть либо вещественными ($\mu_j > 0$), либо чисто мнимыми ($\mu_j < 0$). Чисто мнимые значения $k = \pm i\sqrt{|\mu_j|}$ соответствуют неустойчивым волновым режимам (экспоненциальный рост по x амплитуд волн). В дальнейшем будем рассматривать только вещественные значения k (периодические по x волны). В силу того, что μ_j убывают и $\mu_j \to -\infty$ при $j \to \infty$, в общем случае для заданного вертикального распределения скорости фонового течения теоретически может существовать не более конечного числа стационарных волн вида (6).

Заметим, что, согласно теореме Рэлея [4], плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой однородной жидкости устойчиво, если распределение скорости $U(z)$ не имеет точек перегиба, то есть

$$U''(z) \neq 0 \quad (-H \le z \le 0)\,. \tag{12}$$

Если волновое число k и соответствующее ему распределение вертикальной скорости $W(z)$ найдены, можно, используя уравнения (1), (3) и (4), определить амплитудные функции остальных гидродинамических полей:

$$u_1 = \frac{i}{k}W'(z), \qquad p_1 = \frac{i\rho}{k}[U'(z)W(z) - U(z)W'(z)]\,, \qquad a = -\frac{i}{k}\frac{W(0)}{U(0)}.$$

Вертикальные распределения скорости течения, допускающие аналитические решения. Рассмотрим некоторые распределения $U(z)$, для которых задача (7) – (9) допускает аналитические решения.

1. Случай $U(z) = U_0 = \text{const}$ (рис. 2, *а*) соответствует горизонтальному потоку жидкости без сдвига скорости. Задача (7) – (9) принимает вид

$$W'' - k^2 W = 0\,, \quad W'(0) - \gamma W(0) = 0\,, \quad W(-H) = 0\,, \tag{13}$$

где $\gamma = g/U_0^2$. Решение задачи (13) записывается в форме

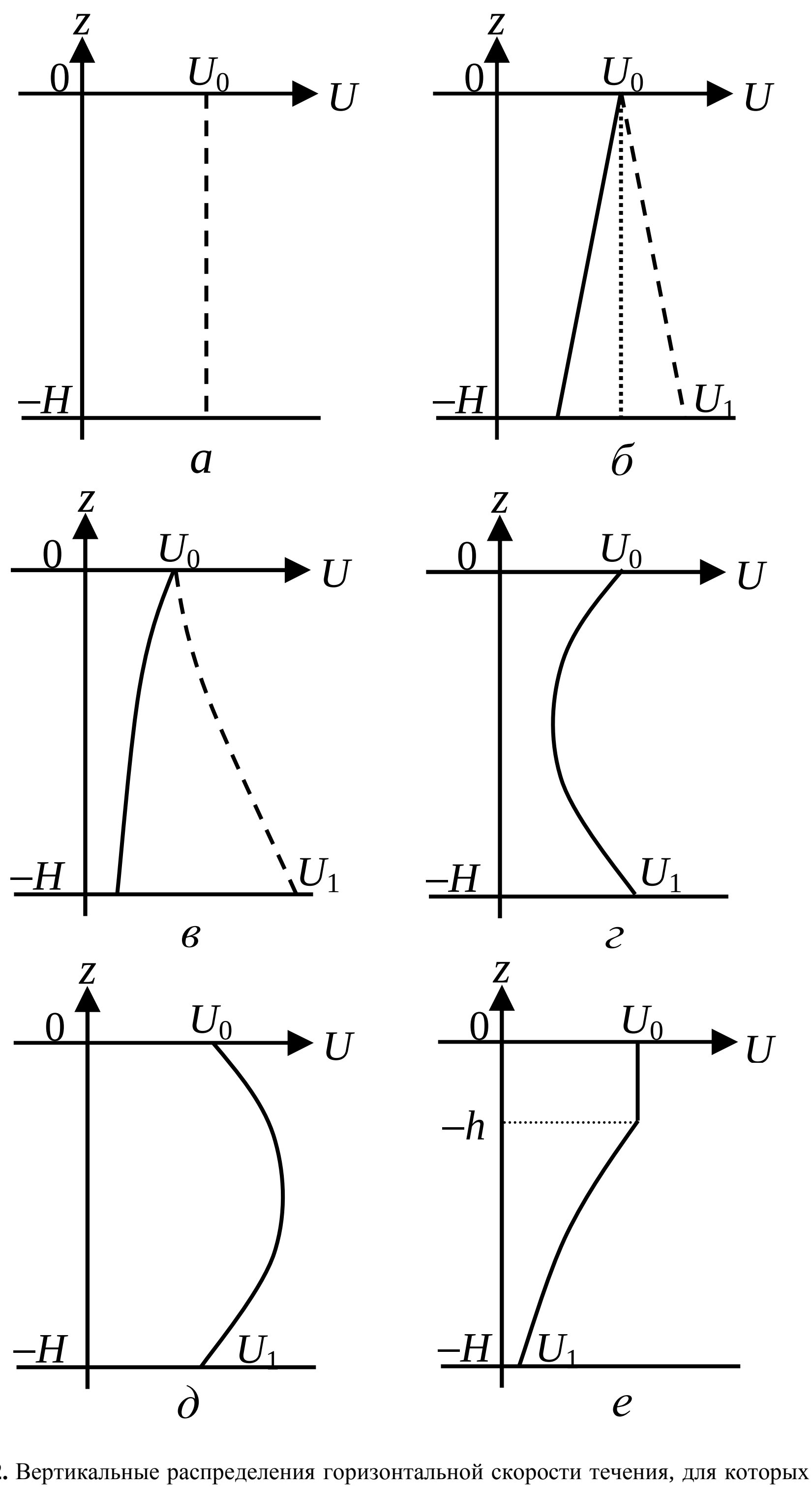
$$W = A\frac{\text{sh}k(z+H)}{\text{ch}kH}\,, \tag{14}$$

здесь $k > 0$ – корень уравнения $\text{th}kH = k/\gamma$. Анализ этого уравнения показывает, что волна существует только при условии $U_0^2 < gH,$ когда скорость течения не превышает скорости распространения длинных волн в бассейне глубиной H. В потоке без вертикального сдвига скорости может существовать только одна периодическая волна.

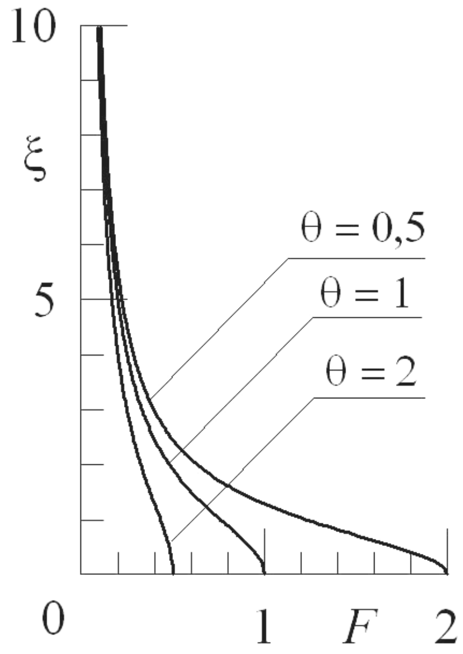
Введем безразмерное волновое число и число Фруда по формулам

$$\xi = k\,H, \qquad F = \frac{U_0^2}{gH}\,.$$

Зависимость $\xi = \xi(F)$ описывается кривой $\theta = 1$, приведенной на рис. 3. Волна существует только при $F < 1$, и ее длина убывает при уменьшении числа Фруда. Как следует из (14), уменьшение длины волны приводит к более быстрому затуханию волновых полей с глубиной.



Р и с. 2. Вертикальные распределения горизонтальной скорости течения, для которых можно найти аналитические решения задачи (1) – (5) в виде стационарных периодических поверхностных волн



Р и с. 3. Зависимости волнового числа от числа Фруда в случае линейного по вертикали изменения горизонтальной скорости течения для различных значений отношения θ скорости потока у дна к скорости потока у свободной поверхности

2. Пусть скорость течения линейно изменяется с глубиной (рис. 2, *б*), то есть

$$U = U_0 + \frac{U_0 - U_1}{H} z .$$

Здесь и ниже $U_0 = U(0) > 0$ – скорость течения у свободной поверхности жидкости, $U_1 = U(-H) > 0$ – скорость течения у дна. Задача (7) – (9) принимает вид

$$W'' - k^2 W = 0 , \quad W'(0) - \gamma W(0) = 0 , \quad W(-H) = 0 , \tag{15}$$

где

$$\gamma = \frac{g}{U_0^2} + \frac{1-\theta}{H} , \; \theta = \frac{U_1}{U_0} .$$

Решение задачи (15) записывается, как и в предыдущем случае, в форме (14):

$$W = A \frac{\mathrm{sh} k(z+H)}{\mathrm{ch} kH} ,$$

где A = const; k – положительный корень уравнения $\mathrm{th} kH = k / \gamma$, который существует только при выполнении условия $\gamma H > 1$ $(U_0^2 \theta < gH)$. В потоке с постоянным вертикальным сдвигом скорости может существовать только одна периодическая по x волна.

Зависимости $\xi = \xi(F)$ для нескольких значений θ приведены на рис. 3. Волна существует только при $F < 1/\theta$, ее длина убывает при уменьшении как числа Фруда, так и отношения скорости фонового течения на дне бассейна к скорости у свободной поверхности. Уменьшение длины волны сопровождается более быстрым затуханием волновых возмущений при смещении от свободной поверхности к дну бассейна.

3. Рассмотрим экспоненциальное распределение скорости течения по глубине (рис. 2, *в*):

$$U = U_0 e^{\delta z}, \quad \delta = -\frac{1}{H}\ln\theta.$$

При $\delta > 0$ скорость течения возрастает при перемещении от дна к свободной поверхности, при $\delta < 0$ она убывает. Для этого распределения $\alpha(z) = \delta^2$.

Задача (7) – (9) принимает вид

$$W'' - (k^2 + \delta^2)W = 0, \quad W'(0) - \gamma W(0) = 0, \quad W(-H) = 0, \tag{16}$$

где

$$\gamma = \frac{g}{U_0^2} + \delta .$$

Решение задачи (16) записывается в форме

$$W = A\frac{\mathrm{sh}k_1(z+H)}{\mathrm{ch}k_1 H}, \; k_1 = \sqrt{k^2 + \delta^2} ,$$

где A = const; k_1 – положительный корень уравнения $\mathrm{th}k_1 H = k_1/\gamma$, который существует только при выполнении условия $\gamma \mathrm{th}\delta H > \delta$. В потоке с экспоненциальным по z распределением скорости может существовать не более одной периодической волны.

На рис. 4 представлены зависимости $\xi = \xi(F)$ для различных значений θ. Волна существует только при значениях параметров, удовлетворяющих условию

$$F < \frac{\mathrm{th}\xi_0}{\xi_0(1 - \mathrm{th}\xi_0)} \quad (\xi_0 = \delta H),$$

ее длина убывает как при уменьшении F, так и при увеличении параметра θ.

4. Пусть $\alpha(z) = \alpha_1 = \mathrm{const} > 0$. В этом случае $U''(z) > 0$ и распределение скорости по z является строго выпуклым вниз (рис. 2, *г*), оно описывается выражением

$$U = \frac{U_0 \mathrm{sh}\sqrt{\alpha_1}(z+H) - U_1 \mathrm{sh}\sqrt{\alpha_1}z}{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha_1}H} .$$

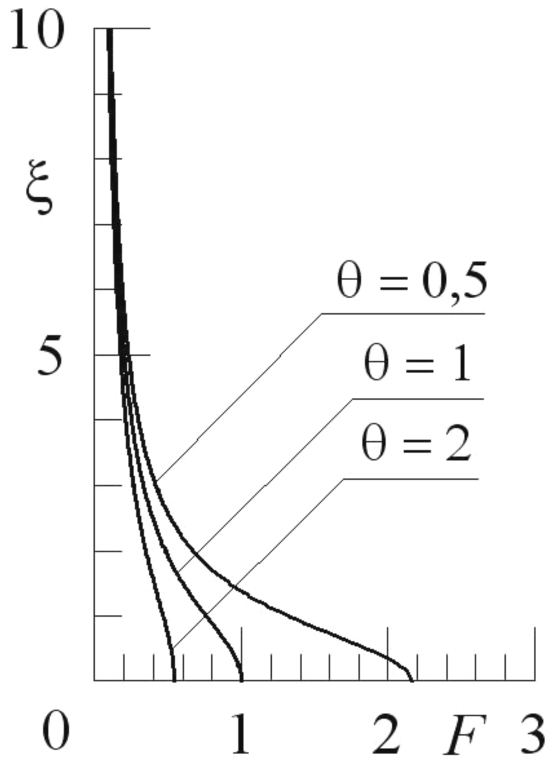
Скорость течения положительна на всех горизонтах $-H \le z \le 0$.

Задача (7) – (9) принимает вид

$$W'' - (k^2 + \alpha_1)W = 0, \quad W'(0) - \gamma W(0) = 0, \quad W(-H) = 0, \tag{17}$$

где

$$\gamma = \frac{g}{U_0^2} + \sqrt{\alpha_1}\,\mathrm{cth}\sqrt{\alpha_1}H - \frac{U_1\sqrt{\alpha_1}}{U_0\mathrm{sh}\sqrt{\alpha_1}H}.$$



Р и с. 4. То же, что на рис. 3, для экспоненциального распределения по вертикали горизонтальной скорости течения

Решение краевой задачи (17) следующее:

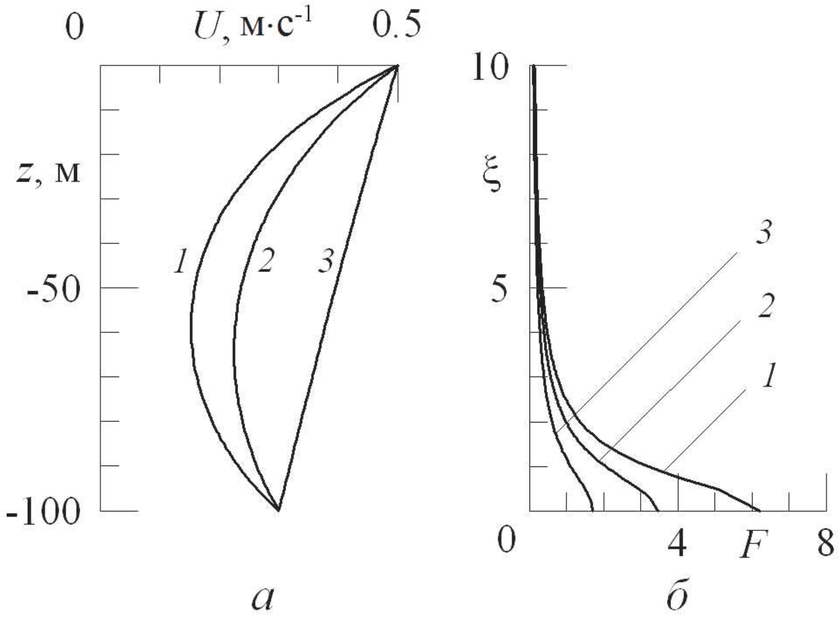
$$W = A\frac{\mathrm{sh}k_2(z+H)}{\mathrm{ch}k_2H},\; k_2 = \sqrt{k^2+\alpha_1}\,,$$

где A = const; k_2 – положительный корень уравнения $\mathrm{th}k_2H = k_2/\gamma$. В потоке с выпуклым вниз распределением по z скорости возможно не более одной периодической по горизонтальной координате поверхностной волны.

На рис. 5, *а* представлены вертикальные распределения скорости течения для трех возрастающих значений параметра α_1. Увеличение α_1, начиная с нуля, приводит при постоянных значениях $U_{0,1}$ к увеличению кривизны вертикального распределения скорости течения. Волны в таком течении существуют только при значениях числа Фруда, удовлетворяющих условию

$$F < \frac{\mathrm{sh}\xi_1}{\theta\xi_1} \quad (\xi_1 = \sqrt{\alpha_1}H).$$

Длины поверхностных волн, как следует из рассчитанных зависимостей волновых чисел от параметров F и α_1 (рис. 5, *б*), убывают при уменьшении числа Фруда и увеличении кривизны распределения скорости течения.



Р и с. 5. Строго выпуклые вниз распределения скорости течения при H = 100 м, U_0 = 0,5 м·с$^{-1}$, U_1 = 0,3 м·с$^{-1}$ (*а*) и зависимости безразмерного волнового числа от числа Фруда (*б*): *1* — α_1 = 10^{-3} м$^{-2}$; *2* — α_1 = 5·10^{-4} м$^{-2}$; *3* — α_1 = 10^{-5} м$^{-2}$

5. Пусть $\alpha(z) = -\alpha_2$ = const < 0. В этом случае $U''(z) < 0$ и распределение скорости по z является строго выпуклым вверх (рис. 2, *д*). Оно описывается выражением

$$U = \frac{U_0 \sin\sqrt{\alpha_2}(z+H) - U_1 \sin\sqrt{\alpha_2}\,z}{\sin\sqrt{\alpha_2}\,H}.$$

Необходимы дополнительные ограничения на параметр α_2, чтобы обеспечить положительные значения скорости течения при всех $-H \le z \le 0$. Задача (7) – (9) принимает вид

$$W'' - (k^2 - \alpha_2)W = 0\,, \quad W'(0) - \gamma W(0) = 0\,, \quad W(-H) = 0\,, \tag{18}$$

где

$$\gamma = \frac{g}{U_0^2} + \sqrt{\alpha_2}\,\mathrm{ctg}\sqrt{\alpha_2}\,H - \frac{\theta\sqrt{\alpha_2}}{\sin\sqrt{\alpha_2}\,H}.$$

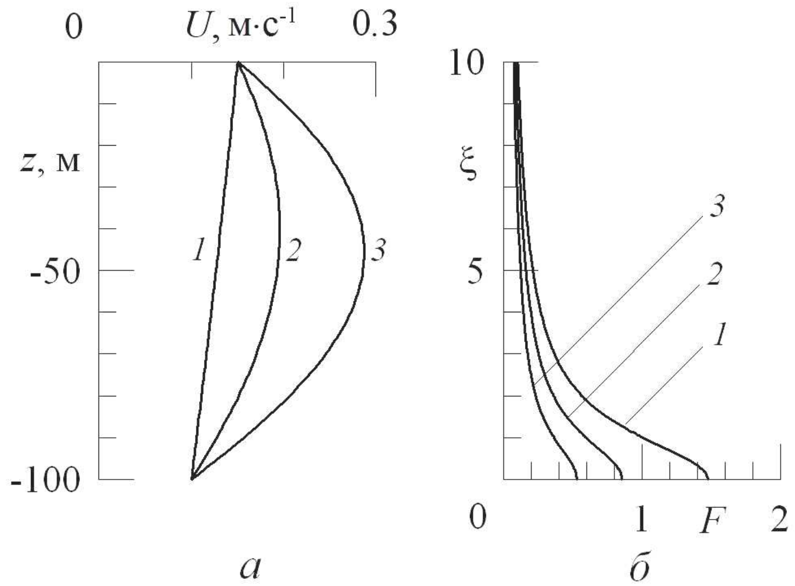
Решение задачи (18) записывается в форме

$$W = A\frac{\mathrm{sh}k_3(z+H)}{\mathrm{ch}k_3 H},\ k_3 = \sqrt{k^2 - \alpha_2}\ ,$$

где A = const; k_3 – корень уравнения $\mathrm{th}k_3 H = k_3/\gamma$, удовлетворяющий условию $k_3 > 0$. При $|k| < \sqrt{\alpha_2}$ гиперболические функции в предыдущих выражениях заменяются на тригонометрические с $k_3 = \sqrt{\alpha_2 - k^2}$. Волны в рассматриваемом потоке существуют при значениях числа Фруда, удовлетворяющих условию

$$F < \frac{\sin\xi_2}{\theta\xi_2}\ (\xi_2 = \sqrt{\alpha_2}H)\,.$$

На рис. 6, *а* показаны распределения по z скорости течения для трех значений параметра α_2. Увеличение α_2, начиная с нуля, приводит при постоянных $U_{0,1}$ к росту кривизны вертикального распределения скорости течения. Длины поверхностных волн, как показывают зависимости волновых чисел от параметров F и α_2 (рис. 6, *б*), убывают при уменьшении числа Фруда и кривизны вертикального распределения скорости потока.



Р и с. 6. Строго выпуклые вверх распределения скорости течения при H = 100 м, U_0 = = 0,15 м·с$^{-1}$, U_1 = 0,1 м·с$^{-1}$ (*а*) и зависимости безразмерного волнового числа от числа Фруда (*б*): *1* — $\alpha_2 = 10^{-5}$ м$^{-2}$; *2* — $\alpha_2 = 3\cdot10^{-4}$ м$^{-2}$; *3* — $\alpha_2 = 5\cdot10^{-4}$ м$^{-2}$

6. Послойное задание перечисленных выше распределений горизонтальной скорости течения позволяет описывать значительно более сложную вертикальную структуру поля скорости потока. В качестве примера рассмотрим течение, скорость которого в приповерхностном слое толщины h постоянна, а ниже – убывает экспоненциально (рис. 2, *е*):

$$U = U_0 \ (-h \le z \le 0)\,,\ U = U_0 \exp[\delta(z+h)] \ (-H \le z \le -h)\,, \tag{19}$$

где $\delta = -\ln\theta / h_2,\ h_2 = H - h$.

Для нахождения k и $W(z)$ необходимо решить уравнения

$$W'' - k^2 W = 0 \ (-h \le z \le 0),\ W'' - k_1^2 W = 0 \ (-H \le z \le -h) \tag{20}$$

с условиями

$$W'(0) - \gamma W(0) = 0\,, \tag{21}$$

$$W(-h+0) = W(-h-0)\,,\ p_1(-h+0) = p_1(-h-0)\,, \tag{22}$$

$$W(-H) = 0 \tag{23}$$

на границах, где $k_1 = \sqrt{k^2 + \delta^2}$, $\gamma = g / U_0^2$. Условия (22) обеспечивают непрерывность вертикальной скорости и давления в жидкости при пересечении горизонта $z = -h$, на котором изменяется характер вертикального распределения скорости потока. Решение задачи (20) – (23) записывается в виде

$$W = A\begin{cases} k\,\mathrm{ch}kz + \gamma\,\mathrm{sh}kz \quad (-h \le z \le 0), \\ \dfrac{k\,\mathrm{ch}kh - \gamma\,\mathrm{sh}kh}{\mathrm{sh}k_1h_2}\,\mathrm{sh}k_1(z+H) \quad (-H \le z \le -h), \end{cases}$$

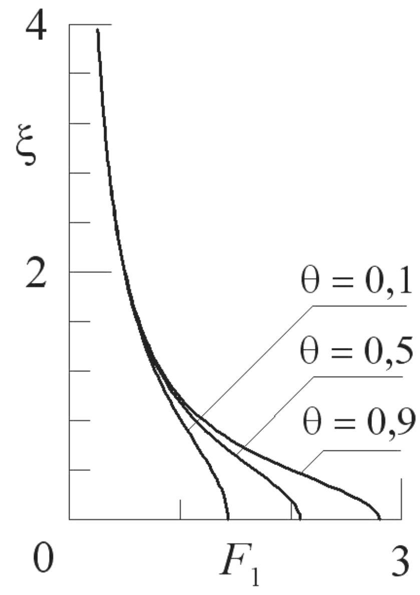
где $A = \mathrm{const}$. Волновое число $k > 0$ находится из трансцендентного уравнения

$$k_1(k - \gamma\,\mathrm{th}kh) - k(\gamma + \delta)\mathrm{th}k_1h_2 + (k^2 + \gamma\delta)\mathrm{th}kh\,\mathrm{th}k_1h_2 = 0\,.$$

Для мелководного потока характерные зависимости волнового числа от числа Фруда $F_1 = U_0^2/(gh)$ и параметра θ представлены на рис. 7. При уменьшении числа Фруда и с ростом отношения скорости у дна к скорости течения у свободной поверхности волны становятся короче. Заметим, что периодические волны существуют при значениях F_1, удовлетворяющих условию

$$F_1 < 1 + \frac{1}{\delta h}\frac{\mathrm{th}\delta h_2}{1 - \mathrm{th}\delta h_2}\,.$$

Помимо перечисленных выше вертикальных распределений горизонтальной скорости течения существуют и другие более сложные зависимости $U = U(z)$, позволяющие найти аналитические решения задачи (7) – (9) через специальные функции. В общем случае для нахождения параметров поверхностных волн в сдвиговых течениях необходимо применение численных методов.



Р и с. 7. Зависимости волнового числа от числа Фруда и параметра θ для сдвигового течения (19) на мелководье (H = 3 м, h = 1 м)

Численный анализ волн в сдвиговом течении. Изложим численную процедуру расчета волновых чисел k и соответствующих им вертикальных распределений скорости $W(z)$ свободных волн в потоках с вертикальным сдвигом скорости.

Заменим краевую задачу (7) – (9) системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$W' = V,\ V' = [k^2 + \alpha(z)]W \quad (-H < z < 0), \tag{24}$$

$$W(-H) = 0,\ V(0) - \gamma W(0) = 0,$$

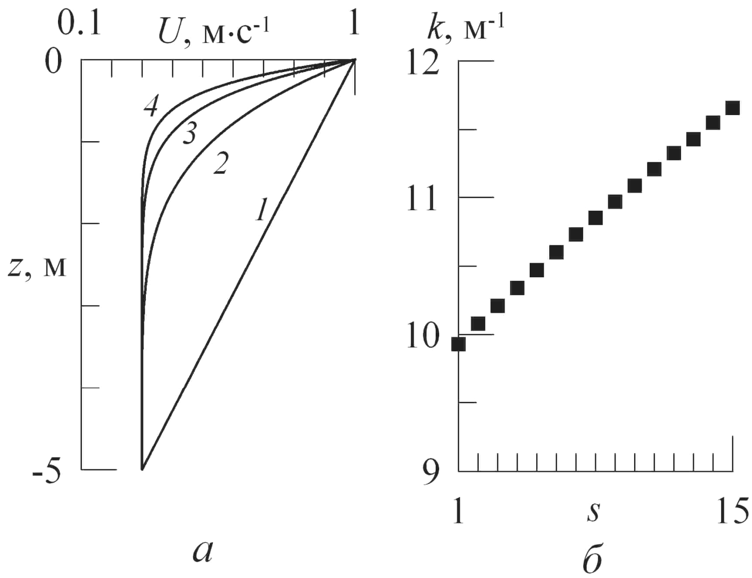
где $\alpha(z)$ и γ находятся по формулам (10).

Обозначим через $W(z, k)$, $V(z, k)$ решение системы уравнений (24) для заданного волнового числа k с начальными условиями $W(-H, k) = 0$, $V(-H, k) = 0{,}01$. Используя его, находим величину $\Delta(k) = V(0,k) - \gamma W(0,k)$. Корни уравнения $\Delta(k) = 0$ являются искомыми волновыми числами k поверхностных волн в течении с известным вертикальным распределением скорости. Для определения k можно применить к системе уравнений (24) метод стрельбы [10]. В этом случае последовательно находятся значения $\Delta(k)$ путем решения системы (24), начиная со значения $k = 0$ с шагом $\Delta k > 0$. Перемена знака функции $\Delta(k)$ означает переход с ростом k через нуль. Последующее деление шага Δk пополам позволяет найти точку перемены знака $\Delta(k)$ (искомое волновое число) с необходимой точностью.

Изложенный вычислительный алгоритм нахождения свободных волн вида (6), в котором используется метод Рунге – Кутта четвертого порядка, тестирован на приведенных выше распределениях $U(z)$, допускающих аналитические решения. Численные расчеты выполнены для следующего вертикального распределения скорости течения:

$$U = U_1 + \left(1 + \frac{z}{H}\right)^s (U_0 - U_1) \ (s \geq 1) \,. \qquad (25)$$

Рассмотрим мелководный поток, характеризуемый параметрами H = 5 м, U_0 = 1,0 м·с$^{-1}$, U_1 = 0,3 м·с$^{-1}$ и целыми значениями показателя степени $s = \overline{1,15}$. На рис. 8, *а* показаны распределения скорости течения, описываемые формулой (25) при различных значениях s. С ростом s наибольшие скорости течения локализуются в приповерхностном слое, а ниже его сдвиги скорости практически отсутствуют. Очевидно, что увеличение параметра s приводит к уменьшению интегрального потока жидкости. Рассчитанные волновые числа k представлены на рис. 8, *б*. Волны являются короткими, что предопределено достаточно большим значением параметра γ в граничном условии (8). Для моделирования более длинных волн необходимо задавать более интенсивные течения. С ростом показателя степени s длины волн убывают. Таким образом, уменьшение средней по глубине скорости потока $\overline{U} = H^{-1}\int_{-H}^{0} U(z)dz$ приводит к уменьшению длины поверхностной волны, а в результате – к более быстрому затуханию волновых возмущений при удалении от свободной поверхности. Заметим, что по результатам расчетов зависимость $k = k(s)$ близка к линейной. В силу малой длины волн зависимость волнового числа от s является относительно слабой.



Р и с. 8. Распределения по вертикали скорости течения (25) при значениях показателя степени s = 1, 5, 10, 15 (*а*) и найденные волновые числа при $s = \overline{1,15}$ (*б*). Параметры потока: H = 5 м, U_0 = 1,0 м·с$^{-1}$, U_1 = 0,3 м·с$^{-1}$

Заключение. В линейной постановке рассмотрена плоская задача о свободных поверхностных гравитационных волнах в течении однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Волны предполагаются стационарными, что характерно, в частности, для подветренных волн. Нахождение параметров свободных волн сведено к решению краевой задачи Штурма – Лиувилля. Для нескольких модельных распределений скорости течения по вертикали найдены аналитические решения задачи. Также предложена численная процедура нахождения параметров волн для сложных вертикальных распределений скорости течения, сохраняющей направление на всех горизонтах внутри жидкости.

Показано, что для рассмотренных распределений скорости течения волны могут существовать только в определенных диапазонах изменения числа Фруда, определяемого как отношение квадрата скорости течения у свободной поверхности к квадрату скорости распространения длинных волн. При уменьшении числа Фруда волны в сдвиговых течениях становятся короче, что приводит к усилению затухания волновых возмущений с глубиной. Для течений, параметры которых соответствуют океаническим условиям, стационарные поверхностные волны являются весьма короткими, и влияние на них оказывают только сдвиги скорости течения в приповерхностном слое океана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины, договор Ф28/435-2009 от 1.07.2009, проект Ф28.6/025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж.* Волны на воде. – М.: Изд. иностр. лит., 1959. – 617 с.
2. *White B.S., Fornberg B.* On the change of freak waves // J. Fluid Mech. – 1998. – 255. – P. 113 – 138.
3. *Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. – Н. Новгород: Нижегородский гос. техн. ун-т, 2004. – 158 с.
4. *Дикий Л.А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1976. – 108 с.
5. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 2. – М.: Мир, 1981. – 365 с.
6. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д. и др.* Динамика поверхностных и внутренних волн. – Киев: Наук. думка, 1988. – 192 с.
7. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Стащук Н.М. и др.* Поверхностные и внутренние гравитационные волны в океане. – Киев: Наук. думка, 1989. – 144 с.
8. *Черкесов Л.В., Власенко В.И., Стащук Н.М. и др.* Гидродинамика морских волн. – Киев: Наук. думка, 1992. – 162 с.
9. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1970. – 671 с.
10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь
E-mail: sf_dotsenko@mail.ru

Материал поступил
в редакцию 23.03.09

АНОТАЦІЯ У лінійній постановці розглянуто плоску задачу про вільні стаціонарні гравітаційні хвилі в горизонтальній течії з вертикальним зсувом швидкості. Знаходження параметрів хвиль зведене до рішення краєвої задачі Штурму – Ліувілля. Для декількох вертикальних розподілів швидкості течії знайдені аналітичні рішення. Запропоновано чисельний алгоритм знаходження параметрів хвиль. На основі проведеного аналізу встановлена можливість існування в течіях стаціонарних поверхневих хвиль в певних діапазонах значень числа Фруда. При зменшенні числа Фруда хвилі стають коротшими, що призводить до швидшого загасання хвильових збурень з глибиною. Для реальних умов хвилі є короткими, вони схильні до впливу зсувних течій лише в приповерхневому шарі океану.

ABSTRACT Plane problem on free stationary gravity waves in a horizontal current with vertical shear is considered within a framework of linear statement. The Sturm-Liouville problem is solved to find wave parameters. Analytical solutions are found for some vertical distributions of current velocity. The numerical procedure is proposed to evaluate the wave parameters. The performed analysis reveals the fact that stationary surface waves can exist in the currents in the selected ranges of the Froude number. When the Froude number decreases the waves become shorter that leads to faster attenuation of wave disturbances with depth. The waves are short in real conditions and effected by shear currents only in the upper ocean layer.