

Бароклинные сейши во вращающихся бассейнах переменной глубины в случае двухслойной плотностной стратификации

Решается плоская задача о линейных бароклинных сейшах в замкнутых вращающихся бассейнах переменной глубины. Плотностная стратификация предполагается двухслойной. В приближении длинных волн получена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и предложена численная процедура нахождения внутренних сейш. Для бассейна постоянной глубины найдены аналитические решения задачи. Численный анализ сейш выполнен для распределений глубины, соответствующих зональному и меридиональному сечениям Черного моря, а также для модельных бассейнов с шельфовой зоной или подводным хребтом. Установлено усиление бароклинных сейш на мелководье и образование обусловленных вращением Земли интенсивных вдольбереговых течений в шельфовых зонах и над вершинами подводных хребтов.

Введение. Сейши – свободные стоячие волны в замкнутых или полужамкнутых бассейнах [1 – 4]. Они могут вызываться изменениями со временем барического поля [5], воздействием нестационарных напряжений ветра на поверхность воды или его прекращением [6], резкими подъемами и опусканиями участков свободной поверхности жидкости за счет притока или оттока вод, выпадения осадков или сейсмических движений земной коры в зоне бассейна [7], отражения внутренних приливов от верхней границы материкового склона [8].

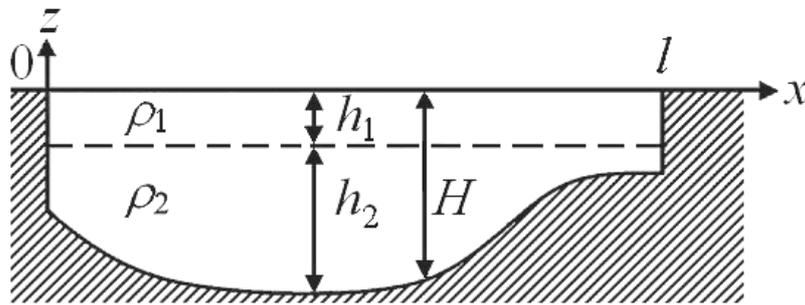
Сейши дают заметный вклад в пространственную и временную изменчивость гидродинамических полей в озерах, бухтах и заливах, влияют на перенос и перемешивание в водной среде, на перераспределение химических и биологических веществ [6]. Значительное влияние на характер протекания этих процессов оказывает плотностная стратификация.

Пространственная структура и параметры стоячих внутренних волн в замкнутых водоемах (бароклинные сейши) зависят от геометрии бассейна и плотностной (температурной и/или халинной) стратификации. Хотя первое теоретико-экспериментальное исследование структуры бароклинных сейш и связанных с ними течений в озерах было выполнено почти сто лет назад [9], внутренние сейши изучены значительно менее глубоко и всесторонне, чем баротропные. Во многих теоретических работах анализ бароклинных сейш проводился в рамках двухслойных и трехслойных моделей морской среды [10, 11]. Обзор современного состояния проблемы бароклинных сейш дан в работе [12].

Математические модели, ориентированные на анализ внутренних сейш и механизмов их генерации во вращающихся бассейнах переменной глубины,

требуют дальнейшего развития, как и изучение фундаментальных закономерностей бароклинных сейш. Ниже решается плоская задача о бароклинных сейшах в случае двухслойной плотностной стратификации жидкости. Численный анализ генерации поверхностных и внутренних волн в таких бассейнах движущимися барическими фронтами содержится в работе [13].

Математическая постановка задачи. Рассматривается плоская задача о свободных колебаниях двухслойной жидкости во вращающемся бассейне переменной глубины. В вертикальной плоскости Oxz бассейн занимает область $0 \leq x \leq l, -H(x) < z < 0$ (рис. 1), где x – горизонтальная координата; z – вертикальная координата, отсчитываемая вверх от невозмущенного положения свободной поверхности жидкости $z = 0$; $H = H(x) > 0$ – глубина бассейна в невозмущенном состоянии. Обозначим через h_1 постоянную толщину верхнего слоя плотности ρ_1 в невозмущенном состоянии, через $h_2(x) = H(x) - h_1$ – переменную толщину нижнего слоя плотности $\rho_2 > \rho_1$.



Р и с. 1. Схема бассейна

В рамках линейной теории длинных волн с учетом вращения Земли движение жидкости описывается следующей системой уравнений [14]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - fv_1 = -g \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + fu_1 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta_1 - \zeta_2) + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - fv_2 = -g\gamma \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - g\varepsilon \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + fu_2 = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Здесь $u_j(x, t), v_j(x, t)$ ($j = 1, 2$) – проекции на оси x и y соответственно осредненной по глубине горизонтальной скорости течения в верхнем ($j = 1$) и нижнем ($j = 2$) слоях; $\zeta_1(x, t), \zeta_2(x, t)$ – смещения свободной поверхности жидкости и границы раздела слоев от горизонтальных положений соответственно; $\gamma = \rho_1/\rho_2 < 1$ и $\varepsilon = 1 - \gamma > 0$ – безразмерные параметры, характеризующие вертикальную плотностную стратификацию жидкости; $f > 0$ – постоянный параметр Кориолиса.

На боковых границах бассейна $x = 0$ и $x = l$, являющихся вертикальными твердыми стенками, задаются условия непротекания жидкости

$$u_{1,2}(0, t) = 0, \quad u_{1,2}(l, t) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим гармонические по времени колебания двухслойной среды в форме

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1(x) \cos \sigma t, \quad v_1 = b_1(x) \sin \sigma t, \quad \zeta_1 = c_1(x) \sin \sigma t, \\ u_2 &= a_2(x) \cos \sigma t, \quad v_2 = b_2(x) \sin \sigma t, \quad \zeta_2 = c_2(x) \sin \sigma t, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma > 0$ – подлежащая определению частота свободных колебаний жидкости в бассейне (частота сейш). Введем величины $U_1(x) = a_1(x)h_1$ и $U_2(x) = a_2(x)h_2(x)$, представляющие собой полные горизонтальные потоки жидкости в верхнем и нижнем слоях (без гармонического по времени множителя). Подстановка (6) в (1) – (5) приводит к краевой задаче для двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по x для нахождения частот σ и соответствующих им горизонтальных распределений полных потоков $U_{1,2}(x)$:

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} + \alpha \left(\frac{U_1}{h_1} - \frac{U_2}{h_2} \right) = 0, \quad \frac{d^2 U_2}{dx^2} - \alpha \left(\gamma \frac{U_1}{h_1} - \frac{U_2}{h_2} \right) = 0, \quad (7)$$

$$U_1(0) = U_2(0) = 0, \quad U_1(l) = U_2(l) = 0, \quad (8)$$

где $\alpha = \frac{\sigma^2 - f^2}{\varepsilon g}$. Если собственные частоты σ и полные потоки в слоях

$U_{1,2}(x)$ найдены из задачи (7), (8), то амплитудные функции a_j, b_j и c_j ($j = 1, 2$) гидродинамических полей (6) можно рассчитать по формулам

$$a_1 = \frac{U_1(x)}{h_1}, \quad b_1 = -\frac{f}{\sigma h_1} U_1(x), \quad c_1 = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{dU_1}{dx} + \frac{dU_2}{dx} \right), \quad (9)$$

$$a_2 = \frac{U_2(x)}{h_2(x)}, \quad b_2 = -\frac{f}{\sigma h_2(x)} U_2(x), \quad c_2 = -\frac{1}{\sigma} \frac{dU_2}{dx}. \quad (10)$$

Ниже полученные уравнения и соотношения применены для исследования бароклинных сейш в бассейнах трех типов: бассейне постоянной глубины; бассейнах, глубина которых задана таблично (зональное и меридиональное сечения Черноморской котловины); бассейнах с модельными изменениями глубины, описывающими шельфовую зону моря и подводный хребет. В первом случае задача решается аналитически, во втором и третьем для ее решения необходимо применение численных методов.

Сейши в бассейнах постоянной глубины. В случае, когда толщины слоев h_1 и h_2 постоянны, баротропные и бароклинные сейши удается найти аналитически. Решение системы уравнений (7) ищем в виде

$$U_1 = Ae^{\lambda x}, \quad U_2 = Be^{\lambda x}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (7) и приравнявая определитель полученной системы для нахождения A и B к нулю, получим биквадратное относительно λ характеристическое уравнение

$$\chi^2 + \frac{\alpha H}{h_1 h_2} \chi + \frac{\alpha^2 \varepsilon}{h_1 h_2} = 0 \quad (\chi = \lambda^2).$$

Его решения $\lambda_{1,2} = \pm i\mu_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\mu_2$, где

$$\mu_1 = \sqrt{|\chi_1|}, \quad \mu_2 = \sqrt{|\chi_2|}, \quad \chi_s = -\frac{\alpha}{2h_1 h_2} \left[H + (-1)^s \sqrt{H^2 - 4\varepsilon h_1 h_2} \right] \quad (s = 1, 2).$$

Общее решение системы уравнений (7) имеет вид

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \sin \mu_1 x + \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \sin \mu_2 x + \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_3 \end{Bmatrix} \cos \mu_1 x + \begin{Bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{Bmatrix} \cos \mu_2 x. \quad (12)$$

Подставив (12) в (7), найдем выражения для коэффициентов B_k через A_k ($k = 1, \dots, 4$). Удовлетворяя граничным условиям $U_1(0) = U_2(0) = 0$ в (8), получим $A_3 = B_3 = A_4 = B_4 = 0$. Из граничных условий $U_1(l) = U_2(l) = 0$ в (8) вытекает, что для существования ненулевых значений A_1 и A_2 необходимо выполнение одного из условий: $\sin \mu_1 l = 0$ или $\sin \mu_2 l = 0$. Эти уравнения позволяют найти две бесконечные последовательности частот собственных колебаний двухслойной жидкости в бассейне постоянной глубины:

$$\sigma_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon g h_1 h_2 n^2 \pi^2}{l^2 (H - \sqrt{H^2 - 4\varepsilon h_1 h_2})} + f^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$\sigma_m^{(2)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon g h_1 h_2 m^2 \pi^2}{l^2 (H + \sqrt{H^2 - 4\varepsilon h_1 h_2})} + f^2} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

При малых значениях относительного перепада плотности ε между слоями, который в реальных условиях имеет значения порядка 10^{-3} , выражения для частот колебаний (13) и (14) можно приближенно записать в форме

$$\sigma_n^{(1)} \approx \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 g H}{l^2} + f^2}, \quad \sigma_m^{(2)} \approx \sqrt{\frac{m^2 \pi^2 \varepsilon g h_1 h_2}{l^2 H} + f^2}.$$

Поэтому частоты (13), как слабо зависящие от параметров плотностной стратификации, соответствуют баротропным сейшам. Частоты стоячих колебаний (14) существенно зависят от относительного перепада плотности между слоями и поэтому соответствуют бароклиным сейшам. Заметим, что частоты баротропных и бароклиных сейш являются суперинерционными ($\sigma > f$).

Из (12) с учетом полученных выше соотношений находим выражения для полных потоков в баротропных и бароклиных сейшах:

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{Bmatrix} = A_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1^+ \end{Bmatrix} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right), \quad \begin{Bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{Bmatrix} = A_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1^- \end{Bmatrix} \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right),$$

где $A_{1,2}$ – произвольные константы,

$$\xi_1^\pm = \frac{h_2 - h_1 \pm \sqrt{H^2 - 4\varepsilon h_1 h_2}}{2h_2}. \quad (15)$$

По известным полным горизонтальным потокам в слоях определяются проекции горизонтальной скорости течения, а также смещения свободной поверхности и границы раздела слоев:

для баротропных сейш

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} &= \frac{A_1}{h_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1^+ \end{Bmatrix} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \cos \sigma_n^{(1)} t, \\ \begin{Bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{Bmatrix} &= -\frac{fA_1}{\sigma_n^{(1)} h_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1^+ \end{Bmatrix} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \sin \sigma_n^{(1)} t, \\ \begin{Bmatrix} \zeta_1^{(1)} \\ \zeta_2^{(1)} \end{Bmatrix} &= -\frac{n\pi A_1}{\sigma_n^{(1)} l} \begin{Bmatrix} \xi_2^+ \\ \xi_3^+ \end{Bmatrix} \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \sin \sigma_n^{(1)} t, \\ \xi_2^\pm &= \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4\varepsilon h_1 h_2}}{2h_1}, \quad \xi_3^\pm = \frac{h_2 - h_1 \pm \sqrt{H^2 - 4\varepsilon h_1 h_2}}{2h_1}; \end{aligned} \quad (16)$$

для бароклинных сейш

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} &= \frac{A_2}{h_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1^- \end{Bmatrix} \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) \cos \sigma_m^{(2)} t, \quad \begin{Bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{Bmatrix} = -\frac{fA_2}{\sigma_m^{(2)} h_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1^- \end{Bmatrix} \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) \sin \sigma_m^{(2)} t, \\ \begin{Bmatrix} \zeta_1^{(2)} \\ \zeta_2^{(2)} \end{Bmatrix} &= -\frac{m\pi A_2}{\sigma_m^{(2)} l} \begin{Bmatrix} \xi_2^- \\ \xi_3^- \end{Bmatrix} \cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right) \sin \sigma_m^{(2)} t. \end{aligned}$$

Поскольку в реальных условиях параметр ε мал, амплитудные множители (15) и (16) можно приближенно записать в виде

$$\xi_1^+ \approx 1, \quad \xi_1^- \approx -\frac{h_1}{h_2}, \quad \xi_2^+ \approx \frac{H}{h_1}, \quad \xi_2^- \approx \frac{\varepsilon h_2}{H}, \quad \xi_3^+ \approx \frac{h_2}{h_1}, \quad \xi_3^- \approx -1.$$

Таким образом, в баротропных сейшах горизонтальные потоки жидкости в слоях имеют одинаковое направление, а скорости течений в них приблизительно равны. Во внутренних сейшах потоки жидкости в слоях направлены в противоположные стороны. Скорость течения в нижнем слое меньше (больше) скорости течения в верхнем слое, если $h_1 < h_2$ ($h_1 > h_2$). Во всех случаях суммарный поток жидкости от поверхности до дна бассейна близок к нулю.

Для баротропных сейш смещения свободной поверхности и поверхности раздела слоев происходят синфазно, при этом амплитуда колебаний свободной поверхности больше амплитуды колебаний поверхности раздела в H/h_2 раз. В бароклиных сейшах доминируют колебания границы раздела слоев, а колебания свободной поверхности (проявления внутренней сейши на свободной поверхности) практически отсутствуют. Эти свойства баротропных и бароклиных сейш в двухслойной жидкости описаны в книге [14].

Частоты баротропных и бароклиных колебаний жидкости, определяемые по формулам (13) и (14), возрастают при увеличении порядковых номеров сейш и убывают с ростом ширины бассейна. Зависимость частоты бароклиной сейши от толщин слоев h_1 и h_2 при постоянной полной глубине бассейна является симметричной функцией, т.е. замена пары глубин слоев (h_1, h_2) на (h_2, h_1) не влияет на значения частот бароклиных колебаний жидкости. Наконец, чем меньше скачок плотности на границе раздела слоев, тем более медленные колебания совершает граница раздела слоев во внутренних сейшах.

Алгоритм расчета бароклиных сейш в бассейнах переменной глубины. Изложим численную процедуру расчета одномерных сейш в двухслойной жидкости, заполняющей бассейн переменной глубины. Будем предполагать, что боковые границы бассейна $x = 0$ и $x = l$ являются вертикальными и общими для свободной поверхности жидкости и границы раздела слоев, как это схематически показано на рис. 1. Численный алгоритм опирается на общие свойства решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [15].

Заменим краевую задачу (7), (8) следующей:

$$\frac{dU_1}{dx} = U_3, \quad \frac{dU_2}{dx} = U_4, \quad \frac{dU_3}{dx} = -\alpha \left(\frac{U_1}{h_1} - \frac{U_2}{h_2} \right), \quad \frac{dU_4}{dx} = \alpha \left(\gamma \frac{U_1}{h_1} - \frac{U_2}{h_2} \right), \quad (17)$$

$$U_1(0) = U_2(0) = 0, \quad (18)$$

$$U_1(l) = U_2(l) = 0. \quad (19)$$

Обозначим через $\mathbf{u}^1(x)$, $\mathbf{u}^2(x)$, $\mathbf{u}^3(x)$, $\mathbf{u}^4(x)$ фундаментальную систему решений системы уравнений (17), $\mathbf{u} = [U_1(x), U_2(x), U_3(x), U_4(x)]^T$. При этом $\mathbf{u}^j(0) = \mathbf{e}^j$, где \mathbf{e}^j – единичный четырехмерный вектор, у которого j -й элемент равен 1, а остальные равны 0. Общее решение системы (17) записывается в виде линейной суперпозиции фундаментальной системы решений:

$$\mathbf{u} = C_1 \mathbf{u}^1(x) + C_2 \mathbf{u}^2(x) + C_3 \mathbf{u}^3(x) + C_4 \mathbf{u}^4(x).$$

Из краевых условий (18) следует, что в момент времени $t = 0$

$$\mathbf{u}(0) = C_1 \mathbf{e}^1 + C_2 \mathbf{e}^2 + C_3 \mathbf{e}^3 + C_4 \mathbf{e}^4 = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T = [0, 0, *, *]^T,$$

где символ * означает выражение, вид которого не является существенным. Поэтому $C_1 = C_2 = 0$, и любое решение системы уравнений (17), удовлетворяющее условиям (18), записывается в виде $\mathbf{u} = C_3 \mathbf{u}^3(x) + C_4 \mathbf{u}^4(x)$. Для удовлетворения второй пары краевых условий (19) необходимо выпол-

нение равенства $\mathbf{u}(l) = C_3\mathbf{u}^3(l) + C_4\mathbf{u}^4(l) = [0, 0, *, *]^T$, что приводит к системе двух уравнений

$$C_3U_1^3(l) + C_4U_1^4(l) = 0, \quad C_3U_2^3(l) + C_4U_2^4(l) = 0.$$

Для существования ее нетривиального решения $(C_3, C_4) \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.

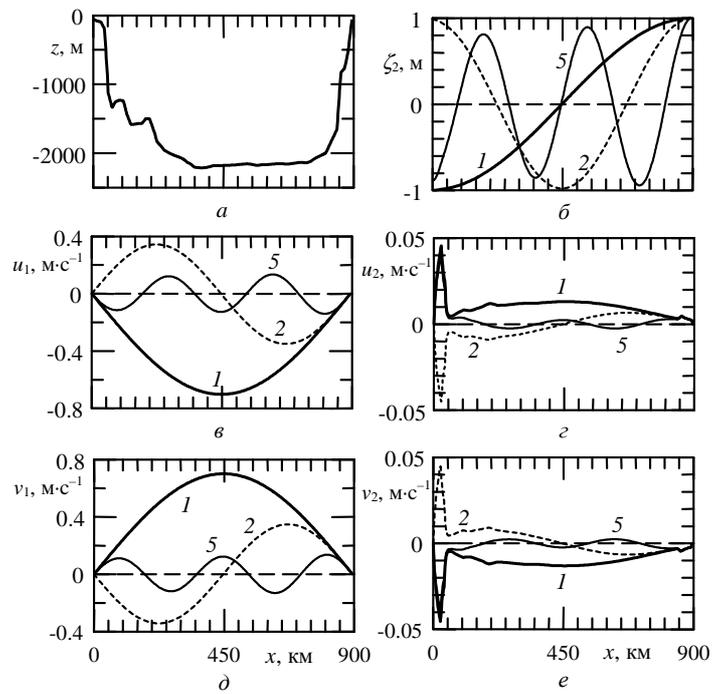
$$\Delta(\sigma) = U_1^3(l)U_2^4(l) - U_1^4(l)U_2^3(l) = 0. \quad (20)$$

Таким образом, для нахождения частот σ свободных колебаний двухслойной жидкости необходимо найти корни уравнения $\Delta(\sigma) = 0$. Для этого можно применить к системе уравнений (17) метод пристрелки по частоте волны. Он предполагает нахождение для каждого значения частоты $\sigma > 0$ двух линейно независимых решений системы уравнений (17), удовлетворяющих начальным условиям $\mathbf{u}(0) = \mathbf{e}^3$ и $\mathbf{u}(0) = \mathbf{e}^4$. Этих решений достаточно для вычисления левой части уравнения (20). Изменение частоты σ , например ее увеличение с определенным шагом, позволяет последовательно находить собственные частоты бароклиных колебаний двухслойной жидкости. В данной работе для решения системы уравнений (17) применен метод Рунге – Кутты.

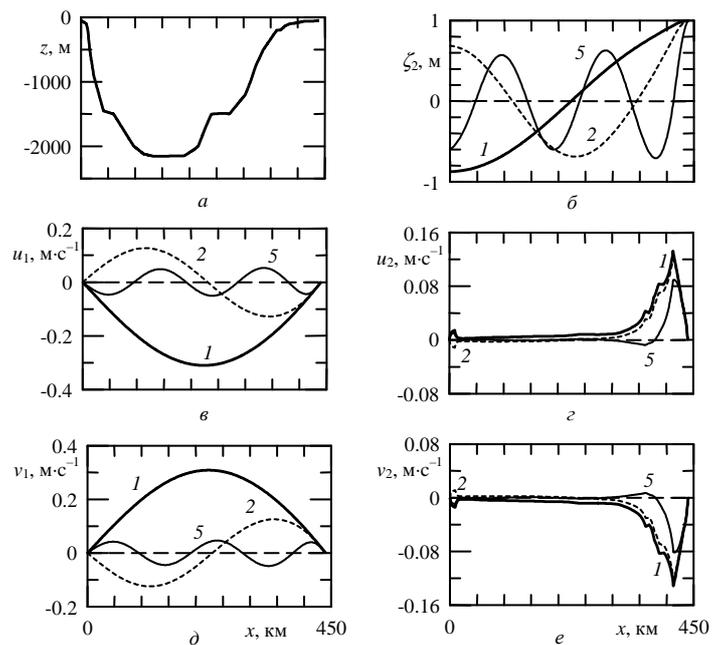
Результаты численного анализа бароклиных сейш для бассейнов различной геометрии. Изложенный выше метод нахождения частот сейш и соответствующих им гидродинамических полей применен для расчета бароклиных сейш в бассейнах с различным рельефом дна. Рассчитывались частоты сейш и соответствующие им распределения по x амплитудных множителей (10) для смещений границы раздела слоев ζ_2 и двух проекций горизонтальной скорости волнового течения в верхнем (u_1, v_1) и нижнем (u_2, v_2) слоях. Плотности жидкости в слоях $\rho_1 = 1012 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ и $\rho_2 = 1017 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, а поэтому $\varepsilon \approx 4,9 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 2 представлены найденные численно горизонтальные распределения гидродинамических полей в трех бароклиных сейшах в случае изменения глубины бассейна, соответствующего зональному сечению Черноморской котловины ($42,66^\circ$ с. ш.). На рис. 3 приведены аналогичные поля для случая изменения глубины бассейна вдоль меридионального разреза Черного моря (31° в. д.). Поля в баротропных сейшах для последнего случая приведены в работе [16].

Отметим прежде всего, что по результатам расчетов для бассейнов с масштабами Черного моря периоды колебаний пяти низших бароклиных сейш близки к инерционному периоду $T_{in} = 17,71$ ч. Они достаточно хорошо оцениваются по формулам (14), если принять $H = 2000$ м, $h_1 = 20 - 45$ м и задать реальную ширину бассейна. С ростом номера сейши наблюдается увеличение отклонения периода бароклиной сейши от инерционного периода. Тем не менее это отклонение не превышает 6 % для 5-узловой сейши в бассейне с распределением глубины, показанным на рис. 3, а. Для бассейна на рис. 2, а отклонение периодов сейш от инерционного периода еще меньше. Периоды баротропных сейш существенно убывают с ростом номера сейши [16].



Р и с. 2. Распределение глубины бассейна I (a) и гидродинамические поля для бароклинных мод с номерами 1, 2 и 5: вертикальные смещения ζ_2 границы раздела слоев (б), а также горизонтальные скорости в верхнем u_1 (в), v_1 (д) и нижнем u_2 (е), v_2 (е) слоях (толщина верхнего слоя $h_1 = 40$ м, глубина бассейна у вертикальных боковых стенок 75 м)



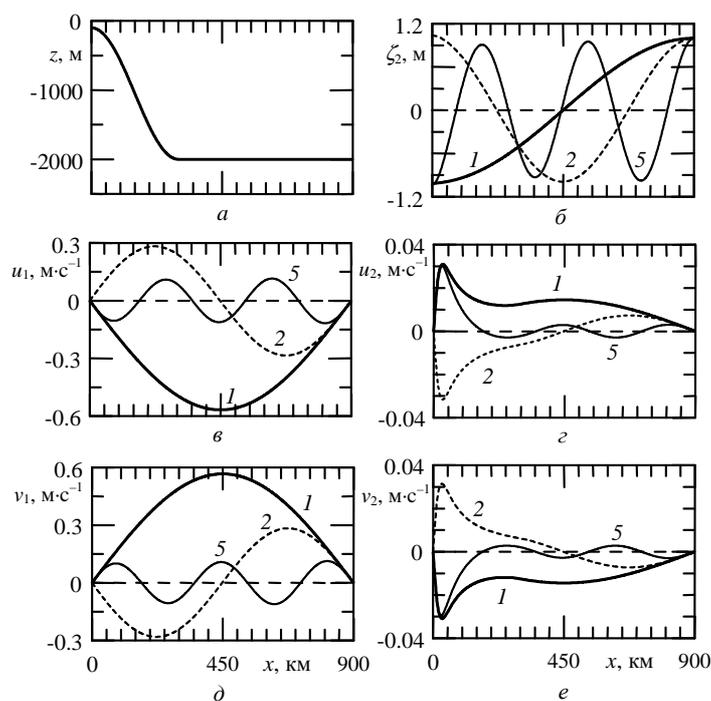
Р и с. 3. То же, что и на рис. 1, для распределения глубины II (глубина бассейна у вертикальных боковых стенок 50 м)

Сравнение рис. 2 и 3 показывает, что в обоих бассейнах горизонтальные структуры вертикальных смещений скачка плотности ζ_2 и проекций скорости течения в верхнем слое (u_1, v_1) качественно одинаковы. Это говорит о слабом влиянии рельефа дна на бароклинные моды, если толщина верхнего слоя и перепад плотности между слоями поддерживаются постоянными. Однако, как следует из рис. 2, *г, е* и 3, *г, е*, распределения обеих проекций скорости вдоль x в нижнем слое (u_2, v_2) для этих бассейнов качественно отличаются по своей структуре. Важная закономерность поля скорости под скачком плотности – существенное увеличение скорости в мелководных районах бассейнов, где толщина нижнего слоя наименьшая. Очевидно, что образование вдольберегового течения (рис. 2, *е* и 3, *е*) – эффект исключительно вращения Земли.

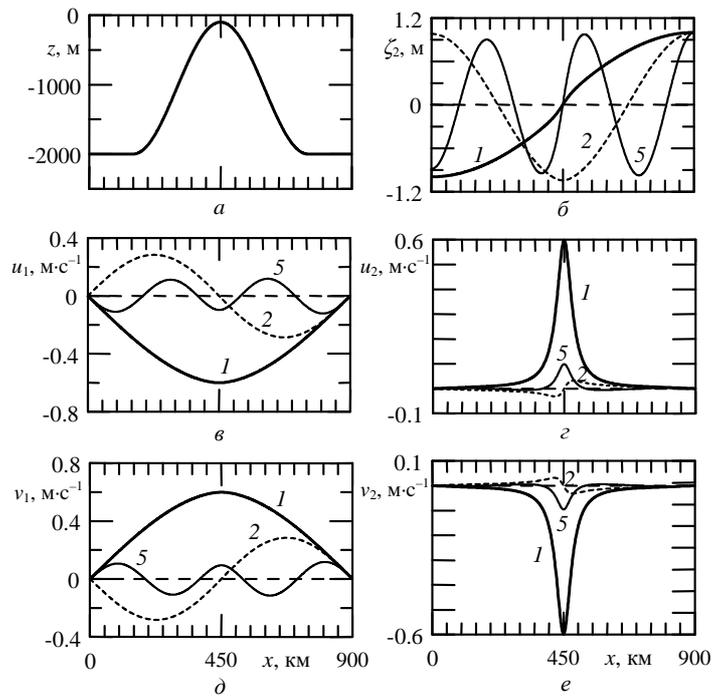
Из формул (9) и (10) вытекают равенства

$$\frac{b_1(x)}{a_1(x)} = \frac{b_2(x)}{a_2(x)} = -\frac{f}{\sigma}.$$

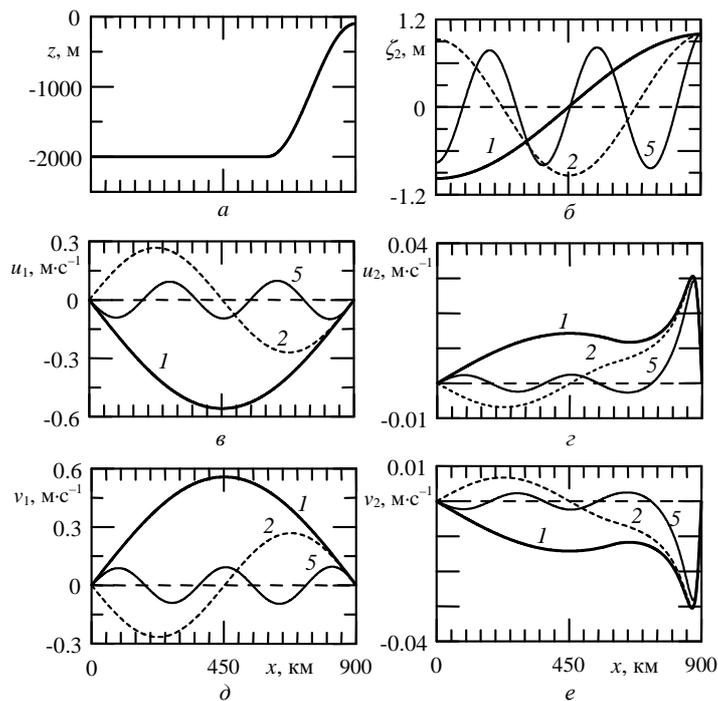
Поскольку периоды низших бароклинных мод близки к инерционному периоду ($\sigma \approx f$), получаем $b_1(x) \approx -a_1(x)$, $b_2(x) \approx -a_2(x)$, что объясняет практическое совпадение (с точностью до знака) горизонтальных распределений проекций скорости течения в слоях (рис. 2, *в* и 2, *д*; 2, *г* и 2, *е*; 3, *в* и 3, *д*; 3, *г* и 3, *е*).



Р и с. 4. То же, что и на рис. 1, для модельного распределения глубины (на рис. *a* – шельф у левой боковой границы бассейна; толщина верхнего слоя $h_1=50$ м; глубины у вертикальных боковых стенок 100 и 2000 м)



Р и с. 5. То же, что и на рис. 1, для модельного распределения глубины (на рис. *a* – подводный хребет; толщина верхнего слоя $h_1=50$ м; глубина у вертикальных боковых стенок 2000 м)



Р и с. 6. То же, что и на рис. 1, для модельного распределения глубины (на рис. *a* – шельф у правой боковой границы бассейна; толщина верхнего слоя $h_1=50$ м; глубины у вертикальных боковых стенок 2000 и 100 м)

Бароклинные сейши вносят существенный вклад в динамику вод и транспорт донных осадков в мелководных зонах озер, заливов и бухт. Чтобы проанализировать усиление бароклинных сейш на шельфе и в районах морских гор, был рассмотрен модельный бассейн, мелководная зона в котором располагается у одной из боковых границ бассейна или над подводным хребтом в центральной части бассейна. Результаты расчетов бароклинных сейш для этих случаев представлены на рис. 4, 5 и 6.

Сравнение структуры гидродинамических полей подтверждает вывод о качественно одинаковой пространственной структуре смещений скачка плотности ζ_2 и скорости течения в верхнем слое (u_1, v_1) для всех трех рельефов дна бассейна. Как и на рис. 2 и 3, распределения проекций скорости по x в нижнем слое (u_2, v_2) для этих бассейнов зависят от рельефа дна, а поэтому существенно отличаются. Скорости течения заметно усиливаются в мелководных зонах, где толщина нижнего слоя наименьшая. В случае подводного хребта вдольбереговая проекция скорости (рис. 5, *г, е*) локализуется в окрестности вершины донного поднятия, образуя струйное знакопеременное течение.

Заключение. В рамках плоской модели длинных волн в двухслойной жидкости выполнен анализ линейных бароклинных сейш в ограниченных вращающихся бассейнах переменной глубины. Задача сведена к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложена численная процедура расчета частот и гидродинамических полей во внутренних сейшах, опирающаяся на метод пристрелки по частоте колебаний.

Аналитическое решение задачи о бароклинных сейшах получено для ограниченного бассейна постоянной глубины. Численный анализ внутренних сейш выполнен для замкнутых бассейнов с распределениями глубин, соответствующими зональному и меридиональному сечениям Черного моря. Расчеты также проведены для бассейнов, включающих шельфовые зоны или подводный хребет.

Показано, что в бассейнах, пространственные масштабы которых соответствуют Черному морю, периоды низших бароклинных сейш близки к инерционному периоду. Во всех рассмотренных случаях горизонтальные структуры вертикальных смещений скачка плотности и скорости течения в верхнем слое жидкости качественно одинаковы. Это значит, что рельеф дна слабо влияет на гидродинамические поля в верхнем слое жидкости. В то же время горизонтальная структура поля скорости в нижнем слое жидкости существенно зависит от рельефа дна бассейна. Скорости течения заметно возрастают в шельфовых зонах и над вершинами подводных хребтов. Образование интенсивных вдольбереговых течений в мелководных зонах бассейнов – одно из проявлений вращения Земли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1934. – 304 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. *Праудмэн Дж.* Динамическая океанография. – М.: Иностранная литература, 1957. – 418 с.

4. Miles W.J. Harbor seiching // *Annual Rev. Fluid. Mech.* – 1974. – 6. – P. 17 – 33.
5. Gomis D., Monserrat S., Tintoré J. Pressure-forced seiches of large amplitude in inlets of the Balearic Islands // *J. Geophys. Res.* – 1993. – 98, № C8. – P. 14437 – 14445.
6. Судольский А.С. Динамические явления в водоемах. – Л.: Гидрометеоздат, 1991. – 263 с.
7. Ichinose G.A., Anderson J.G., Satake K. et al. The potential hazard from tsunami and seiche waves generated by large earthquakes within Lake Tahoe, California-Nevada // *Geophys. Res. Letters.* – 2000. – 27, № 8. – P. 1203 – 1206.
8. Giese G.S., Chapman D.C., Black P.G. et al. Causation of large-amplitude coastal seiches on the Caribbean coast of Puerto Rico // *J. Phys. Oceanogr.* – 1990. – 20, № 9. – P. 1449 – 1458.
9. Wedderburn E.M. Temperature observations in Loch Earn, with a further contribution to the hydrodynamical theory of the temperature seiches // *Trans. Roy. Soc. Edinburgh.* – 1912. – 48. – P. 629 – 695.
10. Arneborg L., Liljebladh B. The internal seiches in Gullmar Fjord. Part I: Dynamics // *J. Phys. Oceanogr.* – 2001. – 31, № 9. – P. 2549 – 2566.
11. Алексеев Д.В., Дымова О.А., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Исследование баротропных и бароклинных сейш в ограниченных морских бассейнах // *Морской гидрофизический журнал.* – 2004. – № 3. – С. 3 – 16.
12. Mortimer C.H. Long internal waves in lakes: review of a century of research // *Univ. Wisconsin – Milwaukee, Center for Great Lakes studies.* – Spec. Rep. – 1993. – № 42. – 177 p.
13. Доценко С.Ф., Миклашевская Н.А. Генерация поверхностных и внутренних волн в ограниченном бассейне перемещающимся барическим фронтом // *Морской гидрофизический журнал.* – 2009. – № 3. – С. 3 – 18.
14. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1. – М.: Мир, 1981. – 480 с.
15. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
16. Доценко С.Ф., Миклашевская Н.А. Генерация сейш в ограниченных бассейнах перемещающимися барическими фронтами // *Морской гидрофизический журнал.* – 2008. – № 2. – С. 3 – 18.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь
E-mail: sf_dotsenko@mail.ru

Материал поступил
в редакцию 19.01.09.
После доработки 16.02.09.

АНОТАЦІЯ Розв'язується плоска задача про лінійні бароклінічні сейші в замкнутих обертових басейнах змінної глибини. Густинна стратифікація припускається двошаровою. У наближенні довгих хвиль отримана крайова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь і запропонована чисельна процедура знаходження внутрішніх сейшів. Для басейну постійної глибини знайдені аналітичні рішення задачі. Чисельний аналіз сейшів виконаний для розподілів глибини, які відповідають зональному і меридіональному перетинам Чорного моря, а також для модельних басейнів із шельфовою зоною або підводним хребтом. Установлено посилення бароклінічних сейшів на мілководді і утворення обумовлених обертанням Землі інтенсивних течій уздовж берега в шельфових зонах і над вершинами підводних хребтів.

ABSTRACT Plane problem on linear baroclinic seiches in closed rotating basins of variable depth is solved. Density stratification is assumed to be two-layered. The boundary problem for the system of ordinary differential equations is derived in the long-wave approximation. Numerical procedure for calculating internal seiches is proposed. Analytical solutions for a basin of constant depth are found. Numerical analysis of seiches is done for depth distributions corresponding to zonal and meridian sections of the Black Sea and for the model basins including shelf zones or underwater ridge. Intensification of baroclinic seiches in shallow-water regions and formation (due to Earth rotation) of strong along-coastal currents both in the shelf zones and above the tops of underwater ridges are revealed.