

# Математическое моделирование морских систем

УДК 551.465

С.Г. Демьшев, Н.А. Евстигнеева

## Расчет баротропных течений на шельфе Черного моря на основе гидродинамической модели МГИ НАН Украины

Приводится описание трехмерной нелинейной модели Черного моря, адаптированной для расчета баротропных течений на шельфе. Рассматриваются особенности конечно-разностных уравнений, возникающие при учете жидких границ. В качестве примера решается задача моделирования течений, формирующихся под действием климатического ветра на северо-западном шельфе Черного моря.

Анализируются результаты трех экспериментов, в которых на открытой части боковых границ для уравнений движения задаются соответственно условия Дирихле, свободного протекания и смешанного типа. Показано, что использование условий Дирихле может приводить к неадекватному вертикальному переносу вблизи жидких границ. При задании условий свободного протекания возникают большие ошибки в полях уровня и скорости течений в приграничной области. Условия смешанного типа позволяют уменьшить ошибку в расчетных полях и более корректно описать перенос по вертикали.

**Ключевые слова:** численное моделирование, баротропные течения, высокое пространственное разрешение, северо-западный шельф, открытая жидкая граница.

**Введение.** Знание прибрежной циркуляции Черного моря необходимо для решения задач навигации и строительства прибрежных и портовых сооружений. Для ее расчета необходимо использовать гидродинамическую модель, которая позволяет учесть влияние стока рек и обмен через жидкую границу и описать течения в мелководных заливах и лиманах. Для воспроизведения реальной ситуации важно ассимилировать в модели поступающую гидрологическую информацию. Предполагается, что конечной целью работ по адаптации модели МГИ НАН Украины является реализация программного комплекса для обработки данных гидрологических съемок, которые достаточно регулярно проводятся в шельфовой зоне Черного моря.

К настоящему времени известны несколько моделей для прибрежной зоны. В работе [1] были исследованы для зимне-весеннего сезона ветровые течения и течения, обусловленные стоком рек. Изучено влияние рельефа дна, направления и величины скорости ветра, речного стока на формирование циркуляции на северо-западном шельфе. В статьях [2 – 4] с помощью квазиизопикнической модели по среднемесячным климатическим данным были получены распределения течений в северо-западной части Черного моря, а также исследовалась сезонная изменчивость гидродинамических полей. В работе [5] изучена структура зон подъема вод на шельфе в зависимости от направления ветра. В перечисленных работах на открытой части боковых границ для

© С.Г. Демьшев, Н.А. Евстигнеева, 2011

ISSN 0233-7584. Мор. гидрофиз. журн., 2011, № 6

43

уравнений движения использовались условия свободного протекания. В статье [6] описана численная гидродинамическая модель прибрежной циркуляции вод, адаптированная к условиям Одесского и Приднепровско-Бугского районов. На открытой морской границе задавались возмущения уровня моря либо условия излучения.

В данной работе проведена адаптация модели МГИ НАН Украины [7] в баротропном приближении для условий шельфа Черного моря. В качестве примера рассматривается северо-западный шельф, который достаточно хорошо изучен, что позволяет надежно тестировать модель. В отличие от вышеприведенных исследований решается задача моделирования течений, возникающих под действием климатического ветра на шельфе, что требует длительного (для 4 лет) интегрирования уравнений модели. Особое внимание уделяется изучению роли краевых условий для открытой границы при формировании поля уровня, горизонтальной и вертикальной скоростей течений на северо-западном шельфе.

**Постановка задачи.** Уравнения модели в приближении Буссинеска, гидростатики и несжимаемости морской воды имеют вид:

$$u_t - (o + f)v + wu_z = -g\mathcal{J}_x - E_x + (v_v u_z)_z + F^u, \quad (1)$$

$$v_t + (o + f)u + wv_z = -g\mathcal{J}_y - E_y + (v_v v_z)_z + F^v, \quad (2)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (3)$$

$$\mathcal{J}_z + \int_0^H (u_x + v_y) dz = 0, \quad (4)$$

где  $E = (u^2 + v^2)/2$ ,  $o = v_x - u_y$ , остальные обозначения в уравнениях (1) – (4) – общепринятые [7].

Используется гармоническое представление турбулентных слагаемых в уравнениях движения  $F^u = \nu_H \nabla^2 u$ ,  $F^v = \nu_H \nabla^2 v$ .

Уравнение (4) эквивалентно заданию линейризованного кинематического условия для поверхности моря  $w = -\mathcal{J}_z$  (при  $z = 0$ ).

К системе уравнений (1) – (4) необходимо присоединить начальные и граничные условия.

При начальном моменте времени  $t = t_0$   $u = v = 0$ ,  $\mathcal{J} = 0$ .

Краевые условия для поверхности имеют вид:  $v_v u_z = -\mathcal{F}^x$ ,  $v_v v_z = -\mathcal{F}^y$ ,

где  $\mathcal{F}^x$ ,  $\mathcal{F}^y$  – составляющие компоненты напряжения трения ветра.

На дне выполняются условия прилипания  $u = v = w = 0$ .

На твердых боковых стенках используются следующие условия:

для меридиональных участков  $u = 0$ ,  $v_x = 0$ ,

для зональных участков границы  $v = 0$ ,  $u_y = 0$ .

Для участков границы, где вода втекает, задаются условия:

для меридиональных участков границы  $u = u^p$ ,  $v_x = 0$ ,

для зональных участков границы  $v = v^p$ ,  $u_y = 0$ ,

где  $u^p$ ,  $v^p$  – скорости в устьях рек.

Проблема задания краевых условий на открытой границе области для уравнений динамики жидкости является одной из центральных при создании численного алгоритма [8]. При моделировании течений в области моря с открытой границей не существует единого подхода к постановке краевых условий на боковых стенках. Рассмотрим для жидкой границы три типа условий:

– условия Дирихле (для каждого момента времени задаются компоненты скорости)  $u|_{\Gamma} = u^g, v|_{\Gamma} = v^g$ ;

– условия свободного протекания  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ ;

– условия смешанного типа для участков открытой границы: где вода втекает, задаются компоненты скорости; где вода вытекает, задаются условия свободного протекания.

**Конечно-разностные уравнения модели.** Рассматриваемая область с реальной топографией дна аппроксимируется боксами, центрам которых соответствуют значения индексов  $i = 1, \dots, 198; j = 1, \dots, 116; k = 1, \dots, 44$ , граням –  $i+1/2, j+1/2, k+1/2$ . Горизонтальные размеры боксов составляют  $h_x, h_y$ , по вертикали используется неравномерная аппроксимация  $h_z^k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, h_z^{k+1/2} = z_{k+1} - z_k$ . Горизонтальные составляющие скорости  $u, v$  рассчитываются на горизонтах  $z_k$ , вертикальная скорость  $w$  – на горизонтах  $z_{k+1/2}$ .

Уравнения для  $u, v$  аппроксимируются по времени схемой центральных разностей («*leap-frog*») с периодическим использованием схемы Матсуно.

Уравнения (1), (2) для горизонтальных компонент скорости, записанные для точек  $(i+1/2, j, k)$  и  $(i, j+1/2, k)$  соответственно, имеют вид [9]:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\phi} - [v^n, (o^z)^n + f] + \frac{\overline{w^n}^x (\partial_z u^n) h_z^k}{h_z^k} = -g\partial_x \mathcal{K}^{n+1} - \partial_x E^n + v_H (F^u)^{n-1} + \partial_z (v_V \partial_z u^{n-1}), \quad (5)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\phi} + [u^n, (o^z)^n + f] + \frac{\overline{w^n}^y (\partial_z v^n) h_z^k}{h_z^k} = -g\partial_y \mathcal{K}^{n+1} - \partial_y E^n + v_H (F^v)^{n-1} + \partial_z (v_V \partial_z v^{n-1}), \quad (6)$$

где  $o_{i+1/2, j+1/2, k}^z = \partial_x v_{i+1/2, j+1/2, k} - \partial_y u_{i+1/2, j+1/2, k}$ ,  $E_{i,j,k} = (u_{i,j,k}^2 + v_{i,j,k}^2) / 2$ .

Разностные операторы имеют следующий вид (аналогично для  $j, k$ ):

$$\overline{\varphi}_{i,j,k}^x = \frac{\varphi_{i+1/2,j,k} + \varphi_{i-1/2,j,k}}{2}, \quad \delta_x \varphi_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i+1/2,j,k} - \varphi_{i-1/2,j,k}}{h_x},$$

$$\partial_x^2 \varphi_{i,j,k} = \frac{\partial_x \varphi_{i+1/2,j,k} - \partial_x \varphi_{i-1/2,j,k}}{h_x}, \quad \nabla_{x,y}^2 \varphi_{i,j,k} = \partial_x^2 \varphi_{i,j,k} + \partial_y^2 \varphi_{i,j,k}.$$

Рассматриваемая область шельфа имеет открытую южную границу, которая совпадает с границей полосы, соответствующей по оси  $y$  индексам  $j=1, 2$  ( $i=1, \dots, 198$ ). Таким образом, численные расчеты начинаются с приграничной области ( $j=3$ ). Уравнение (3) для точек области  $(i, j, k)$  ( $j \neq 1, 2, 3$ ) за пределами открытой границы и приграничной области в конечно-разностном представлении записывается следующим образом:

$$\delta_x u + \delta_y v + \delta_z w = 0. \quad (7)$$

Проинтегрированное уравнение неразрывности (7) с учетом (4) имеет вид

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\tau} = - \sum_{k=1}^{K_{i,j}} \left( \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - u_{i-1/2,j,k}^{n+1}}{h_x} + \frac{v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - v_{i,j-1/2,k}^{n+1}}{h_y} \right) h_z^k, \quad (8)$$

где  $K_{i,j}$  – количество боксов по вертикали.

Для жидкой границы ( $j=1, 2$ ) перепишем краевые условия Дирихле в разностном виде:

$$u_{i+1/2,j,k} = u^g, \quad v_{i,j+1/2,k} = v^g, \quad (9)$$

граничные условия свободного протекания для скоростей запишем следующим образом:

$$u_{i+1/2,2,k} = u_{i+1/2,3,k}, \quad v_{i,2+1/2,k} = v_{i,3+1/2,k}. \quad (10)$$

В уравнениях движения аппроксимация нелинейных слагаемых имеет вид [9]:

$$[o, v] = - \overline{\overline{v_{i+1/2,j} o_{i+1/2,j}^{xy}}}^x + \frac{1}{12} [\delta_x (u_{i+1/2,j} \delta_y \overline{o_{i+1/2,j}^x}) - \frac{1}{24} (u_{i+1/2,j} \delta_x \delta_y \overline{o_{i+1/2,j}^x}) - (v_{i+1,j+1/2} \delta_y \overline{o_{i+1,j}^x} + v_{i,j-1/2} \delta_y \overline{o_{i,j}^x} + v_{i+1,j-1/2} \delta_x \overline{o_{i+1,j}^y} + v_{i,j+1/2} \delta_x \overline{o_{i,j}^y})], \quad (11a)$$

$$[o, u] = \overline{\overline{u_{i,j+1/2} o_{i,j+1/2}^{xy}}}^y + \frac{1}{12} [\delta_y (v_{i,j+1/2} \delta_x \overline{o_{i,j+1/2}^y}) - \frac{1}{24} (v_{i,j+1/2} \delta_x \delta_y \overline{o_{i,j+1/2}^y}) - (u_{i+1/2,j+1} \delta_x \overline{o_{i,j+1}^y} + u_{i-1/2,j} \delta_x \overline{o_{i,j}^y} + u_{i-1/2,j+1} \delta_y \overline{o_{i,j+1}^x} + u_{i+1/2,j} \delta_y \overline{o_{i,j}^x})]. \quad (11b)$$

В выражениях (11a), (11b) были проведены соответствующие преобразования, обеспечивающие учет задания скоростей на жидкой части границы.

Выражая  $u_{i+1/2,j,k}^{n+1}$ ,  $v_{i,j+1/2,k}^{n+1}$ ,  $u_{i-1/2,j,k}^{n+1}$ ,  $v_{i,j-1/2,k}^{n+1}$  через правые части уравнений (5), (6) и подставляя их в (8), запишем уравнение для расчета урванной поверхности [10]:

$$\frac{\mathcal{H}_{i,j}^{n+1} - \mathcal{H}_{i,j}^n}{\phi} = - \sum_{k=1}^{K_{i,j}} \left\{ \partial_x u_{i,j,k}^{n-1} + \partial_y v_{i,j,k}^{n-1} - 2\phi g (\partial_x^2 \mathcal{H}_{i,j}^{n+1} + \partial_y^2 \mathcal{H}_{i,j}^{n+1}) - 2\phi (\partial_x^2 E_{i,j,k}^n + \partial_y^2 E_{i,j,k}^n) + \right.$$

$$+ 2\phi \left[ \partial_x (F_{\text{вяз}}^u - F_{\text{нел}}^u)_{i,j,k}^n + \partial_y (F_{\text{вяз}}^v - F_{\text{нел}}^v)_{i,j,k}^n \right] h_z^k,$$

здесь  $F_{\text{вяз}}^u = v_H (F^u)^{n-1} + \partial_z (v_V \partial_z u^{n-1})$ ,  $F_{\text{вяз}}^v = v_H (F^v)^{n-1} + \partial_z (v_V \partial_z v^{n-1})$ ,

$$F_{\text{нел}}^u = [v^n, (\sigma^z)^n + f] + \frac{\overline{w^x (\partial_z u^n) h_z^k}}{h_z^k}, \quad F_{\text{нел}}^v = [u^n, (\sigma^z)^n + f] + \frac{\overline{w^y (\partial_z v^n) h_z^k}}{h_z^k}.$$

Перепишем это уравнение для расчета уровня в прилегающей к жидкой границе области (на открытой части боковых границ задаются условия Дирихле (9)):

$$\frac{\eta_{i3}^{n+1} - \eta_{i3}^n}{\phi} = - \sum_{k=1}^{K_{ij}} \left[ \partial_x u_{i,3,k}^{n-1} - 2\phi g \partial_x^2 \eta_{i3}^{n+1} - 2\phi \partial_x^2 E_{i,3,k}^n + 2\phi \partial_x (F_{\text{вяз}}^u - F_{\text{нел}}^u)_{i,3,k}^n + \frac{v_{i,3+1/2,k}^{n-1}}{h_y} - \frac{v_{i,3-1/2,k}^{n+1}}{h_y} - \frac{2\phi g \partial_y \eta_{i,3+1/2}^{n+1}}{h_y} - \frac{2\phi \partial_y E_{i,3+1/2,k}^n}{h_y} + \frac{2\phi (F_{\text{вяз}}^v - F_{\text{нел}}^v)_{i,3+1/2,k}^n}{h_y} \right] h_z^k, \quad (12)$$

где для значений составляющей скорости течений  $v_{i,3-1/2,k}^{n+1}$  используются интерполированные на выбранную сетку данные расчетов этой скорости с большим разрешением для каждого момента расчетного времени.

При задании на открытой границе условий свободного протекания (10) уравнение для расчета уровня в приграничной области принимает вид

$$\frac{\eta_{i3}^{n+1} - \eta_{i3}^n}{\phi} = - \sum_{k=1}^{K_{ij}} \left[ \partial_x u_{i,3,k}^{n-1} - 2\phi g \partial_x^2 \eta_{i3}^{n+1} - 2\phi \partial_x^2 E_{i,3,k}^n + 2\phi \partial_x (F_{\text{вяз}}^u - F_{\text{нел}}^u)_{i,3,k}^n \right] h_z^k. \quad (13)$$

В случае задания на жидкой границе условий смешанного типа предусматривается выбор уравнения для нахождения  $\eta_{i3}$  в зависимости от направления вектора скорости на открытой границе области ((12) или (13)).

Полученные уравнения для  $\eta$  решаются итерационным методом верхней блочной релаксации (релаксационный параметр выбран равным 1,7758). Точность итерационного процесса расчета уровня составляет  $1 \cdot 10^{-12}$  см.

**Параметры численной модели.** Для численного решения поставленной задачи рассматривалась область Черного моря, ограниченная  $45,5^\circ$  с.ш. и расположенная между  $29,5$  и  $33,5^\circ$  в.д., для которой максимальная глубина не превышает 50 м.

Численные эксперименты проводились с разрешением 1,66 км по оси  $x$ , 1,56 км по оси  $y$ . По вертикали горизонтальные составляющие скорости течений рассчитывались для 44 горизонтов: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 34; 35; 37; 39; 41; 43; 45; 47, 49 м. Вертикальная компонента скорости вычислялась для промежуточных горизонтов.

Для коэффициентов турбулентной вязкости по горизонтали и вертикали выбраны следующие значения:  $\nu_H = 5 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\nu_V = 5 \text{ см}^2/\text{с}$ . Шаг по времени в модели равен 2 мин.

На поверхности моря задаются поля климатического ветра, полученные в работе [11] и линейно проинтерполированные на выбранную сетку. Зимой синоптическая обстановка обуславливает преобладание северо-восточных ветров со средней месячной скоростью 5 – 6 м/с. Летом над всем морем преобладают северо-западные ветры. Их средняя скорость равна 3 – 4 м/с. Скорость ветра уменьшается в общем с запада на восток [12].

Влияние рек на циркуляцию учитывалось в модели в виде распределенных и точечных источников воды с заданными скоростями. При расчетах учитывался сток трех рек – Днепра, Днестра и Южного Буга. Для определения скорости в устьях рек использовались следующие значения расходов рек за год: 38,88 км<sup>3</sup> – Днепр, 7,65 км<sup>3</sup> – Днестр, 2,81 км<sup>3</sup> – Южный Буг.

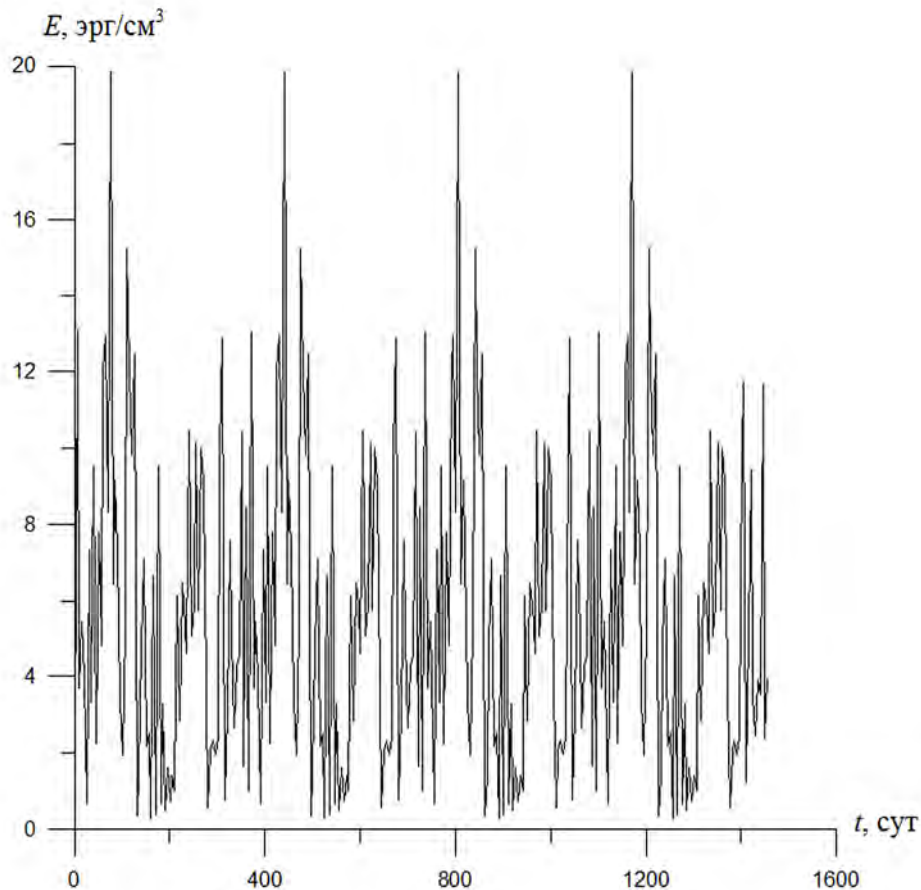
**Результаты численных экспериментов.** В эксперименте I (общее время интегрирования 5 лет) получены поля течений по баротропной модели для всего Черного моря с разрешением 5 км по осям  $x$  и  $y$  с учетом проливов и стока рек. По вертикали составляющие скорости течений в этом эксперименте рассчитывались для 45 горизонтов, для анализа использовались данные для 8 горизонтов: 2,5; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 40 м. Шаг по времени равнялся 5 мин. На поверхности моря задавались тангенциальные напряжения трения климатического ветра, взятые из работы [11]. Турбулентная вязкость по горизонтали выбрана в виде бигармонического оператора. Значения коэффициента горизонтального обмена импульсом изменялись от  $10^7 \text{ см}^4/\text{с}$  на верхних горизонтах до  $5 \cdot 10^7 \text{ см}^4/\text{с}$  в глубинных слоях.

Уравнения модели (1) – (4) интегрировались до времени достижения квазипериодического режима интегральной характеристики: средней по объему и по горизонтам кинетической энергии. Данные за 5-й год интегрирования для компонент горизонтальной скорости в области шельфа, примыкающей к жидкой границе, были линейно проинтерполированы на выбранную сетку высокого разрешения для каждого момента времени и использовались в качестве краевых условий на открытых боковых границах для задания скоростей.

Последующие три эксперимента проводились для района северо-западного шельфа. Они отличались заданием на открытой части боковых границ краевых условий: условий Дирихле (эксперимент II), свободного протекания (эксперимент III) и смешанного типа (эксперимент IV). В отличие от эксперимента I в расчетах учитывался уточненный рельеф дна.

Сравнивая графики изменения со временем кинетической энергии на различных горизонтах для трех экспериментов (II – IV), наблюдаем качественное соответствие на всех горизонтах.

На рис. 1 представлен график изменения со временем средней по объему кинетической энергии в течение 4 лет для эксперимента II.



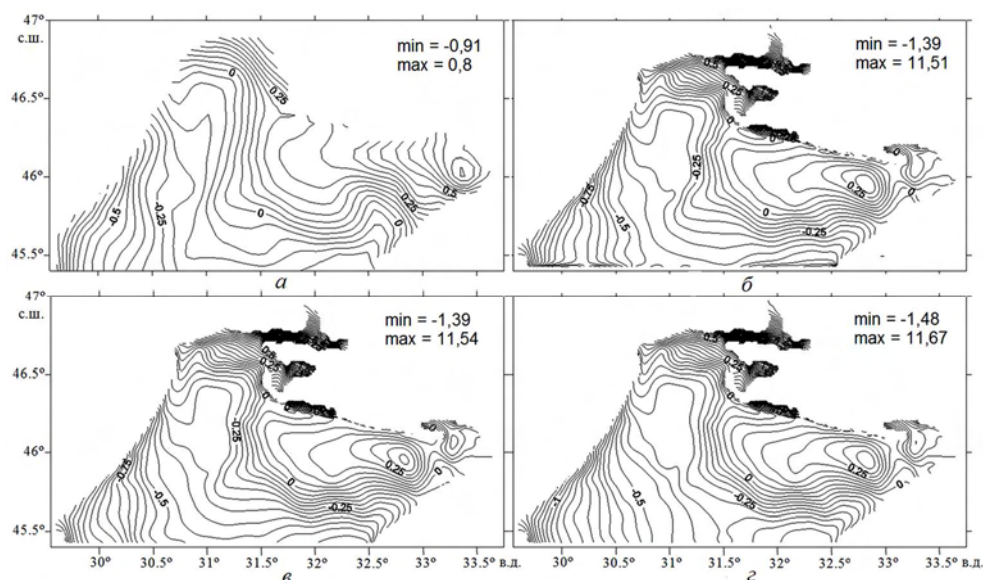
**Р и с. 1.** Изменение со временем средней по объему кинетической энергии

На этом графике выделяется сезонный ход. Максимум энергии приходится на зимний период, что объясняется наибольшей интенсивностью ветра, а минимум энергии достигается в весенний период, когда сила ветра ослабевает. Для экспериментов III и IV графики средней по объему кинетической энергии анализировались аналогично.

Сравним поля уровня, рассчитанные по модели Черного моря с шагом 5 км для области северо-западного шельфа, с результатами последующих трех экспериментов (II – IV). Существенное влияние на формирование поля уровня, как было отмечено в работе [1], оказывают рельеф дна и ветер.

Уровень моря претерпевает сезонные колебания. Максимальное повышение уровня достигается в мае (максимумы составляют 11,51; 11,54 и 11,67 см для экспериментов II, III и IV соответственно), а его понижение – в ноябре (максимальные отклонения составляют –4,69; –4,71 и –4,65 см для экспериментов II, III и IV соответственно). Анализируя поля уровня, представленные на рис. 2 и 3, отметим, что качественные различия в интегральной циркуляции между экспериментами незначительные. Основная особен-

ность, возникающая при задании условий Дирихле (эксперимент II), заключается в сгущении изолиний у открытой границы, что свидетельствует о формировании пограничного слоя. При задании на боковой границе скоростей на каждом шаге по времени не учитывается влияние динамики внутренней части области на открытую границу. Поэтому характеристики возмущения, перемещающегося через открытую границу, при задании условий Дирихле воспроизводятся с ошибками, которые и приводят к формированию фиктивного пограничного слоя в поле вертикальной скорости.



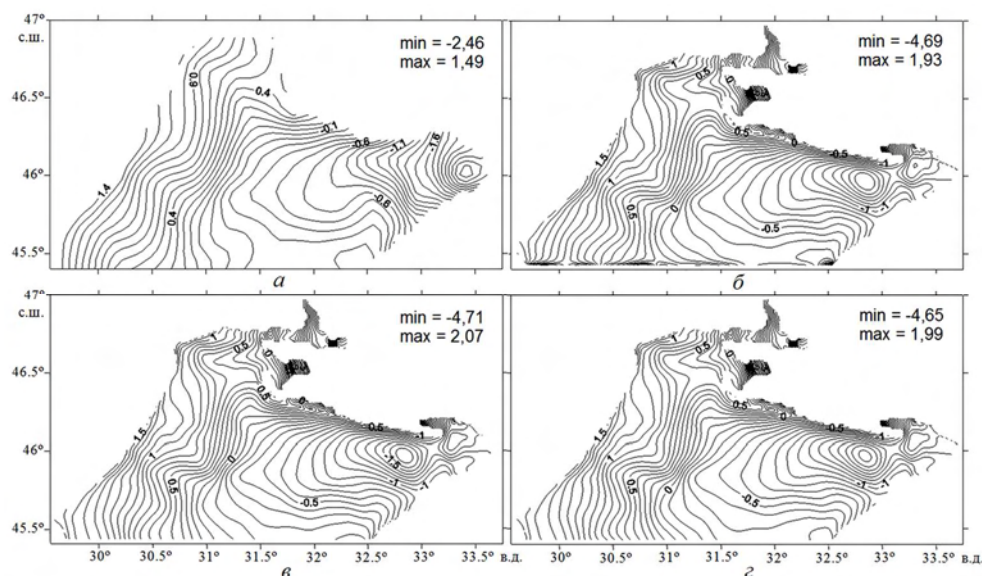
**Р и с. 2.** Поля уровня моря (см) для 19 мая: *a* – полученное в эксперименте I, *б* – в эксперименте II, *в* – в эксперименте III, *г* – в эксперименте IV

На рис. 2 представлены поля уровня для 19 мая, рассчитанные в четырех экспериментах. Максимумы отклонений свободной поверхности от невозмущенного уровня достигаются в Днепровском лимане, тогда как значения в области открытого моря не превышают 0,5 см. В это время ветер направлен с запада на восток, максимальное значение его скорости (4,39 м/с) достигается в мелководном районе. В результате действия ветра формируется нагон в районе Днепровского лимана.

На рис. 3 представлены поля уровня моря для 9 ноября, также рассчитанные в четырех экспериментах. Максимальные понижения уровня отмечаются в Ягорлыцком заливе, тогда как значения в центральной части области не превышают 0,5 см. 9 ноября ветер направлен с северо-востока на юго-запад, наибольшие значения его скорости ( $\approx 6$  м/с) достигаются у открытой границы. В результате действия этого ветра наблюдается сгон в Ягорлыцком заливе.

Сравним поля горизонтальной скорости течений, рассчитанные по модели Черного моря с шагом по пространственным переменным 5 км для северо-западного шельфа (эксперимент I), с результатами последующих трех экспериментов (II – IV).





**Р и с. 3.** Поля уровня моря (см) для 9 ноября: *а* – полученное в эксперименте I, *б* – в эксперименте II, *в* – в эксперименте III, *г* – в эксперименте IV

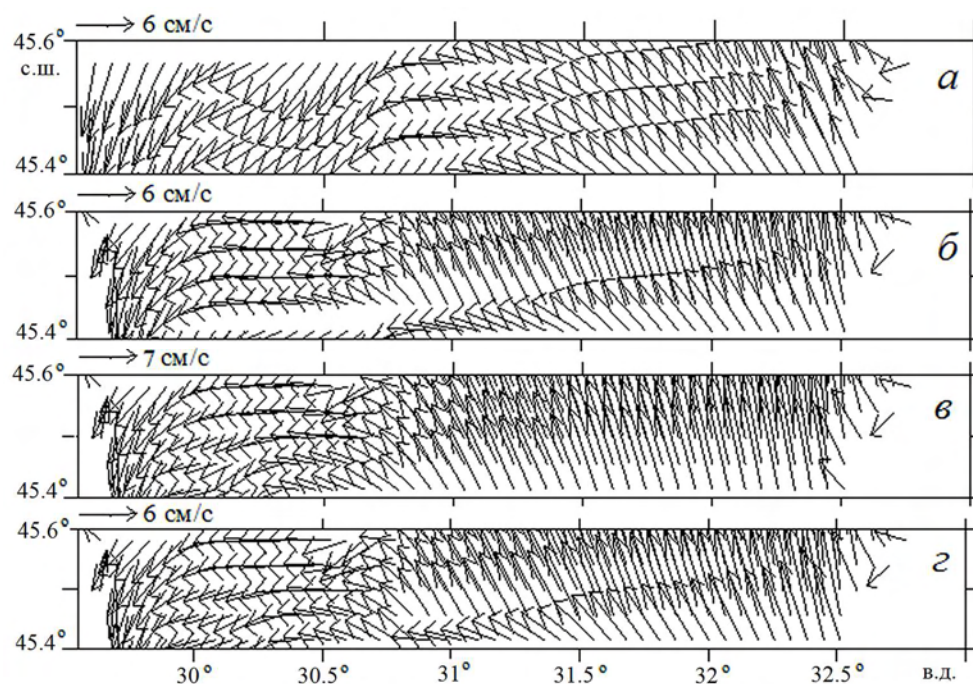
В течение года наблюдается качественное соответствие между полями течений, полученными для всего моря (эксперимент I), и результатами экспериментов (II – IV), выполненных для области шельфа.

В статье [13] были приведены результаты расчетов баротропных течений на шельфе с учетом и без учета действия климатического ветра на поверхности моря. На открытой части боковых границ для уравнений движения задавались условия Дирихле, учитывался сток рек. Было получено, что ветер оказывает преобладающее влияние на формирование климатической циркуляции в северо-западной части Черного моря. Анализ результатов, полученных в экспериментах I – IV, показал, что в поверхностных слоях течения определяются также и стоком рек. Течения наиболее интенсивны в январе – марте, их скорость в это время на верхнем горизонте достигает 34 см/с (при максимальной скорости ветра 6,2 м/с).

Приведем краткое описание поверхностных течений, полученных для каждого месяца. Отчетливо воспроизводятся зимний и летний типы циркуляции на шельфе, отмеченные в работах [2 – 4]. Для декабря характерно вытекание воды через открытую границу, течения направлены с севера на юг, максимальные значения скорости (30 см/с) достигаются в районе Тендровской Косы. Для января – марта отмечается также вытекание воды через жидкую границу, но течения направлены с северо-востока на юго-запад, максимумы скоростей 20 – 34 см/с наблюдаются также в районе Тендровской Косы. В апреле рассматриваемую область можно условно разделить на две зоны: в западной – происходит вытекание, в восточной – втекание воды через жидкую границу, скорость течений не более 10 см/с, за исключением максимальных значений 30 см/с у восточного берега открытой границы и в районе Днепровского лимана. В мае направление течений – северо-западное, максимумы ско-

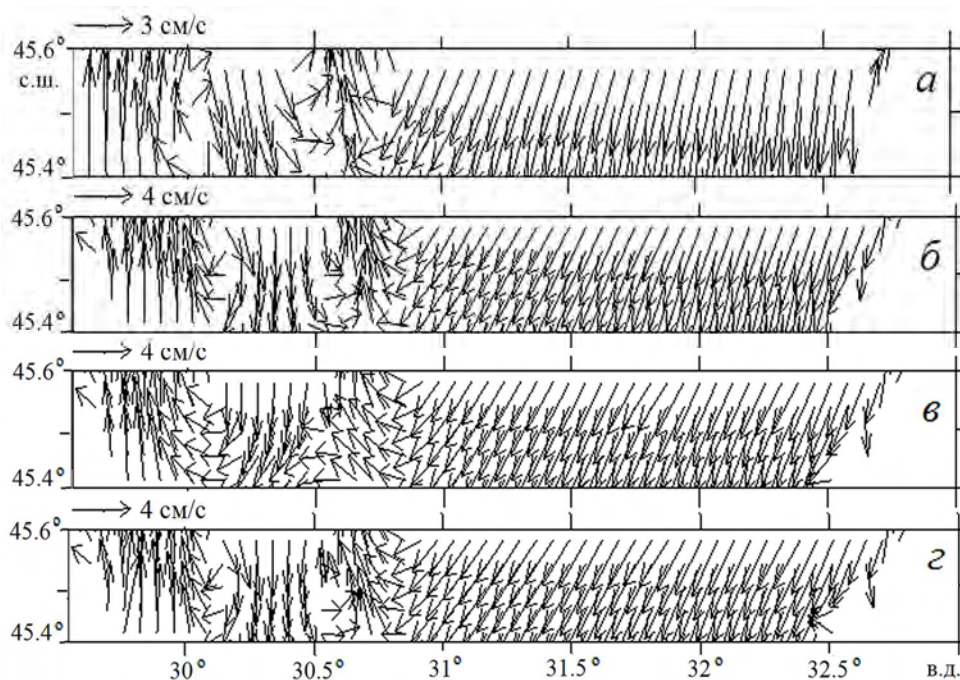
ростей течений (24 см/с) достигаются в районе Днепровского лимана. В июне область также условно делится на две зоны: в западной – происходит втеkanie, в восточной – вытекание воды через жидкую границу, скорость течений составляет не более 8 см/с, за исключением максимальных значений 17 см/с в районе Днепровского лимана (картина течений хорошо согласуется с результатами статьи [2]). В летние месяцы, как отмечено в работе [4], циркуляция становится антициклонической. В июле – августе, октябре – ноябре характерно вытекание воды через жидкую границу, движение воды направлено с северо-востока на юго-запад, максимальные значения скоростей течений для летних месяцев равняются 30 см/с, а для осенних – 17 см/с (в районе Тендровской Косы). В сентябре на шельф поступают потоки воды у западного берега и вытекают через всю открытую границу со скоростью 8 – 10 см/с, максимальные значения составляют 17 см/с вдоль Тендровской Косы.

Рассмотрим полосу области, включающую открытую границу, чтобы оценить влияние условий на открытой границе на формирование течений. В качестве иллюстраций приведем результаты для января и марта (рис. 4, 5). На горизонте 3 м для зимних месяцев характерно втекание воды в область через восточную часть ее открытой границы и вытекание через западную часть. Скорости течений у открытой границы составляют 5 – 7 см/с.



**Р и с. 4.** Поля течений на глубине 3 м для 4 января: *а* – полученное в эксперименте I, *б* – в эксперименте II, *в* – в эксперименте III, *г* – в эксперименте IV

На горизонте 5 м в весенние месяцы поток воды интенсивно вытекает через жидкую границу, продолжая поступать только в юго-западной части области. Средняя скорость течений 3 – 4 см/с.



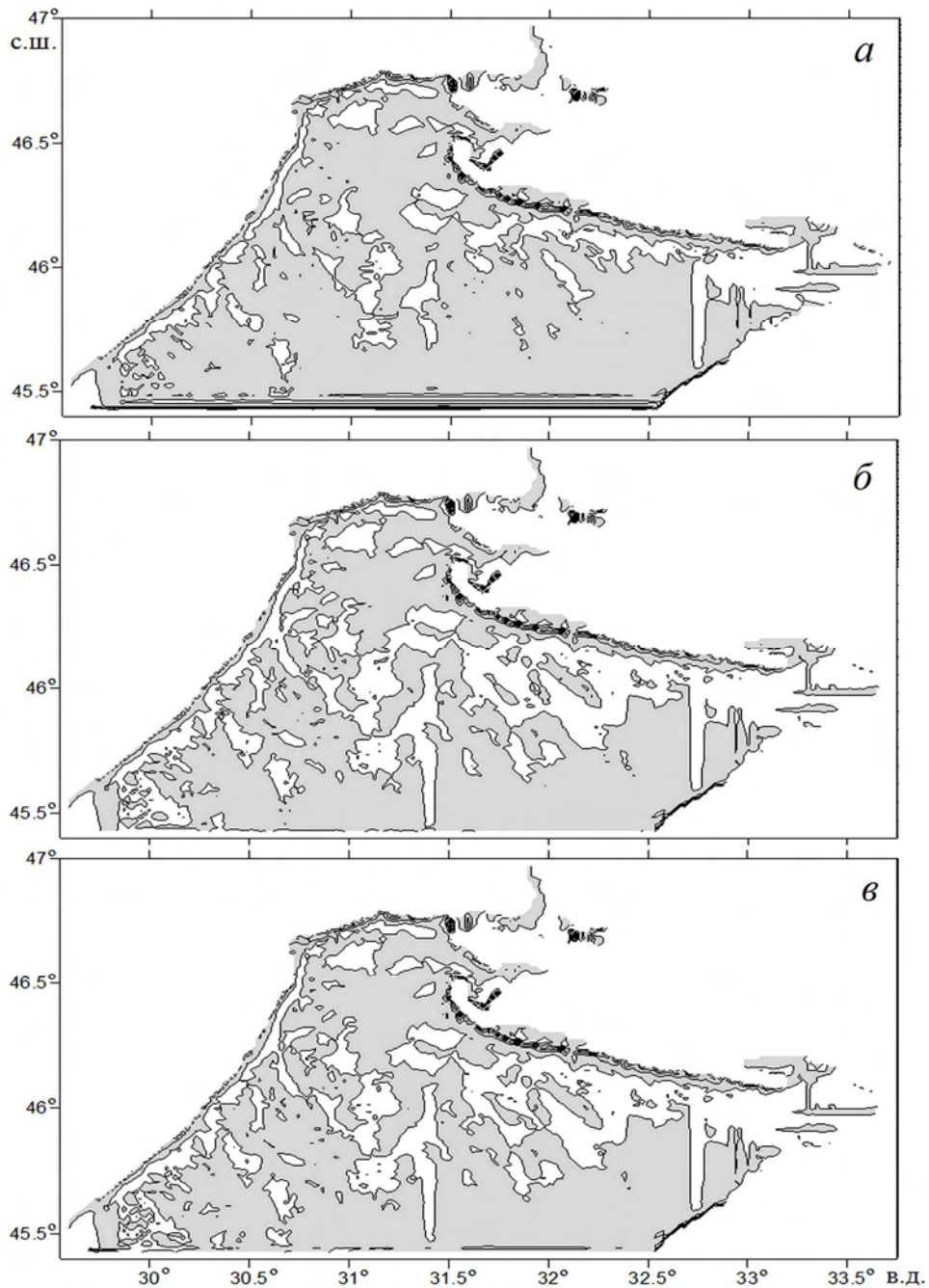
**Р и с. 5.** Поля течений на глубине 5 м для 31 марта: *a* – полученное в эксперименте I, *б* – в эксперименте II, *в* – в эксперименте III, *г* – в эксперименте IV

Из анализа рис. 4 и 5 следует, что влияние условий на открытой границе на формирование течений существенно. Наблюдаем качественное и количественное соответствия между полями течений, представленными на рис. 4, *a* и 4, *б*, 5, *a* и 5, *б*; следовательно, задание на жидкой границе условий Дирихле позволяет более точно воспроизвести течения в приграничной области.

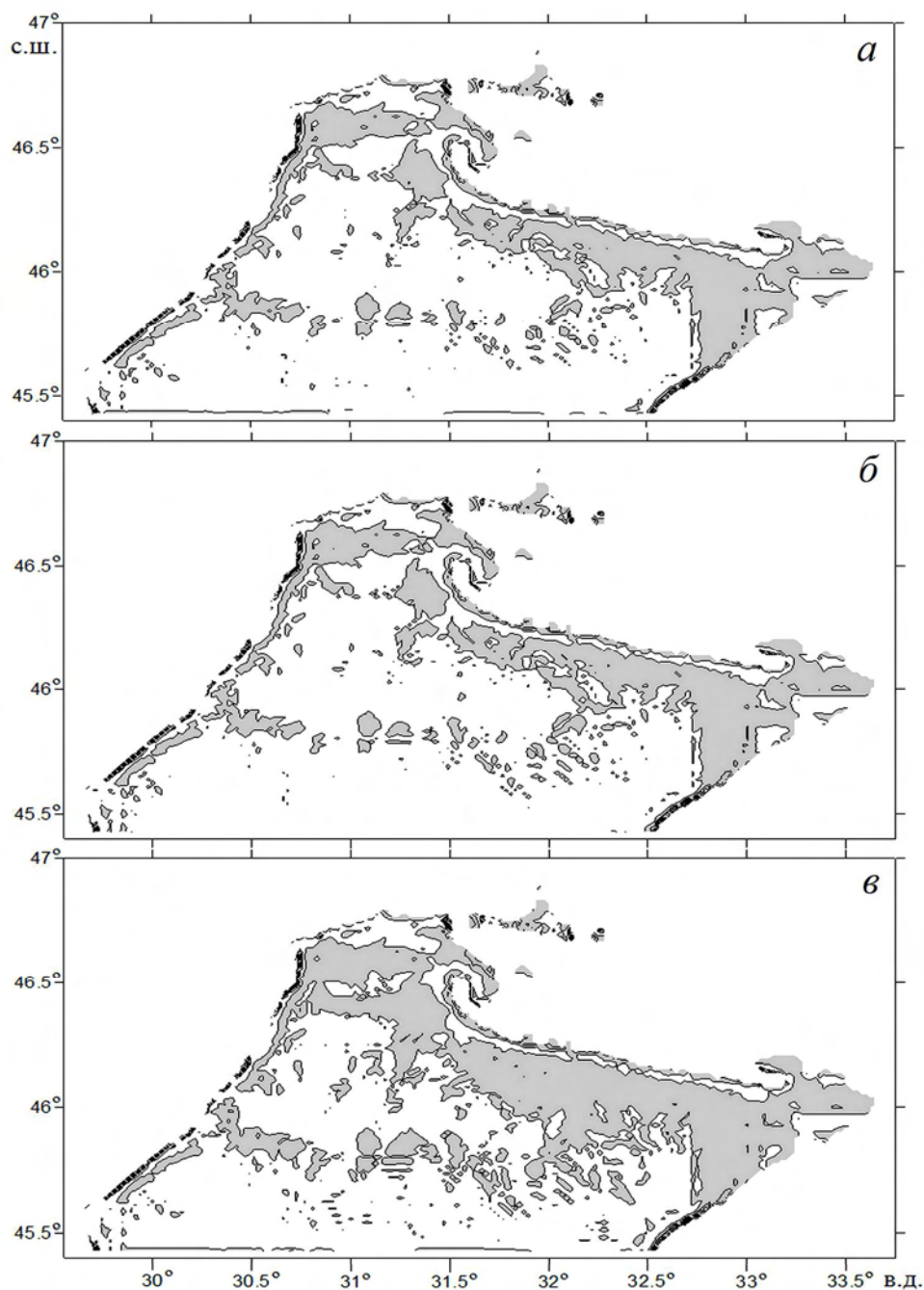
При задании условий свободного протекания распределение течений полностью определяется процессами, происходящими внутри области.

Сравнивая рис. 4, *a* и 4, *в*, отметим для эксперимента III увеличение скорости втекающей в область воды и несовпадение направлений векторов скорости течений в западной части области у жидкой границы. Отличия в полях течений, представленных на рис. 5, *a* и 5, *в*, наблюдаются в районе между 30 и 31° в.д. Важно отметить сходство полей течений, показанных на рис. 5, *б* и 5, *г*.

Особый интерес представляет анализ полей вертикальной скорости течений, полученных в трех экспериментах (II – IV). На рис. 6 представлены поля вертикальной скорости на глубине 0,75 м для декабря. Проанализировав их, отметим, что подъем вод происходит практически по всей области. У открытой границы, вдоль Тендровской Косы, на севере области во всех трех экспериментах наблюдается опускание вод, что соответствует прогнозируемому изменению поля уровня моря. В случае задания условий Дирихле на жидкой границе образуется пограничный слой. Подчеркнем, что его ширина не увеличивается на протяжении всего периода интегрирования. В случае применения условий свободного протекания пограничный слой около открытой границы отсутствует. Отметим, что в эксперименте IV пограничный слой сформировался в тех частях области, где использовались условия Дирихле.



**Р и с. 6.** Поля вертикальной скорости течений (см/с) на глубине 0,75 м для 15 декабря: *а* – полученное в эксперименте II, *б* – в эксперименте III, *в* – в эксперименте IV (черным цветом обозначены области опускания вод, серым – подъема вод, белым – области с  $w = 0$ )



**Р и с. 7.** Поля вертикальной скорости течений (см/с) на глубине 2,75 м для 15 мая: *a* – полученное в эксперименте II, *б* – в эксперименте III, *в* – в эксперименте IV (черным цветом обозначены области опускания вод, серым – подъема вод, белым – области с  $w = 0$ )

Максимальные положительные значения вертикальной скорости отмечаются в Тендровском заливе и составляют 0,005 см/с, а максимальные отрицательные – 0,007 см/с (достигаются также в Тендровском заливе).

Ширина погранслоя, образующегося при задании условий Дирихле, меняется в течение года: так, например, в мае он практически отсутствует.

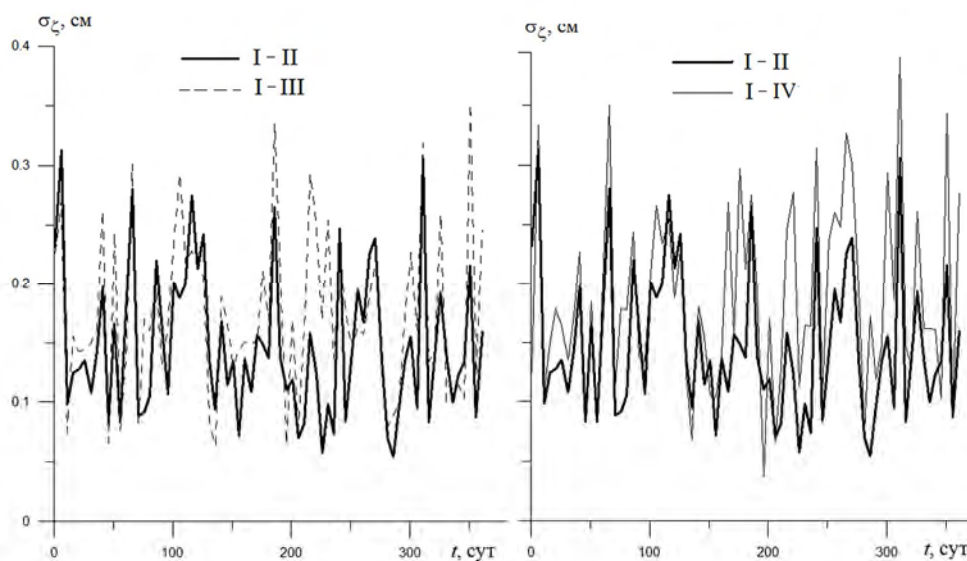
На рис. 7 представлены поля вертикальной скорости течений на глубине 2,75 м для мая для трех экспериментов.

Отметим формирование во всей области (за исключением западной границы области и восточной части у открытой границы) зон подъема вод, что связано с поступлением потоков воды через жидкую границу. Максимальные положительные значения вертикальной скорости отмечаются в районе Днепровского лимана и составляют 0,005 см/с, а максимальные отрицательные – 0,008 см/с (достигаются в восточной части жидкой границы).

На рис. 8 представлены графики среднеквадратических разностей между значениями уровня, полученными в эксперименте I по модели Черного моря с шагом 5 км, и результатами экспериментов II – IV за 4-й год интегрирования уравнений движения. Для расчетов была выбрана полоса, включающая открытую границу. Расчетная формула имеет вид:

$$y_{ж} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i,j} (\mathcal{H}_{ij}^A - \mathcal{H}_{ij}^B)^2 \right]^{1/2},$$

где  $\mathcal{H}^A$  – значения уровня для выбранной области, полученные по модели Черного моря с шагом по пространственным переменным 5 км;  $\mathcal{H}^B$  – значения уровня для рассматриваемой области, рассчитанные по модели с шагом по осям  $x$  и  $y$  ~1,6 км с одним из трех типов краевых условий на открытой границе;  $N$  – количество точек, попавших в заданную область.



**Р и с. 8.** Поведение со временем среднеквадратических разностей (I – II, I – III, I – IV) между значениями уровня моря в приграничной области, полученными по модели Черного моря с шагом 5 км (эксперимент I), и значениями, рассчитанными по модели с граничными условиями: Дирихле (эксперимент II), свободного протекания (эксперимент III), смешанного типа (эксперимент IV)

Из анализа показанных на рис. 8 графиков видно, что ближе всего к результатам расчетов по модели с шагом 5 км находятся значения, рассчитанные по модели с шагом ~1,6 км с граничными условиями Дирихле (кривая I – II). Наибольшие расхождения в значениях при использовании условий свободного протекания (кривая I – III) отмечаются для летних месяцев и ноября, при использовании условий смешанного типа (кривая I – IV) – для января, летних месяцев и октября (первые расчетные сутки соответствуют 15 ноября).

**Заключение.** На основе численной гидродинамической модели с высоким разрешением по пространству построены поля течений, возникающих под действием климатического ветра на северо-западном шельфе Черного моря. Поля уровня и течений, рассчитанные в ходе длительного эксперимента (интегрирование для 4 лет), согласуются с полученными ранее результатами. Описанная модель позволяет детально анализировать течения в мелководных заливах, лиманах и глубинных слоях за счет мелкого шага сетки и уточненного рельефа дна. Подтверждено, что преобладающее влияние на формирование климатической циркуляции в северо-западной части Черного моря оказывает ветер на поверхности моря.

Горизонтальные течения в приграничной области воспроизводятся более точно при задании на жидкой границе условий Дирихле, но недостатком применения этих условий является формирование пограничного слоя в поле вертикальной скорости. Его интенсивность, по сравнению с результатами двух других расчетов, наибольшая. Поэтому использование условий Дирихле может приводить к неадекватному описанию переноса по вертикали вблизи жидких границ.

Применение условий свободного протекания позволяет избежать формирования интенсивного пограничного слоя, но приводит к большим ошибкам в значениях уровня и скорости течений вблизи открытой границы области.

Более корректными с точки зрения описания движений вблизи открытой границы являются условия смешанного типа (эксперимент IV). Их применение позволяет уменьшить ошибку при моделировании течений около жидкой границы по сравнению с экспериментом III. Кроме того, при этих условиях в поле вертикальной скорости возникает менее интенсивный пограничный слой в сопоставлении с результатами эксперимента II.

Важно отметить, что во всех экспериментах в течение длительного времени (порядка 4 лет) ширина и интенсивность пограничного слоя не увеличиваются, что свидетельствует о корректности конечно-разностных аппроксимаций уравнений модели, в которых учитывается открытая граница.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андросович А.И., Михайлова Э.Н., Шапиро Н.Б. Численная модель и расчет циркуляции вод северо-западной части Черного моря // Морской гидрофизический журнал. – 1994. – № 5. – С. 28 – 42.
2. Алаев В.Г., Рябцев Ю.Н., Шапиро Н.Б. Адаптационный расчет скорости течений на шельфе с помощью квазиизопикнической модели // Там же. – 1999. – № 4. – С. 64 – 79.
3. Алаев В.Г. Исследование сезонной изменчивости гидродинамических полей в северо-западной части Черного моря на основе изопикнической модели // Там же. – 2000. – № 6. – С. 5 – 17.
4. Иванов В.А., Рябцев Ю.Н. Анализ течений на северо-западном шельфе Черного моря // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2002. – Вып. 1(16). – С. 8 – 21.

5. *Иванов В.А., Михайлова Э.Н., Шапиро Н.Б.* Моделирование ветровых апвеллингов на северо-западном шельфе Черного моря в окрестностях локальных особенностей рельефа дна // Морской гидрофизический журнал. – 2008. – № 3. – С. 68 – 79.
6. *Тучковенко Ю.С.* Математическая модель формирования термохалинной структуры и циркуляции вод в лиманах, приустьевых и шельфовых областях северо-западной части Черного моря // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2003. – Вып. 9. – С. 138 – 154.
7. *Демьшев С.Г., Коротаев Г.К.* Численная энергосбалансированная модель бароклинных течений океана на сетке  $C$  // Численные модели и результаты калибровочных расчетов течений в Атлантическом океане. – М.: ИВМ РАН, 1992. – С. 163 – 231.
8. *Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И.* Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. – Новосибирск: Наука, 1991. – 176 с.
9. *Демьшев С.Г.* Численные эксперименты по сопоставлению двух конечно-разностных схем для уравнений движения в дискретной модели гидродинамики Черного моря // Морской гидрофизический журнал. – 2005. – № 5. – С. 47 – 59.
10. *Яковлев Н.Г.* Численная модель и предварительные результаты расчетов по воспроизведению летней циркуляции вод Карского моря // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 1996. – 32, № 5. – С. 714 – 723.
11. *Дорофеев В.Л., Коротаев Г.К.* Ассимиляция данных спутниковой альтиметрии в вихререзающей модели циркуляции Черного моря // Морской гидрофизический журнал. – 2004. – № 1. – С. 52 – 68.
12. *Добровольский А.Д., Залогин Б.С.* Моря СССР. – Москва: Изд-во МГУ, 1982. – 192 с.
13. *Демьшев С.Г., Евстигнеева Н.А.* Численный анализ влияния краевых условий на формирование течений в северо-западной части Черного моря // Системы контроля окружающей среды. – 2009. – С. 189 – 191.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь  
E-mail: naevstigneeva@yandex.ru

Материал поступил  
в редакцию 20.08.10  
После доработки 07.12.10

**АНОТАЦІЯ** Приводиться опис тривимірної нелінійної моделі Чорного моря, адаптованої для розрахунку баротропних течій на шельфі. Розглядаються особливості кінцево-різницьких рівнянь, виникаючі при врахуванні рідких границь. Як приклад розв'язується задача моделювання течій, які формуються під дією кліматичного вітру на північно-західному шельфі Чорного моря.

Аналізуються результати трьох експериментів, в яких на відкритій частині бічних границь для рівнянь руху задаються відповідно умови Діріхле, вільного протікання і змішаного типу. Показано, що використання умов Діріхле може призводити до неадекватного вертикального перенесення поблизу рідких границь. При завданні умов вільного протікання виникають великі помилки в полях рівня і швидкості течій в прикордонній області. Умови змішаного типу дозволяють зменшити помилку в розрахункових полях і більш коректно описати перенесення по вертикалі.

**Ключові слова:** чисельне моделювання, баротропні течії, висока просторова роздільна здатність, північно-західний шельф, відкрита рідка границя.

**ABSTRACT** Description of a three-dimensional nonlinear model of the Black Sea adapted for calculating barotropic currents on shelf is represented. The features of finite-difference equations arising at taking into account liquid boundaries are considered. The problem of modeling the currents formed under the influence of climatic wind on the Black Sea northwestern shelf is solved as an example.

Analyzed are the results of three experiments in which Dirichlet, free flowing and mixed type conditions are imposed on the open part of lateral boundaries of the motion equations. It is shown that application of Dirichlet conditions can result in inadequate vertical transfer near-by liquid boundaries. When the free flowing conditions are preset significant errors occur in the level and current velocity fields in a border-line area. The mixed type conditions permit to decrease the error in the calculated fields and to describe vertical transfer more correctly.

**Keywords:** numerical modeling, barotropic currents, high spatial resolution, northwestern shelf, open liquid boundary.