

Ант.А. Букатов, О.М. Букатова

## Влияние ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости под ледяным покровом в бегущей периодической изгибно-гравитационной волне конечной амплитуды

Методом многих масштабов с точностью до величин третьего порядка малости получены асимптотические разложения, определяющие составляющие скорости движения жидкости под плавающим ледяным покровом при распространении периодической поверхностной изгибно-гравитационной волны конечной амплитуды в условиях ледового сжатия. Рассмотрена зависимость распределений составляющих скорости вдоль профиля волны от величины сжимающего усилия и характеристик начальной гармоники. Показано, что с увеличением сжимающего усилия происходит уменьшение амплитудных значений составляющих скорости и отставание фазы колебаний.

**Ключевые слова:** волны конечной амплитуды, изгибно-гравитационные волны, движение жидких частиц.

**Введение.** Исследование скорости стокова дрейфа [1] в направлении распространения волн конечной амплитуды при отсутствии льда выполнено в работах [2 – 6]. Влияние плавающего битого льда на скорость движения жидкости в бегущей периодической нелинейной волне рассмотрено в статье [7]. В случае сплошного упругого ледяного покрова анализ зависимости распределения составляющих скорости движения жидких частиц вдоль профиля нелинейной волны от толщины и модуля упругости льда проведен в [8]. Настоящая работа посвящена исследованию влияния ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости под плавающим ледяным покровом при распространении поверхностной периодической изгибно-гравитационной волны конечной амплитуды.

**Постановка задачи.** Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины  $H$  плавает сплошной упругий ледяной покров. Рассмотрим влияние ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости подо льдом при распространении периодической изгибно-гравитационной волны конечной амплитуды. Моделируя ледяной покров тонкой упругой продольно сжатой пластинкой [9, 10] и считая движение жидкости потенциальным, а колебания пластинки неотрывными, в безразмерных переменных  $x = kx_1$ ,  $z = kz_1$ ,  $t = \sqrt{kg}t$  получим для определения потенциала  $\varphi(x, z, t)$  уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности лед – вода ( $z = \zeta$ )

© Ант.А. Букатов, О.М. Букатова, 2011

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = P, \quad (2)$$

$$P = D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]$$

и на дне ( $z = -H$ ) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ )

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \kappa = h \frac{\rho_1}{\rho},$$

$E, h, \rho_1, \nu$  – модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона льда;  $Q$  – усилие сжатия;  $\zeta(x, t)$  – прогиб льда или возвышение поверхности лед – вода;  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести,  $k$  – волновое число. Потенциал скорости и прогиб льда связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = \zeta. \quad (5)$$

В динамическом условии (2) выражение с множителем  $\kappa$  представляет собой инерцию вертикальных смещений льда. Причем первое слагаемое обусловлено нелинейностью смещений.

**Выражения для составляющих скорости движения жидкости.** Решение задачи (1) – (5), аналогично работе [11], найдем методом многомасштабных асимптотических разложений [12] для случая периодической волны конечной амплитуды, бегущей в отрицательном направлении оси  $x$ . В результате получим выражение

$$\varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_n \sin \theta,$$

определяющее потенциал скорости с точностью до величин третьего порядка малости.

Здесь

$$\theta = x + \sigma t, \quad \sigma = \tau (1 + \varepsilon^2 \sigma_0), \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} [l_3 - l_4 (\kappa k + \text{cth} H)^{-1}],$$

$$b_1 = \frac{\tau \operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh}H}, \quad b_2 = \frac{\tau v_2 \operatorname{ch}2(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch}2H \operatorname{th}H}, \quad b_3 = \frac{\tau v_3 \operatorname{ch}3(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch}3H},$$

$$\tau^2 = (1 - Q_1 k^2 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \operatorname{th}H)^{-1} \operatorname{th}H,$$

$$v_2 = \tau^2 (5 \operatorname{th}H - \operatorname{cth}H + 2\kappa k) - 2(1 - 4Q_1 k^2 + 16D_1 k^4),$$

$$\mu_2 = (1 - 4Q_1 k^2 + 16D_1 k^4) \operatorname{th}2H - 2\tau^2 (1 + 2\kappa k \operatorname{th}H),$$

$$v_3 = 3\tau^2 l_1 - l_2 (1 - 9Q_1 k^2 + 81D_1 k^4),$$

$$\mu_3 = (1 - 9Q_1 k^2 + 81k^4) \operatorname{th}3H - 3\tau^2 (1 + 3\kappa k \operatorname{th}3H),$$

$$l_1 = \kappa k l_{11} + l_{12}, \quad l_2 = \frac{1}{2} a_2 (3 \operatorname{cth}H + 6 \operatorname{cth}2H) - \frac{3}{2} \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H + \frac{5}{8},$$

$$l_{11} = a_2 \left( 5 \operatorname{cth}2H - \frac{1}{2} \operatorname{cth}H \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{cth}H - 5 \operatorname{cth}2H) \operatorname{cth}H - \frac{1}{8},$$

$$l_{12} = a_2 \left( \frac{11}{2} - \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H \right) + \left( \frac{1}{2} \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H - \frac{15}{8} \right) \operatorname{cth}H,$$

$$l_3 = \frac{1}{2} a_2 (\operatorname{cth}H + 2 \operatorname{cth}2H) - \frac{1}{2} \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H - \frac{3}{8},$$

$$l_4 = \kappa k l_{41} - l_{42}, \quad l_{41} = a_2 \left( \operatorname{cth}2H - \frac{5}{2} \operatorname{cth}H \right) + \frac{1}{2} (\operatorname{cth}H - \operatorname{cth}2H) \operatorname{cth}H - \frac{3}{8},$$

$$l_{42} = a_2 \left( \frac{1}{2} + \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H \right) - \frac{1}{2} \left( \operatorname{cth}H \operatorname{cth}2H - \frac{5}{4} \right) \operatorname{cth}H,$$

$$a_2 = 3\tau^2 (\operatorname{th}H - \operatorname{cth}H - 2\kappa k) \operatorname{th}2H / (4\mu_2 \operatorname{th}H).$$

В размерных переменных ( $\varphi = \varphi \sqrt{g/k^3}$ ,  $\varepsilon = ak$ ,  $a$  – амплитуда начальной гармоники) имеем

$$\varphi = a \sqrt{g/k} b_1 \sin \theta + a^2 \sqrt{kg} b_2 \sin 2\theta + a^3 k \sqrt{kg} b_3 \sin 3\theta,$$

где

$$\theta = kx + \sigma_1 (1 + \sigma^0) t, \quad \sigma^0 = a^2 k^2 \sigma_0, \quad \sigma_1 = \tau \sqrt{kg},$$

$$\tau^2 = (1 - Q_1 k^2 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \operatorname{th}kH)^{-1} \operatorname{th}kH,$$

$$b_1 = \frac{\tau \operatorname{ch}k(z+H)}{\operatorname{sh}kH}, \quad b_2 = \frac{\tau v_2 \operatorname{ch}2k(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch}2kH \operatorname{th}kH}, \quad b_3 = \frac{\tau v_3 \operatorname{ch}3k(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch}3kH},$$

а в выражениях для  $\sigma_0, \nu_{2,3}, \mu_{2,3}$  аргумент гиперболических функций заменяется на  $kH$ . Отсюда для горизонтальной  $\left(u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$  и вертикальной  $\left(w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$  составляющих скорости движения жидкости найдем выражения

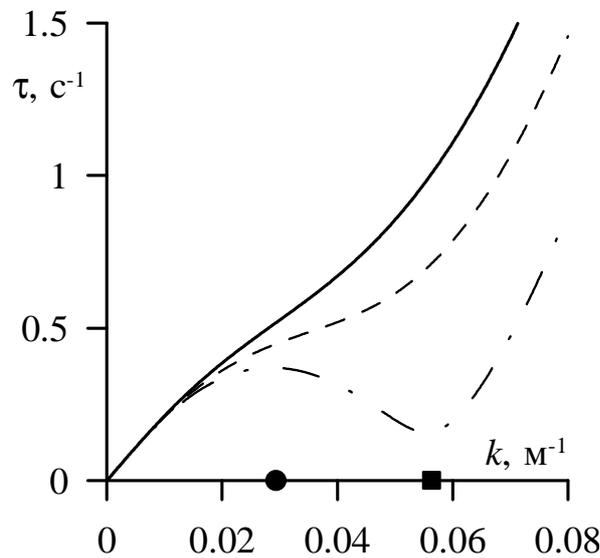
$$u = a\sqrt{kg} \left( b_1 \cos \theta + 2akb_2 \cos 2\theta + 3a^2k^2b_3 \cos 3\theta \right),$$

$$w = a\sqrt{kg} \left( b_{11} \sin \theta + 2akb_{21} \sin 2\theta + 3a^2k^2b_{31} \sin 3\theta \right),$$

$$b_{11} = \frac{\tau \operatorname{sh}k(z+H)}{\operatorname{sh}kH}, \quad b_{21} = \frac{\tau \nu_2 \operatorname{sh}2k(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch}2kH \operatorname{th}kH}, \quad b_{31} = \frac{\tau \nu_3 \operatorname{sh}3k(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch}3kH}.$$

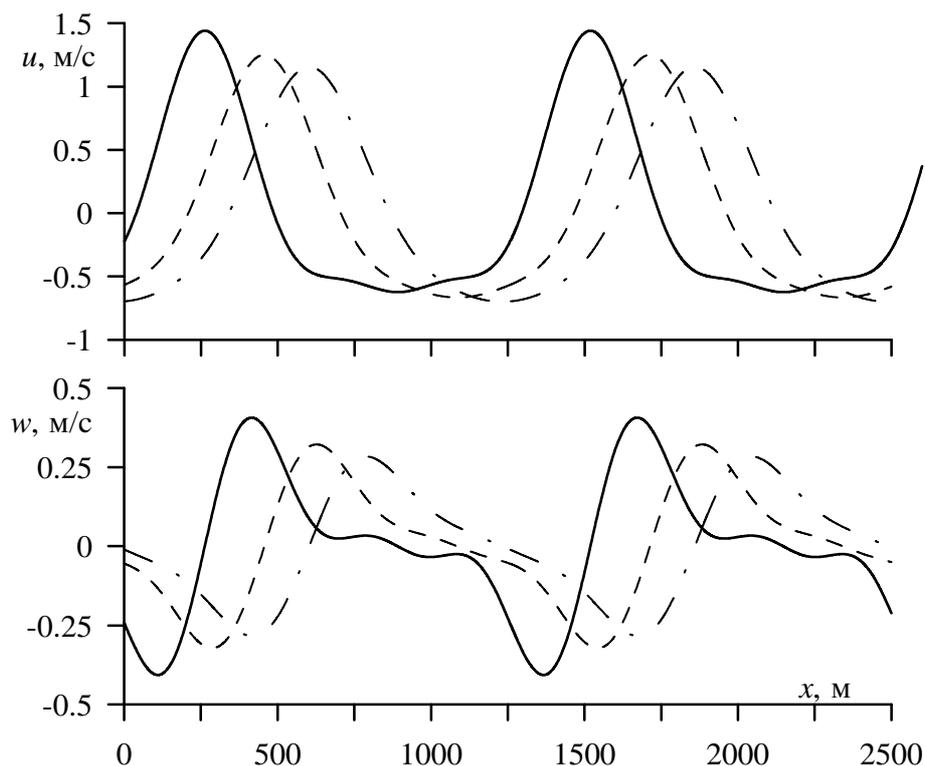
Полученное решение справедливо вне малых окрестностей значений волнового числа, являющихся корнями уравнений  $\mu_2 = 0, \mu_3 = 0$ .

**Анализ влияния сжимающего усилия на составляющие скорости движения жидкости.** Для количественной оценки влияния ледового сжатия на величины составляющих скорости и их распределения вдоль профиля нелинейной волны проводились численные расчеты при условии  $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ , необходимом для устойчивости плавающей ледяной пластинки [9, 10], и значениях  $\rho_1/\rho = 0,87, \nu = 0,34, 0 < h \leq 2$  м. Модуль нормальной упругости льда  $E$  принимался равным  $3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>. Волновое число при этом выбиралось соответствующим гравитационному ( $k < k_1$ ), обусловленному сжатием ( $k_1 < k < k_2$ ) и изгибному ( $k > k_2$ ) участкам дисперсионных кривых начальной гармоники [10], представленных на рис. 1 для  $H = 50$  м,  $h = 1,5$  м. Сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиям соответствуют значения  $Q_1$ , равные 0;  $\sqrt{D_1}$ ;  $1,95\sqrt{D_1}$ . Кружком и квадратом на оси  $k$  отмечены значения  $k_1$  и  $k_2$ .



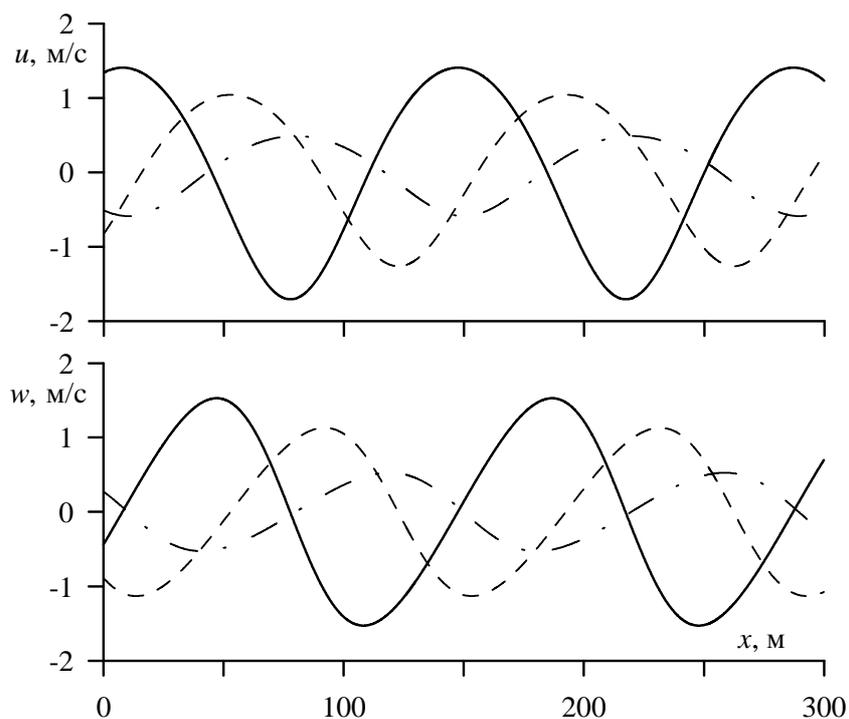
Р и с. 1. Дисперсионные кривые начальной линейной гармоники

Анализ результатов численных расчетов показал, что при фиксированных значениях волнового числа  $k$  увеличение сжимающего усилия приводит к уменьшению амплитудных значений составляющих скорости и отставанию фазы колебания. Это иллюстрируют представленные на рис. 2, 3, 4 распределения горизонтальной  $u$  и вертикальной  $w$  составляющих скорости вдоль профиля волны. Зависимости  $u(x)$  и  $w(x)$  на рис. 2, 3 даны при  $a = 2$  м для  $t = 1120$  с,  $k = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  (рис. 2) и  $t = 300$  с,  $k = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$  (рис. 3), а на рис. 4 – при  $a = 1$  м,  $t = 385$  с,  $k = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ . Значения  $H$  и  $h$  полагались здесь теми же, что и для рис. 1. Отметим, что заданные значения  $k$  для рис. 2, 3, 4 удовлетворяют неравенствам  $k < k_1$ ,  $k_1 < k < k_2$ ,  $k > k_2$  соответственно. Обозначения кривых на рис. 2, 3, 4 соответствуют обозначениям на рис. 1.

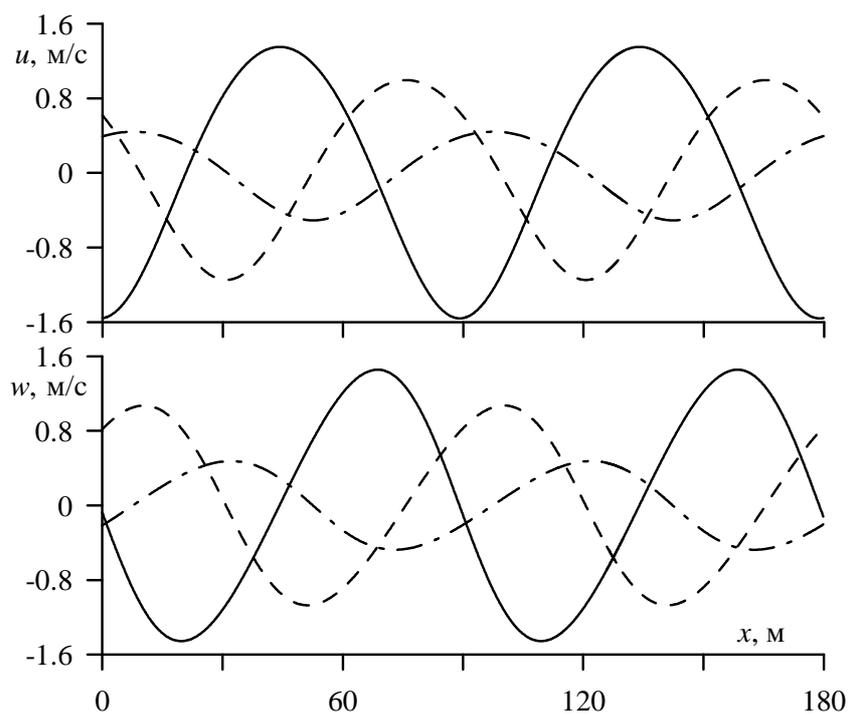


**Р и с. 2.** Зависимость составляющих скорости от величины сжимающего усилия при  $H = 50$  м,  $h = 1,5$  м,  $a = 2$  м,  $k = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$

Приведенные на рис. 2, 3, 4 распределения составляющих скорости вдоль профиля волны свидетельствуют о том, что в условиях сжатия ( $Q_1 \neq 0$ ), также как и при отсутствии сжимающего усилия [8], в точках максимальных (вершина) и минимальных (подшва) значений скорости на профиле  $u(x)$  вертикальная составляющая равна нулю. Однако точкам максимума и минимума на профиле  $w(x)$  соответствуют ненулевые величины горизонтальной составляющей скорости.



**Р и с. 3.** Зависимость составляющих скорости от величины сжимающего усилия при  $H = 50$  м,  $h = 1,5$  м,  $a = 2$  м,  $k = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$



**Р и с. 4.** Зависимость составляющих скорости от величины сжимающегося усилия при  $H = 50$  м,  $h = 1,5$  м,  $a = 1$  м,  $k = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$

Количественную зависимость изменений максимальных значений составляющих скорости в вершинах ( $U_1, W_1$ ) и впадинах ( $U_2, W_2$ ) их профилей от длины волны  $\lambda$  показывают данные, приведенные в таблице при  $a = 2$  м для тех же значений  $E, H, h$ , что и на рис. 1. Здесь же даны и соответствующие значения фазовой скорости ( $V_{\text{фаз}}$ ) и периода волны ( $2\pi/\sigma$ ).

**Влияние ледового сжатия на характеристики нелинейной волны**

$k, \text{ м}^{-1}$	$\lambda, \text{ м}$	$Q_1, \text{ Н/м}^2$	$V_{\text{фаз}}, \text{ м/с}$	$2\pi/\sigma, \text{ с}$	$U_1, \text{ м/с}$	$U_2, \text{ м/с}$	$W_1, \text{ м/с}$	$W_2, \text{ м/с}$
0,005	1256,00	0	22,21	56,56	1,44	-0,62	0,41	-0,41
		$\sqrt{D}$	22,03	57,01	1,25	-0,67	0,32	-0,32
		$1,95\sqrt{D}$	21,90	57,35	1,15	-0,70	0,28	-0,28
0,02	314,00	0	19,31	16,26	1,06	-1,00	0,76	-0,76
		$\sqrt{D}$	18,06	17,38	0,94	-0,95	0,72	-0,72
		$1,95\sqrt{D}$	16,81	18,68	0,87	-0,90	0,67	-0,67
0,04	157,00	0	16,71	9,40	1,28	-1,52	1,35	-1,35
		$\sqrt{D}$	12,95	12,13	0,99	-1,18	1,05	-1,05
		$1,95\sqrt{D}$	7,85	20,00	0,60	-0,72	0,64	-0,64
0,045	139,56	0	16,73	8,34	1,41	-1,71	1,53	-1,53
		$\sqrt{D}$	12,39	11,26	1,04	-1,26	1,13	-1,13
		$1,95\sqrt{D}$	5,78	24,13	0,49	-0,59	0,53	-0,53
0,047	133,62	0	16,81	7,95	1,47	-1,79	1,60	-1,60
		$\sqrt{D}$	12,27	10,89	1,07	-1,30	1,17	-1,17
		$1,95\sqrt{D}$	5,01	26,65	0,44	-0,53	0,48	-0,48

**Заключение.** Рассмотрено влияние ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости под плавающим ледяным покровом при распространении поверхностной волны конечной амплитуды. Исследование выполнено методом многомасштабных асимптотических разложений. Получены аналитические выражения, определяющие горизонтальную и вертикальную составляющие скорости движения жидкости с точностью до величин третьего порядка малости. Проведен количественный анализ влияния сжимающего усилия на распределения составляющих скорости вдоль профиля волны при волновых числах, соответствующих гравитационному, обусловленному сжатием и изгибному участкам дисперсионной кривой начальной линейной гармонике. Показано, что увеличение сжимающего усилия приводит к уменьшению амплитудных значений составляющих скорости и отставанию фазы колебаний.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Math. Phys. Pap. Cambr. Univ. Press.* – 1847. – 1. – P. 197 – 229.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. – М. – Л.: ОНТИ, 1936. – 304 с.
3. *Нестеров С.В.* Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давления // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* – 1968. – 4, № 10. – С. 1123 – 1125.
4. *Ньюмен Дж.* Морская гидродинамика. – Л.: Судостроение, 1985. – 386 с.
5. *Longuet-Higgins M.S.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves. Part 2. Water of finite depth // *J. Fluid Mech.* – 1988. – 186. – P. 321 – 336.
6. *Алешков Ю.З.* Течения и волны в океане. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 228 с.
7. *Vukатов А.Е., Vukатов А.А.* Propagation of surface waves of finite amplitude in a basin with floating broken ice // *Int. J. Offshore and Polar Eng.* – 1999. – 9, № 3. – P. 161 – 166.
8. *Букатов Ант.А., Букатов Анд.А.* Скорости движения жидких частиц под плавающим ледяным покровом при распространении периодической волны конечной амплитуды // *Морской гидрофизический журнал.* – 2011. – № 1. – С. 15 – 24.
9. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеоздат, 1967. – 215 с.
10. *Букатов А.Е.* Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // *Прикладная механика.* – 1981. – 17, № 1. – С. 93 – 98.
11. *Букатов А.Е., Букатов А.А.* Волны конечной амплитуды в однородной жидкости с плавающей упругой пластиной // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2009. – 50, № 5. – С. 67 – 74.
12. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь

Материал поступил  
в редакцию 22.02.10

АНОТАЦІЯ Методом багатьох масштабів з точністю до величин третього порядку малості отримані асимптотичні розкладання, які визначають складові швидкості руху рідини під плаваючим льодяним покривом при розповсюдженні періодичної поверхневої згинально-гравітаційної хвилі кінцевої амплітуди в умовах льодяного стиснення. Розглянуто залежність розподілів складових швидкості вздовж профілю хвилі від величини стискаючого зусилля та характеристик початкової гармоніки. Показано, що із збільшенням стискаючого зусилля відбувається зменшення амплітудних значень складових швидкості та відставання фази коливань.

**Ключові слова:** хвилі кінцевої амплітуди, згинально-гравітаційні хвилі, рух рідких частинок.

ABSTRACT Using the method of multiple scales, the asymptotic expansions are obtained up to the values of the third order. The expansions condition the components of fluid movement velocity under floating ice cover at propagation of periodic surface flexural-gravity wave of finite amplitude in the condition of ice compression. Dependence of distribution of velocity components along the wave profile upon the compressive force value and the initial harmonic characteristics is considered. It is shown that rise of compressive force is accompanied by decrease of amplitude values of velocity components and lag of oscillations' phase.

**Keywords:** finite amplitude waves, flexural-and-gravity waves, movement of fluid particles.